系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(4) (2005, 8), 451–458

NA 阵列加权乘积和的完全收敛性*

成凤旸 王岳宝

(苏州大学数学科学学院， 苏州 215006)

摘要 设 $\{X_{ni}: 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ 为行间 NA 阵列， $g(x)$ 是 R^+ 上指数为 α 的正则变化函数， $r > 0$, m 为正整数， $\{a_{ni}: 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ 为满足条件 $\max\limits_{1\leq i\leq n}|a_{ni}| = O((g(n))^{-1})$ 的实数阵列，本文得到了使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\Big|\sum\limits_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n}\prod\limits_{j=1}^{m} a_{ni_j}X_{ni_j}\Big| > \epsilon\Big) < \infty$, $\forall\varepsilon > 0$ 成立的条件，推广并改进了 Stout 及王岳宝和苏淳等的结论.

关键词 行间 NA 阵列，加权乘积和，完全收敛性，正则变化函数.

MR(2000) 主题分类号 60F15

1 主要结果

文 [1] 提出了 NA 的概念.

定义 1 称随机变量 (r.v.)$X_1, \cdots, X_n$, $n \geq 2$ 是 NA(Negative Association) 的，若对 $\{1, \cdots, n\}$ 的任何两个非空不交子集 A_1, A_2 均有 $Cov(f_1(X_j: j \in A_1), f_2(X_k: k \in A_2)) \leq 0$, 其中 f_1, f_2 是任何两个对每个变元不减且使上式有意义的函数. 称 r.v. 列 $\{X_i: i \geq 1\}$ 是 NA 的，若 $\forall n \geq 2$, $X_1, \cdots, X_n$ 是 NA 的. 称 r.v. 阵列 $\{X_{ni}: 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ 是行间 NA 的，若 $\forall n \geq 2$, $X_{n1}, \cdots, X_{nn}$ 是 NA 的.

由于 NA 随机变量在与实际应用有关的模型中 (如可靠性理论，多元统计分析等) 有广泛的应用，近年来 NA 列极限理论的发展十分迅速，其中一些成果还改进了独立列的相应结果，如文 [2–5] 等研究了 NA 列的完全收敛性，强大数律，重对数律，不等式等. 另一方面，加权乘积和既是加权部分和的一般化，又是 U 统计量的特殊情形，近年来也颇受人们的关注，如文 [6–8] 等.

文 [2] 将著名的文 [9] 中定理 4.1.3 推广到 NA 列，本文从三个方面作进一步的推广和改进，即

1) 讨论了更一般的完全收敛性;

2) 讨论了加权乘积和;

3) 取消了对二阶矩的限制，扩大了权函数的范围.

先回顾正则变化函数的概念与基本性质

* 国家自然科学基金 (10271087) 资助课题.
收稿日期：2002-11-16, 收到修改稿日期：2003-11-25.

定义 2 称非负函数 $g(x)$ 为指数为 α 的正则变化函数，如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(cx)}{g(x)}=c^{\alpha},\quad \forall c>0.$$

设 $g(x)$ 是 R^+ 上指数为 $\alpha(\neq 0)$ 的正则变化函数，令 $g^{-1}(x)=\inf\{y\in R^+ : g(y)>x\}$，则由文 [10] 中定理 1.5.12 知 $g^{-1}(x)$ 为指数为 $\frac{1}{\alpha}$ 的正则变化函数.

本文如无特别声明，均以 C 表示各可不同的正常数. 下面给出本文的主要结果.

定理 1 设 $r>0,\alpha>0,g(x)$ 是 R^+ 上指数为 α 的正则变化函数，且存在 $x_0\geq 0$ 使 $g(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加. 设 $\{X_{ni}:1\leq i\leq n,n\geq 1\}$ 为行间 NA 列，$\{a_{ni}:1\leq i\leq n,n\geq 1\}$ 为实数阵列，且存在 r.v. X 和常数 $C>0$, 使得

$$\Pr(|X_{ni}|\geq x)\leq C\Pr(|X|\geq x),\quad \forall x>0,\ 1\leq i\leq n,\ n\geq 1, \tag{1}$$

$$E(g^{-1}(|X|))^{r+1}<\infty, \tag{2}$$

$$\max_{1\leq i\leq n}|a_{ni}|=O((g(n))^{-1}), \tag{3}$$

又当 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ 时，

$$\log n\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2=o(1), \tag{4}$$

当 $\frac{(r+1)}{\alpha}\geq 1$ 时，

$$EX_{ni}=0,\quad 1\leq i\leq n,n\geq 1, \tag{5}$$

则对任意正整数 m, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\Pr\Big(\Big|\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n}\prod_{j=1}^{m}a_{ni_j}X_{ni_j}\Big|>\varepsilon\Big)<\infty,\quad \forall\varepsilon>0. \tag{6}$$

注 1 注意当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，(3) 蕴涵 (4). 当 $m=1$, $r=1$ 时，文 [11] 曾举例说明 (4) 不能减弱，不难证明，同一个例子说明，当 $m=1$, $0<r<1$ 时 (4) 也不能减弱.

注 2 文 [2] 中定理 1 是本文定理 1 当 $r=1$, $m=1$ 的特殊情形. 另一方面，除了与 (2) 相似的矩条件外，文 [2] 还特别要求二阶矩存在，这一要求实际上限制了 α 的范围. 当 $\frac{(1+r)}{\alpha}<2$ 时，我们解除了这个限制. 此外，我们还讨论了乘积和的情形.

在定理 1 中令 $a_{ni}=(g(n))^{-1}$, 立得

推论 1 设 $\alpha\geq\frac{1}{2}$, r, $g(x)$, $\{X_{ni}:1\leq i\leq n,n\geq 1\}$, X 同定理 1, 满足条件 (1) 和 (2), 且当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，有 $n(g(n))^{-2}\log n=o(1)$, 当 $\frac{(r+1)}{\alpha}\geq 1$ 时，$EX_{ni}=0$, $1\leq i\leq n$, $n\geq 1$, 则对任意正整数 m, 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\Pr\Big(\Big|\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n}\prod_{j=1}^{m}X_{ni_j}\Big|>\varepsilon(g(n))^m\Big)<\infty,\quad \forall\varepsilon>0. \tag{7}$$

例 1 设 $\alpha\geq\frac{1}{2}$, $r>0$, $g(x)=x^{\alpha}\log^2(2\vee x)$, $x>1$, 则由文 [10] 定理 1.5.13 和定理 1.5.15 知

$$g^{-1}(x)\sim 2(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}}\log^{\frac{-2}{\alpha}}x,\quad x\to\infty.$$

再设 $\{X, X_i : i \geq 1\}$ 为 i. i. d. r. v. 列，其共同的分布为

$$\Pr(|X| > x) = x^{-\frac{(r+1)}{\alpha}}, \quad x \geq 1,$$

则易知 $E|X|^{\frac{(r+1)}{\alpha}} = \infty$ 但当 $\frac{2(r+1)}{\alpha} > 1$ 时 (2) 成立．从而由推论 1 即知 (7) 成立．注意当 $m = r = 1$, $1 < \frac{4}{\alpha} \leq 2$ 时，上述结论不能由文 [2] 定理 1 推出．

例 2　设 $\alpha > 0$, $g(x) = x^\alpha \exp\{\sqrt[3]{\log x} \cos \sqrt[3]{\log x}\}$, $x \geq 1$. 直接计算可以证明 $g(x)$ 是 R^+ 上指数为 α 的正则变化函数，并且存在 $x_0 > 0$, 使当 $x > x_0$ 时 $g'(x) > 0$, 因而 $g(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上单调增加．另一方面，简单计算就可看出 $x^{-\alpha} g(x)$ 在 R^+ 的任何无穷区间上都不是单调的，因而 $g(x)$ 不满足文 [2] 定理 1 对 $g(x)$ 的基本要求．

2　几个引理

引理 1　设 $X_1, \cdots, X_k$ 为 NA 列， $|X_i| \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$, 则 $\forall t > 0$ 有：

$$E \exp\Big(t \sum_{i=1}^k X_i\Big) \leq \exp\Big\{t \sum_{i=1}^k EX_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^k e^{tb_i} EX_i^2\Big\}.$$

证

$$\begin{aligned}
E \exp\Big(t \sum_{i=1}^k X_i\Big) &\leq \prod_{i=1}^k E\Big(1 + tX_i + \frac{t^2 X_i^2}{2!} + \frac{t^3 X_i^3}{3!} + \cdots\Big) \\
&\leq \prod_{i=1}^k \Big(1 + tEX_i + \frac{t^2 EX_i^2}{2}\Big(1 + \frac{tb_i}{3} + \frac{t^2 b_i^2}{3 \cdot 4} + \cdots\Big)\Big) \\
&\leq \prod_{i=1}^k \Big(1 + tEX_i + \frac{t^2 EX_i^2}{2} e^{tb_i}\Big) \\
&\leq \prod_{i=1}^k \exp\Big(tEX_i + \frac{t^2}{2} e^{tb_i} EX_i^2\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{i=1}^k tEX_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^k e^{tb_i} EX_i^2\Big).
\end{aligned}$$

引理 2　设 $\{T_n : n \geq 1\}$, $\{S_n : n \geq 1\}$ 为 r.v. 列， K 为非零常数， $r \geq 0$, 如果

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1} \Pr(|T_n| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1} \Pr(|S_n| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{9}$$

则有

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1} \Pr(|T_n + S_n| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr(|T_n S_n| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr(|KT_n| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{12}$$

证 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\{|T_n + S_n| > \varepsilon\} \subset \Big\{|T_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup \Big\{|S_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\},$$
$$\{|T_n S_n| > \varepsilon\} \subset \{|T_n| > \sqrt{\varepsilon}\} \cup \{|S_n| > \sqrt{\varepsilon}\},$$
$$\{|KT_n| > \varepsilon\} \subset \Big\{|T_n| > \frac{\varepsilon}{|K|}\Big\},$$

结合 (8) 和 (9), 立得 (10)–(12).

引理 3[6] 设 $\{x_j : j \ge 1\}$ 为任意实数列，则 $\forall n \ge m \ge 1$

$$\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} \prod_{k=1}^{m} x_{j_k} = \sum_{\sum\limits_{k=1}^{m} r_k s_k = m} A(m, r_k, s_k : k = 1, \cdots, m) \prod_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^{r_k} \Big)^{s_k},$$

其中， $A(m, r_k, s_k : k = 1, \cdots, m)$, $\sum\limits_{k=1}^{m} r_k s_k = m$ 是与 n 及 $\{x_j : j \ge 1\}$ 无关的常数。

3 定理的证明

定理 1 之证明 不失一般性，不妨假设 $g(x)$ 在 R^+ 上单调增加，并令 $b_n = g(n)$, $n \ge 1$. 由引理 2 和引理 3 及初等 Jensen 不等式知，为证 (6), 只要证

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\Big| \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_{ni} \Big| > \varepsilon \Big) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 X_{ni}^2 > \varepsilon \Big) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{14}$$

由于 $a_{ni} = a_{ni} I(a_{ni} > 0) + a_{ni} I(a_{ni} < 0)$, 故不妨假设 $a_{ni} \ge 0$, $1 \le i \le n$, $n \ge 1$.

先证 (13). 任意给定 $\varepsilon > 0$, 取 $\sigma > 0$ 和正整数 N(容后待定), 令

$$X'_{ni} = -b_n^{-\sigma} I(a_{ni} X_{ni} < -b_n^{-\sigma}) + a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \le b_n^{-\sigma}) + b_n^{-\sigma} I(a_{ni} X_{ni} > b_n^{-\sigma}),$$
$$X''_{ni} = (a_{ni} X_{ni} + b_n^{-\sigma}) I\Big(a_{ni} X_{ni} < -\frac{\varepsilon}{N}\Big) + (a_{ni} X_{ni} - b_n^{-\sigma}) I\Big(a_{ni} X_{ni} > \frac{\varepsilon}{N}\Big),$$
$$X'''_{ni} = a_{ni} X_{ni} - X'_{ni} - X''_{ni}.$$

易知 $\{X'_{ni} : 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 仍为行间 NA 阵列. 由 X'''_{ni} 的定义，有

$$\begin{aligned} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'''_{ni} > \varepsilon \Big) &\le \Pr\Big(\text{至少有 N 个下标 } i \text{ 使得 } a_{ni} X_{ni} > b_n^{-\sigma} \Big) \\ &\le \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_N \le n} \Pr(a_{ni_1} X_{ni_1} > b_n^{-\sigma}, \cdots, a_{ni_N} X_{ni_N} > b_n^{-\sigma}) \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^{n} \Pr(a_{ni} X_{ni} > b_n^{-\sigma}) \Big)^N \le C(n \Pr(|X| > b_n^{-\sigma+1}))^N \end{aligned}$$

由于 $(g^{-1}(x))^{r+1}$ 是指数为 $\frac{(r+1)}{\alpha}$ 的正则变化函数，任取 $v\in(\frac{1}{\alpha},\frac{(r+1)}{\alpha})$，则由 (2) 知 $E|X|^v<\infty$. 从而由 (3) 及 Markov 不等式，有

$$n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X'''_{ni}>\varepsilon\Big)\le Cn^{r-1}(nb_n^{(\sigma-1)v})^N.$$

注意到 $g(x)$ 是指数为 α 的正则变化函数，而 $b_n=g(n)$，因此，只要取 N 充分大，$\sigma_1>0$ 充分小，使得 $r-1+N(1+(\sigma_1-1)v\alpha)<-1$，则当 $\sigma\le\sigma_1$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X'''_{ni}>\varepsilon\Big)<\infty. \tag{15}$$

又由 X''_{ni} 的定义，有

$$\begin{aligned}n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X''_{ni}>\varepsilon\Big)&\le n^{r-1}\Pr\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\Big(a_{ni}X_{ni}>\frac{\varepsilon}{N}\Big)\Big)\\&\le n^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\Pr\Big(X_{ni}>\frac{\varepsilon g(n)}{N}\Big)\le Cn^r\Pr\Big(|X|>\frac{\varepsilon g(n)}{N}\Big)\\&\le Cn^r\Pr\Big(g^{-1}\Big(\frac{N|X|}{\varepsilon}\Big)>n\Big).\end{aligned}\tag{16}$$

由于 $(g^{-1}(x))^{r+1}$ 是指数为 $\frac{(r+1)}{\alpha}$ 的正则变化函数，因而由定义 2 知

$$\Big(g^{-1}\Big(\frac{Nx}{\varepsilon}\Big)\Big)^{r+1}\sim\Big(\frac{N}{\varepsilon}\Big)^{\frac{(r+1)}{\alpha}}g^{-1}(x),\qquad x\to\infty,$$

由 (2) 即得 $E(g^{-1}(\frac{N|X|}{\varepsilon}))^{r+1}<\infty$，结合 (16) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X''_{ni}>\varepsilon\Big)<\infty. \tag{17}$$

下面讨论 X'_{ni}，由 Markov 不等式及引理 1，$\forall t>0$，有

$$\begin{aligned}n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X'_{ni}>\varepsilon\Big)&\le n^{r-1}e^{-t\varepsilon}E\exp\Big(t\sum_{i=1}^{n}X'_{ni}\Big)\\&\le\exp\Big\{(r-1)\log n-t\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}tEX'_{ni}+\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\exp(tb_n^{-\sigma})EX'^2_{ni}\Big\}.\end{aligned}$$

取 $t=\frac{(r+1)\log n}{\varepsilon}$，则得

$$\begin{aligned}&n^{r-1}\Pr\Big(\sum_{i=1}^{n}X'_{ni}>\varepsilon\Big)\\&\le\exp\Big\{-2\log n+\frac{(r+1)\log n}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}EX'_{ni}\\&\qquad+\frac{(r+1)^2\log^2 n}{2\varepsilon^2}\exp\Big(\frac{(r+1)\log n}{\varepsilon b_n^{\sigma}}\Big)\sum_{i=1}^{n}EX'^2_{ni}\Big\}.\end{aligned}\tag{18}$$

下面我们证明以下二式

$$\sum_{i=1}^{n} EX'_{ni} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{19}$$

$$\log n \sum_{i=1}^{n} EX'^{2}_{ni} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{20}$$

当 $\frac{(r+1)}{\alpha} > 1$ 时，取 $v \in \left(\max(1, \frac{1}{\alpha}), \frac{(r+1)}{\alpha}\right)$, 则由 (5) 及 X'_{ni} 的定义，有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} EX'_{ni}\Big| \leq &\Big|\sum_{i=1}^{n} Ea_{ni}X_{ni}\Big| + \sum_{i=1}^{n} E(|a_{ni}X_{ni}| + b_n^{-\sigma})I(|a_{ni}X_{ni}| > b_n^{-\sigma}) \\ \leq &2\sum_{i=1}^{n} b_n^{\sigma(v-1)} E|a_{ni}X_{ni}|^v \leq Cnb_n^{\sigma(v-1)-v},\end{aligned}$$

于是，只要取 $\sigma \leq \sigma_1$, 使满足 $1 + (\sigma(v-1) - v)\alpha < 0$, 就有 (19) 成立．当 $0 < \frac{(r+1)}{\alpha} \leq 1$ 时，取 $v \in (\frac{1}{\alpha}, \frac{(r+1)}{\alpha})$, $\sigma = \sigma_1$, 则有

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{n} EX'_{ni}\Big| \leq &\Big|\sum_{i=1}^{n} Ea_{ni}X_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}| \leq b_n^{-\sigma})\Big| + \sum_{i=1}^{n} b_n^{-\sigma} \Pr(|a_{ni}X_{ni}| > b_n^{-\sigma}) \\ \leq &2\sum_{i=1}^{n} b_n^{-\sigma(1-v)} E|a_{ni}X_{ni}|^v \leq Cnb_n^{-\sigma(1-v)-v},\end{aligned}$$

由 $1 - (\sigma(1-v) + v)\alpha < 0$, 即得 (19) 成立，从而 (19) 得证.

当 $\frac{(r+1)}{\alpha} > 2$ 时， $EX^2 < \infty$, 由 (4) 及注 1 即得

$$\log n \sum_{i=1}^{n} EX'^{2}_{ni} \leq C \log n \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 EX^2 \to 0.$$

而当 $0 < \frac{(r+1)}{\alpha} \leq 2$ 时，取 $v \in (\frac{1}{\alpha}, \frac{(r+1)}{\alpha})$, 由 $1 - (\sigma(2-v) + v)\alpha < 0$ 有

$$\begin{aligned}\log n \sum_{i=1}^{n} EX'^{2}_{ni} = &\log n\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} Ea_{ni}^2X_{ni}^2 I(|a_{ni}X_{ni}| \leq b_n^{-\sigma})\Big| + \sum_{i=1}^{n} b_n^{-2\sigma} \Pr(|a_{ni}X_{ni}| > b_n^{-\sigma})\Big) \\ \leq &\log n \sum_{i=1}^{n} b_n^{-\sigma(2-v)} E|a_{ni}X_{ni}|^v \leq Cnb_n^{-\sigma(2-v)-v} \log n \to 0.\end{aligned}$$

从而知 (20) 成立．由 (18)–(20), 当 n 充分大时，有

$$n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'_{ni} > \varepsilon\Big) \leq C \exp(-2\log n + 2^{-1}\log n) = Cn^{-\frac{3}{2}},$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'_{ni} > \varepsilon\Big) < \infty. \tag{21}$$

由 (15),(17) 和 (21) 即知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} > 3\varepsilon\Big) < \infty. \tag{22}$$

以 $-X_{ni}$ 代 X_{ni}, 同理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_{ni} < -3\varepsilon\Big) < \infty. \tag{23}$$

由 (22),(23) 即得 (13). 现在我们来证 (14), 因为 $X_{ni}^2 = X_{ni}^2 I(X_{ni} \geq 0) + X_{ni}^2 I(X_{ni} < 0)$, 故不妨设 $X_{ni} \geq 0$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$. 任意给定 $\varepsilon > 0$, 取 $\sigma > 0$ 和正整数 N(容后待定), 令

$$X'_{ni} = a_{ni}X_{ni}I(a_{ni}X_{ni} \leq b_n^{-\sigma}) + b_n^{-\sigma}I(a_{ni}X_{ni} > b_n^{-\sigma}),$$

$$X''_{ni} = (a_{ni}X_{ni} - b_n^{-\sigma})I\Big(a_{ni}X_{ni} > \sqrt{\frac{\varepsilon}{N}}\Big), \qquad X'''_{ni} = a_{ni}X_{ni} - X'_{ni} - X''_{ni}.$$

易知 $\{X'^2_{ni}: 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ 仍为行间 NA 阵列. 类似于 (15),(17) 的证明，立得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'''^2_{ni} > \varepsilon\Big) < \infty, \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X''^2_{ni} > \varepsilon\Big) < \infty. \tag{25}$$

又由 Markov 不等式， $\forall t > 0$, 有

$$\begin{aligned} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'^2_{ni} > \varepsilon\Big) &\leq n^{r-1} e^{-t\varepsilon} E\exp\Big(t\sum_{i=1}^{n} X'^2_{ni}\Big) \\ &\leq \exp\Big\{(r-1)\log n - t\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} tEX'^2_{ni}\Big\}. \end{aligned}$$

取 $t = \frac{(r+1)\log n}{\varepsilon}$, 并注意 (20) 仍然成立，类似于 (21) 的证明，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} X'^2_{ni} > \varepsilon\Big) < \infty. \tag{26}$$

由 (24)–(26) 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 X_{ni}^2 > 3\varepsilon\Big) < \infty.$$

定理证毕.

注 3　在处理 X'_{ni} 时，我们的证明以引理 1 为基础，这与文 [2] 定理 1 相应部分的证明不相同 (文 [2] 的证明依赖于二阶矩存在), 因而可以得出更精致的结果.

参 考 文 献

[1] Joag-dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications. *Ann Statist*, 1983, **11**: 286–295.

[2] 王岳宝，苏淳．不同分布 NA 列加权和的强极限定理及其在线性模型中的应用．应用数学学报， 1998, **21**: 571–578.

[3] 刘立新，吴荣． NA 随机变量序列的最大部分和不等式及有界重对数律．数学学报， 2002, **45**: 969–978.

[4] Liu J J, Gan S X, Chen P Y. The Hajeck-Renyi inequality for the NA random variables and its application. *Statist. Probab. Lett.*, 1999, **43**: 99–105.

[5] Shao Q M. A comparison theorem on maximal inequalities between negatively associated and independent random variables. *J Theor Probab*, 2000, **13**(2): 343–356.

[6] 王岳宝，严继高，成凤旸，蔡新中．关于不同分布两两 NQD 列的 Jamison 型加权乘积和的强稳定性．数学年刊， 2001, **22**A: 701–706.

[7] 苏淳，梁汉营，王岳宝． IID 随机变量两两乘积之和的 Hsu-Robbins 型定理 (I). 数学学报， 2000, **43**(5): 875–886.

[8] 成凤旸，王岳宝，严继高，蔡新中． NA 列加权乘积和的完全收敛性．应用数学学报，2002, **25**(4): 738–745.

[9] Stout W F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974.

[10] Bingham N H, Coldie C M, Teugels J L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[11] Stout W F. Some results on the complete and almost sure convergence of linear combinations of independent random variables and martingale differences. *Ann Math Statist*, 1968, **39**: 1549–1562.

[12] Sung S H. Complete convergence for weighted sums of arrays of rowwise independent B-valued random variables. *Stochastic Anal Appl*, 1997, **15**: 255–267.

COMPLETE CONVERGENCE FOR WEIGHTED SUMS OF ARRAYS OF NA RANDOM VARIABLES

Cheng Fengyang Wang Yuebao

(*School of Mathematical Sciences, Suzhou University, Suzhou* 215006)

Abstract Let $\{X_{ni}: 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ be an array of rowwise NA random variables, and let $g(x)$ be a regular function with index α. Let $\{a_{ni}: 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ be an array of real numbers satisfying $\max\limits_{1 \le i \le n} |a_{ni}| = O((g(n))^{-1})$. Let $r > 0$, and let m be a positive integer. A set of sufficient conditions such that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \Pr\Big(\Big|\sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} \prod\limits_{j=1}^{m} a_{ni_j} X_{ni_j}\Big| > \varepsilon\Big) < \infty,\ \forall \varepsilon > 0$ are obtained. The well-known results by Stout and Wang are extended.

Key words Array of rowwise NA random variables, weighted procduct sum, complete convergence, regular varying function.