系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(6) (2008, 6), 751–757

一类非线性 Schrödinger 方程的整体解和自相似解*

叶 耀 军
(浙江科技学院数学与信息科学系， 杭州 310023)

王 建 平
(河南农业大学信息与计算科学系， 郑州 450002)

摘要 对于 α 的某一取值范围，应用广义 Strichartz 不等式和压缩映射原理研究了初值在弱 L^p 空间中足够小的条件下，非线性 Schrödinger 方程 Cauchy 问题整体解和自相似解的存在性.

关键词 非线性 Schrödinger 方程，广义 Strichartz 估计，自相似解.

MR(2000) 主题分类号 37L05, 35Q55

1 引 言

本文考虑非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

$$iu_t + \Delta u = \rho|u|^\alpha u, \quad (t,x) \in R^+ \times R^n, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R^n. \tag{2}$$

其中 $\rho \in R,\ \alpha > 0,\ u = u(t,x)$ 是定义在 $R^+ \times R^n,\ R^+ \equiv [0,+\infty)$ 上的复值函数，初值 $\varphi(x)$ 是定义在 R^n 上的复值函数. 由方程 (1) 的齐次性知，如果 $u(t,x)$ 是 (1)–(2) 的一个解；则对于任意的 $\gamma > 0$, $u_\gamma(t,x) = \gamma^{\frac{2}{\alpha}} u(\gamma^2 t, \gamma x)$ 是方程 (1) 具有初值 $\gamma^{\frac{2}{\alpha}}\varphi(\gamma x)$ 的解. 于是，我们有下面的定义.

定义 1.1 设 $u(t,x)$ 是 Cauchy 问题 (1)–(2) 的解，且

$$u(t,x) = u_\gamma(t,x) = \gamma^{\frac{2}{\alpha}} u(\gamma^2 t, \gamma x), \quad \forall \gamma > 0.$$

则称 $u(t,x)$ 是 (1)–(2) 的自相似解.

* 国家自然科学基金 (10441002), 河南省自然科学基金 (0111051200), 河南省青年骨干教师 (2004-2006) 和河南省教育厅自然科学基金 (2007110013) 资助项目.

收稿日期：2005-03-22, 收到修改稿日期：2007-04-17.

由定义 1.1 知，自相似解具有形式

$$u(t,x)=t^{-\frac{1}{\alpha}}W\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big),$$

其中 $W:\ R^n\longrightarrow C$ 称为 u 的波阵面. 初值函数 $\varphi(x)$ 具有形式

$$\varphi(x)=\frac{\Omega(x')}{|x|^{\frac{2}{\alpha}}},\quad x'=\frac{x}{|x|},\tag{3}$$

这里 $\Omega(x')$ 是定义在 R^n 中单位球面 S^{n-1} 上的函数. 于是问题 (1)–(2) 可以通过关于 W 的半线性椭圆型方程来研究. 然而，求解这个椭圆型方程通常是很困难的. 形如 (3) 的初始函数是一个 $-\frac{2}{\alpha}$ 阶齐次函数. 一般来说，这样的函数不属于通常的 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间. 因此，为构造 (1)–(2) 的自相似解；我们必须选取一个适当的包含 $-\frac{2}{\alpha}$ 阶齐次函数的 Banach 空间. 许多人用不同的方法和技巧已广泛地研究了 Cauchy 问题 (1)–(2) 的适定性和散射性理论 [1−4]． Cazenave 和 Weissler[5,6] 及 Ribaud 和 Youssfi[7] 得到了方程 (1) 具有形如 (3) 初值的自相似解；他们的共同思想是引进由 Bochner 可测函数

$$u:\ (0,+\infty)\longrightarrow \dot{H}^s_p(R^n)$$

所构成的函数空间 $E_{s,p}=E_{s,p}(R^+\times R^n)$ 并满足

$$\|u\|_{E_{s,p}}=\sup_{t>0}t^{\beta}\|u(t,x)\|_{\dot{H}^s_p}<+\infty.$$

其中 $2\le p<\infty$, $0\le s<\frac{n}{p}$, $\beta=\frac{1}{2}(\frac{2}{\alpha}-\frac{n}{p}+s)$. 然后，在 $\|u_0\|_{E_{s,p}}=\|S(t)\varphi\|_{E_{s,p}}<\varepsilon(\varepsilon$ 充分小) 的条件下，他们在 $E_{s,p}$ 中建立了 Cauchy 问题 (1)–(2) 整体解的存在性，其中 $S(t)=\mathrm{e}^{it\Delta}$ 是自由 Schrödinger 群. 在非线性增长参量 α 的适当限制下，通过 Strichartz 估计， Planchon[8] 证明了具有小初值的 Cauchy 问题 (1)–(2) 在 $B^{s_c}_{2,\infty}$, $s_c=\frac{n}{2}-\frac{2}{\alpha}$ 中存在整体解；并且这些整体解包含一类自相似解. 之后， Miao C X 等人 [9] 推广了文 [8] 的结果.

本文的目的是应用广义 Strichartz 估计和不动点定理来研究弱 L^p 空间中非线性 Schrödinger 方程 Cauchy 问题 (1)–(2) 整体自相似解的存在性. 第 2 节我们给出一些预备知识. 第 3 节将叙述本文的主要结果，第 4 节给出了主要结果的证明.

2 预备知识

首先，我们来回顾一下弱 L^p 空间和 Lorentz 空间的定义及主要性质.

定义 2.1 设 $f(x)$ 是 (X,μ) 上的可测函数，记 $E_f(\lambda)=\{x\in X:\ |f(x)|>\lambda\}$, $\forall\,\lambda>0$, 则称 $f_*(\lambda)=\mu(E_f(\lambda))$ 为 $f(x)$ 的分布函数.

分布函数具有下面的一些性质

i) $f_*(\lambda)$ 是非增且右连续的函数；

ii) 若 $|f(x)|\le|g(x)|$, 则 $f_*(\lambda)\le g_*(\lambda)$;

iii) 若 $|f(x)|\le|g(x)|+|h(x)|$, 则 $f_*(\lambda)\le g_*(\frac{\lambda}{2})+h_*(\frac{\lambda}{2})$;

iv) 对任意的 $0<p<\infty$, $\lambda>0$, 有 $f_*(\lambda)\le\lambda^{-p}\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)$.

定义 2.2 设 $f(x)$ 是 (X,μ) 上的可测函数，$0<p<\infty$, 令 $L_p^*=\{f:\ \|f\|_p^*<\infty\}$, 其中 $\|f\|_p^*=\sup\limits_{\lambda>0}\lambda f_*^{\frac{1}{p}}(\lambda)$, 则称 L_p^* 为弱 L^p 空间． $p=\infty$ 时， $L_\infty^*=L_\infty$.

注 1　由 iv) 知

$$\lambda f_*^{\frac{1}{p}}(\lambda)\le\left\{\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}}\le\|f\|_p.$$

即 $\|f\|_p^*\le\|f\|_p$; 故 $L_p\subset L_p^*$, 反之不一定成立．

定义 2.3 设 $f^*(t)=\inf\limits_{t>0}\{s>0:\ f_*(s)\le t\}$ 是函数 $f(x),\ x\in R^n$ 的非升重排，则 $L_{p,q}=\{f:\ \|f\|_{p,q}^*<+\infty\}$ 称为 Lorentz 空间．其中当 $1\le p,q<\infty$ 时，

$$\|f\|_{p,q}^*=\left(\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}};$$

当 $1\le p<\infty,\ q=\infty$ 时， $\|f\|_{p,q}^*=\sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)$.

关于非升重排函数的定义及 Lorentz 空间的性质等详细内容可参见文 [10,11].

注 2　当 $p=q$ 时， $L_{p,p}=L_p$; 当 $1\le p<\infty,\ q=\infty$ 时， $L_{p,\infty}=L_p^*$. 即

$$\|f\|_{p,\infty}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)=\sup_{\lambda>0}\lambda(f_*(\lambda))^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p^*.$$

注 3　$\|f\|_{p,q}^*$ 不满足三角不等式，只是拟范数．但我们可以找到与之等价的范数 $\|f\|_{p,q}$ 使得 $L_{p,q}$ 成为赋范线性 Banach 空间．其中，当 $1<p<\infty,\ 1\le q<\infty$ 时，

$$\|f\|_{p,q}=\left(\frac{p}{q}\int_0^\infty(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t))^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{q}};$$

当 $1<p\le\infty,\ q=\infty$ 时，

$$\|f\|_{p,q}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t).$$

这里， $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(y)\mathrm{d}y,\ t>0$. 这个函数与 $f(x)$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数密切相关，由 [12] 知，它可表示为

$$f^{**}(t)=\sup_{\mu(E)\ge t,E\subset M}\frac{1}{m(E)}\int_E|f(x)|\mathrm{d}x.$$

命题 2.1

1) 如果 $1\le p<\infty,\ 1\le q_1\le q_2\le\infty$, 则 $L_{p,q_1}\hookrightarrow L_{p,q_2}$;

2) 设 $1\le p<\infty,\ 1\le q\le\infty$, 则 $\||f|^\alpha\|_{p,q}=\|f\|_{p\alpha,q\alpha}^\alpha$.

命题 2.1 的证明直接由定义 2.3 可得．

命题 2.2 (广义 Hölder 不等式)　设 $1\le p_1,p_2,r<\infty,\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<1,\ \frac{1}{r}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$; 并且 $1\le q_1,q_2,s\le\infty,\ \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\ge\frac{1}{s}$. 如果 $f\in L_{p_1,q_1},\ g\in L_{p_2,q_2}$, 则 $fg\in L_{r,s}$, 且 $\|fg\|_{r,s}\le r'\|f\|_{p_1,q_1}\|g\|_{p_2,q_2}$. 其中 r' 是 r 对偶数，即 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$.

命题 2.2 的证明可参见文 [13].

3 主要结果

为讨论问题方便起见，我们把 (1)–(2) 写成等价的积分方程

$$u(t)=S(t)\varphi-i\rho\int_0^t S(t-s)(|u(s)|^\alpha u(s))\mathrm{d}s, \tag{4}$$

其中 $S(t)=\mathrm{e}^{it\Delta}=\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-i|\xi|^2t}\mathcal{F}\cdot)$ 是自由 Schrödinger 方程 $iu_t+\Delta u=0$ 产生的自由群，$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换和逆 Fourier 变换.

命题 3.1 (广义 Strichartz 估计) 设

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=\frac{2}{n+2},\quad \frac{2(n+1)}{n}<r<\frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}, \tag{5}$$

则

$$\left\|\int_0^t S(t-s)f(x,s)\mathrm{d}s\right\|_{L^r(R^{n+1})}\leq C\|f\|_{L^p(R^{n+1})}. \tag{6}$$

如果 p,r 满足 (5); 则由 (6) 应用实插值得

$$\left\|\int_0^t S(t-s)f(x,s)\mathrm{d}s\right\|_{r,\infty}\leq C\|f\|_{p,\infty}. \tag{7}$$

命题 3.1 的证明参见文 [14].

我们的主要结果叙述如下.

定理 3.1 假设

$$\frac{4(n+1)}{n(n+2)}<\alpha<\frac{4(n+1)}{n^2}, \tag{8}$$

$u_0(t,x)=S(t)\varphi(x)$, 存在 $\varepsilon>0$, 如果 $\|u_0\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\leq\varepsilon$; 则 (1)–(2) 存在唯一解 $u\in L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})$ 满足

$$\|u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\leq 2\varepsilon.$$

定理 3.2 设 $\varphi(x)=\delta|x|^{-\frac{2}{\alpha}}$, $|\delta|$ 充分小； α 满足 (8), 则 (1)–(2) 存在唯一满足定理 3.1 中条件的整体自相似解.

4 主要结果的证明

4.1 定理 3.1 的证明

根据积分方程 (4) 定义映射 Φ： $u\longrightarrow\Phi u$, 其中

$$\Phi u=S(t)\varphi-i\rho\int_0^t S(t-s)(|u(s)|^\alpha u(s))\mathrm{d}s,$$

则由 (7) 及命题 2.1 得

$$\|\Phi u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\leq\varepsilon+C\||u|^\alpha u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2(\alpha+1)},\infty}(R^{n+1})}\leq\varepsilon+C\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}. \tag{9}$$

其次，应用 (7) 和命题 2.2 得

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi u-\Phi v\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\\
=&\left\|\int_0^t S(t-s)(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v)\mathrm{d}s\right\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\\
\le& C\||u|^\alpha u-|v|^\alpha v\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2(\alpha+1)},\infty}(R^{n+1})}\\
\le& C\|(|u|^\alpha+|v|^\alpha)(u-v)\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2(\alpha+1)},\infty}(R^{n+1})}\\
\le& C\left(\|u\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}+\|v\|^\alpha_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\right)\|u-v\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

令

$$
X_\varepsilon=\left\{u\in L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1}):\ \|u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\le 2\varepsilon\right\}\subset L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1}),
$$

并取 $\varepsilon\le(\frac{1}{C\cdot 2^{\alpha+1}})^{\frac{1}{\alpha}}$; 则对于任意的 u, $v\in X_\varepsilon$, 由 (9) 和 (10) 有

$$
\|\Phi u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\le 2\varepsilon,\quad \|\Phi u-\Phi v\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\le\frac{1}{2}\|u-v\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}.
$$

即 Φ 是一个从 X_ε 到自身的压缩映射. 由 Banach 不动点定理知， (1)–(2) 或 (4) 存在唯一解 $u\in L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})$; 并且 $\|u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}\le 2\varepsilon$.

定理 3.1 证毕.

4.2 定理 3.2 的证明

设

$$
u\in L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1}),\quad u_\gamma(t,x)=\gamma^{\frac{2}{\alpha}}u(\gamma^2 t,\gamma x),\quad \forall\,\gamma>0.
$$

如果

$$
E_u(\lambda)=\{(t,x):\ |u|>\lambda\},\quad E_{u_\gamma}(\lambda)=\{(t,x):\ |u_\gamma|>\lambda\},
$$

则由变量替换得 $\mu(E_{u_\gamma}(\lambda))=\gamma^{-n-2}\mu(E_u(\theta))$, 其中 $\theta=\lambda\gamma^{-\frac{2}{\alpha}}$. 因此，由定义 2.2 得

$$
\|u\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}=\|u_\gamma\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}.
$$

设 $u_0(t,x)=S(t)\varphi$, 则 $u_0=\delta t^{-\frac{1}{\alpha}}f(\frac{x}{\sqrt{t}})$, 其中 $f(\frac{x}{\sqrt{t}})=S(1)|\frac{x}{\sqrt{t}}|^{-\frac{2}{\alpha}}$. 由文 [5] 中的 (3.17) 式知

$$
|f(x)|\le C(1+|x|)^{-\sigma},
$$

其中，当 $\alpha<\frac{4}{n}$ 时， $\sigma=n-\frac{2}{\alpha}$; 当 $\alpha\ge\frac{4}{n}$ 时， $\sigma=\frac{2}{\alpha}$.

因此，当 $\alpha<\frac{4}{n}$ 时，我们有

$$
|u_0(t,x)|\le C|\delta|t^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-\frac{n\alpha-2}{\alpha}}.
$$

令

$$E_\lambda=\{(t,x):|u_0|>\lambda\}=\left\{(t,x):\ \beta t^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-\frac{n\alpha-2}{\alpha}}>\lambda\right\},$$

则 $E_{u_0}(\lambda)\subset E_\lambda$, 其中 $\beta=C|\delta|$. 由于

$$\begin{aligned}\mu(E_\lambda)&=\int\int_{E_\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^{(\lambda^{-1}\beta)^\alpha}\mathrm{d}t\int_0^{t^{\frac12}[(\lambda^{-1}\beta)^\alpha t^{-1})^{\frac{1}{n\alpha-2}}-1]}r^{n-1}\omega_{n-1}\mathrm{d}r\\&=C\int_0^{(\lambda^{-1}\beta)^\alpha}(t^{\frac12}[((\lambda^{-1}\beta)^\alpha t^{-1})^{\frac{1}{n\alpha-2}}-1])^n\mathrm{d}t\\&=C(\lambda^{-1}\beta)^{\frac{n\alpha}{n\alpha-2}}\int_0^{(\lambda^{-1}\beta)^\alpha}t^{\frac{n}{2}-\frac{n}{n\alpha-2}}[1-((\lambda^{-1}\beta)^\alpha t^{-1})^{-\frac{1}{n\alpha-2}}]^n\mathrm{d}t\\&\le C(\lambda^{-1}\beta)^{\frac{n\alpha}{n\alpha-2}}\int_0^{(\lambda^{-1}\beta)^\alpha}t^{\frac{n}{2}-\frac{n}{n\alpha-2}}\mathrm{d}t=C(\lambda^{-1}\beta)^{\frac{\alpha(n+2)}{2}},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^{\frac{\alpha(n+2)}{2},\infty}(R^{n+1})}&=\sup_{\lambda>0}\lambda\mu(E_{u_0}(\lambda))^{\frac{2}{\alpha(n+2)}}\le\sup_{\lambda>0}\lambda\mu(E_\lambda)^{\frac{2}{\alpha(n+2)}}\\&\le\sup_{\lambda>0}\lambda\cdot C\lambda^{-1}\beta=C\beta.\end{aligned}$$

当 $|\delta|$ 充分小时， $C\beta$ 充分小. 类似地，当 $\alpha>\frac{4}{n}$ 时有相同的结果.

由定理 3.1 知， (1)–(2) 存在唯一满足初值 $\varphi(x)=\delta|x|^{-\frac{2}{\alpha}}$ 的整体解 $u(t,x)$. 另一方面, $u_\gamma(t,x)=\gamma^{\frac{2}{\alpha}}u(\gamma^2t,\gamma x)$ 满足方程 (1), 并且

$$u_\gamma(0,x)=\gamma^{\frac{2}{\alpha}}u(0,\gamma x)=\gamma^{\frac{2}{\alpha}}\cdot\delta|\gamma x|^{-\frac{2}{\alpha}}=\delta|x|^{-\frac{2}{\alpha}}.$$

所以由唯一性得 $u_\gamma(t,x)=u(t,x)$, $\forall\gamma>0$. 即 $u(t,x)$ 是 (1)–(2) 的整体自相似解.

定理 3.2 证毕.

参 考 文 献

[1] Cazenave T, Weissler F B. The Cauchy problem for critical nonlinear Schrödinger equations in H^s. *Nonlin. Anal. TMA*, 1990, **14**: 807–836.

[2] Ginibre J, Velo G. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, 1979, **32**: 1–71.

[3] Ginibre J, Velo G. Scattering theory in energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pure Appl.*, 1985, **64**: 363–401.

[4] Ginibre J, Velo G. The global problem for some nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Nonlin.*, 1985, **2**: 309–327.

[5] Cazenave T, Weissler F B. Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger equations and heat equations. *Math. Z.*, 1998, **228**: 83–120.
[6] Cazenave T, Weissler F B. More self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equations. *NoDEA: Nonlinear Differential Equations and Applications*, 1998, **5**: 355–365.
[7] Ribaud F, Youssfi A. Regular and self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pure Appl.*, 1998, **77**: 1065–1079.
[8] Planchon F. Self-similar Solutions and Besov Spaces for Semilinear Schrödinger and Wave equations. Proc. Journees Equations aux Derivees Partielles, St-Jean de Monts, 1999.
[9] Miao C X, Zhang B, Zhang X Y. Self-similar solutions for nonlinear Schrödinger equations. *Methods and Applications of Analysis*, 2003, **10**: 119–136.
[10] Bergh J and Löfström J. Interpolation Spaces. New York: Springer, 1976.
[11] Miao C X. Harmonic Analysis and Applications to Partial Differential Equations. Beijing: Science Press, Second Edition, 2004(in Chinese).
[12] Hunt R. On $L_{p,q}$ spaces. *Mathématique*, 1966, **12**: 249–276.
[13] O'Neil R. Convolution operators and $L(p,q)$ spaces. *Duke Math. J.*, 1963, **30**: 129–142.
[14] Stricharta R. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 1977, **44**: 705–714.

THE GLOBAL SOLUTIONS AND SELF-SIMILAR SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS

YE Yaojun

(*Department of Mathematics and Information Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou* 310023)

WANG Jianping

(*Department of Information and Computational Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou* 450002)

Abstract The global Cauchy problem of nonlinear Schrödinger equations is considered by using generalized Strichartz inequalities and the contraction mapping principle. Under some restrictions on parameter α, if the initial value is sufficiently small in some weak L^p space, then there exists a global solution. Moreover, the global unique existence of self-similar solutions is obtained in weak L^p space for the small initial value with self-similar structure.

Key words Nonlinear Schrödinger equation, generalized Strichartz estimates, self-similar solutions.