系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(10) (2008, 10), 1181–1186

图的邻点可区别无圈边染色的一个界*

强会英 李沐春 张忠辅

(兰州交通大学数理与软件过程学院， 甘肃 730070)

摘要 图 G 的一个正常边染色被称作邻点可区别无圈边染色，如果 G 中无二色圈，且相邻点关联边的色集合不同. 应用概率的方法得到了图 G 的一个邻点可区别无圈边色数的上界，其中图 G 为无孤立边的图.

关键词 邻点可区别无圈边染色，邻强边染色，无圈边染色， Lovász 局部引理.

MR(2000) 主题分类号 05C15, 68R10, 94C15

1 引 言

Alon 在无圈染色 [1] 的基础上，在文献 [2] 中提出了无圈边染色的概念，并证明了任意图的无圈边色数是一个 NP- 困难问题. 文献 [3] 中， Hatami 在邻强边染色 [4] 的基础上证明了最大度 $\Delta \geq 10^{20}$, 且无孤立边的图，有至多 $(\Delta+300)$ 的邻点可区别无圈边色数. Ghandehari M 和 Hatami H 证明了最大度 $\Delta \geq 10^6$ 的简单图，其邻强边色数 $\chi'_{as}(G) \geq \Delta + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle}$. 在此基础上，本文得到了一个邻点可区别无圈边色数的一个新上界为 $(\Delta + 1 + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle})$. 文中考虑的图均为有限无向的简单图.

1.1 一些定义

定义 1.1[4] 对无孤立边的简单图 $G(V,E)$, 一个 k- 正常边染色 f 被称为 G 的 k- 邻强边染色，如果满足：对 $uv \in E(G)$, $S(u) \neq S(v)$, 其中 $S(u) = \{f(uv)|uv \in E(G)\}$. 简记为 $k-ASEC$, 且称 $\chi'_{as}(G) = \min\{k|k-ASEC\}$ 为 G 的邻强边色数.

定义 1.2[1] 图 $G(V,E)$ 的一个 k- 正常边染色 f 被称为 G 的无圈边染色，如果 G 中没有二色圈. G 的无圈边染色简记为： $k-AEC$, 且称 $\chi'_a(G) = \min\{k|k-AEC\}$ 为 G 的无圈边色数.

定义 1.3 图 $G(V,E)$ 的一个 k- 正常边染色 f 被称为邻点可区别无圈边染色，如果 G 中没有二色圈，且相邻点 u 和 v 关联边的色集合不同，其中 $uv \in E(G)$. 简记为 $k-AAEC$, 且称 $\chi'_{aa}(G) = \min\{k|k-AAEC\}$ 为 G 的邻点可区别无圈边色数.

显然，对无孤立边的简单图 $G(V,E)$, 邻点可区别无圈边色数 $\chi'_{aa}(G)$ 是存在的.

对最大度为 Δ 的图 G, 其邻强边染色需要至少 Δ 种颜色，如果 G 有相邻的最大度点，其邻强边色数至少为 $\Delta+1$. 所以，对 $|V(G)| \geq 3$ 的简单连通图 G, 有 $\chi'_{aa}(G) \geq \Delta$, 且当 G 有相邻的最大度点时， $\chi'_{aa}(G) \geq \Delta+1$.

* 国家自然科学基金 (10771091) 和甘肃省教委基金 (0604-05) 资助项目.
收稿日期：2007-04-10.

1.2 一些猜想和结论

猜想 1 对无孤立边的简单图 G, 有

$$\chi'_{aa}(G) \le \max\{\chi'_{as}(G), \chi'_{a}(G)\} + 1.$$

对图 G 而言，如果 G 有一个 $k_1 - ASEC$, 且有 $k_2 - AEC$. 当猜想 1 成立时， G 必有一个 $(\max\{k_1, k_2\} + 1) - AAEC$, 其中 k_1, k_2 分别为邻强边色数和无圈边色数. 所以，如果下面两个猜想正确，那么猜想 2 和猜想 3 肯定是正确的.

猜想 ASEC[4] 对点数 $|V(G)| \ge 3$ 的简单连通图 G, 若 $G \ne C_5$(5-circle), 则

$$\chi'_{as}(G) \le \Delta(G) + 2.$$

猜想 AEC[2] 对简单图 $G, \chi'_{a}(G) \le \Delta(G) + 2$.

猜想 2 对点数 $|V(G)| \ge 3$ 的简单连通图 G , 若 $G \ne C_5$(5-circle), 则

$$\chi'_{aa}(G) \le \Delta(G) + 3.$$

猜想 3 对点数 $|V(G)| \ge 3$ 的简单连通图 G, 若 $G \ne C_5$(5-circle), 则

$$\chi'_{aa}(G) \le \chi'_{as}(G) + 1.$$

引理 1 设 G 是一个简单图，且 $\triangle(G) \ge 10^6$, 那么 $\chi'_{as}(G) \le \triangle + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle}$.

引理 2[1] 存在常数 $c > 0$, 使得围长 $g(G) \ge c\triangle \log \triangle$ 时，有 $\chi'_{a}(G) \le \triangle + 2$.

基于上述引理，得到如下的定理 1.

定理 1 设 G 是一个简单图，且 $\Delta \ge 10^6$, 存在常数 $c = 80$, 使得 $g(G) \ge c\Delta \ln \Delta$ 时，有

$$\chi'_{aa}(G) \le \Delta + 1 + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle}.$$

在第 2 部分中，用概率方法给出定理 1 的证明.

2 定理 1 的证明

证明分三步，设图 G 的最大度为 Δ, 且令 $\Delta = d$.

1) 由引理 1 知，当图 G 的 $\triangle(G) \ge 10^6$ 时， $\chi'_{as}(G) \le \triangle + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle}$. 故先对 G 进行 $(\triangle + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle})$ 种色的邻点可区别边染色，称此染法为 f, 即 $f : E \to \{1, 2, \cdots, (\triangle + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle})\}$.

2) 用第 $(\triangle + 27\sqrt{\triangle \ln \triangle} + 1)$ 种颜色，对 G 的每一条边进行重新染色以 $\frac{1}{20d}$ 的概率，则原图中的边，未被重新着色的概率为 $(1 - \frac{1}{20d})$.

3) 证明图 G 存在邻点可区别的无圈边染色，即 $P(AAEC) > 0$.

为了保证 G 有邻点可区别的无圈边染色，需满足以下三个条件

(A) 染色是正常的，即没有两条相邻边染同一种颜色；

(B) 染色是邻点可取别的，即任何两个相邻点的关联边，色集合不同；

(C) 边染色是无圈的，即图 G 中没有一个圈的边正常 2- 染色 (任意圈至少有三色).

本证明用到 Lovász 局部引理的一般形式.

Lovász 局部引理 [3,5,6] 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是概率空间 Ω 中 n 个事件， $G=(V,E)$ 是 n 个点 $V=[1,n]$ 的图， $\forall i,\ i=1,2,\cdots,n$, 事件 A_i 与 $\{A_j:(i,j)\in E\}$ 相互独立．若存在 n 个常数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, $0<x_i<1$, 使得 $\forall i$, $\text{Prob}[A_i]<x_i\prod\limits_{(i,j)\in E}^{r}(1-x_j)$. 则 $\text{Prob}[\wedge\overline{A_i}]>0$.

为了满足上述条件 (A) 、 (B) 、 (C), 构造如下坏事件

(I) 对每对关联边 $A=\{e_1,e_2\}$, 令 E_A 为边 e_1 和 e_2 染成同色 $(\triangle+1+27\sqrt{\triangle\ln\triangle})$ 的事件.

(II) 对每对相邻点 u 和 v, $d(u)=d(v)$, 其中 $d(x)$ 是 x 点的度. 点 u 与 v 的色集合 $C(u)$ 与 $C(v)$ 中只有一种颜色不同, 记这两条边为 e_u 和 e_v, 当 e_u 和 e_v 同时被颜色 $(\triangle+27\sqrt{\triangle\ln\triangle}+1)$ 代替时，色集合相同，邻点不可区别，记此类坏事件为 E_B

(III) 对每个半单色圈 C, 它本身是双色圈 (不用新色 $(\triangle+1+27\sqrt{\triangle\ln\triangle})$ 代替) 的事件记为 E_c.

(IV) 对每一个半单色圈 D(D 中至少有一半颜色相同，一半颜色不同), 记事件 E_D 为 D 中不相同的那半颜色均被重新染色成，使 D 变成双色圈的事件.

如果坏事件 (I), (II), (III), (IV) 不发生是可能的，则称条件 (A), (B) 和 (C) 是满足的，即 G 存在邻点可区别的无圈边染色.

1) 构造相关图并计算相关事件数

构造图 H, 其结点为四种类型的所有事件，其中两个结点 E_x 和 E_y(其中每个 X,Y 要么表示一对关联的边，要么表示一对相邻点及其关联的边，或一个二色圈，或一个半单色圈) 相邻，当且仅当 X 和 Y 包含一条公共边．因为每个事件 E_X 的发生，仅依赖于 X 的边，所以 H 是上述事件的相关图．为了应用局部引理，需要估计每个事件发生的概率，并计算相关事件数，这些计算由如下引理给出，其证明见文献 [10].

引理 2.1

i) 对每个类型 (I) 的事件 E_A, $\text{Prob}[E_A]=\frac{1}{(20d)^2}$;

ii) 对每个类型 (II) 的事件 E_B , 其中每个 E_B 的点有 x 条边,

$$\text{Prob}[E_B]=\frac{1}{(20d)^2}\Big(1-\frac{1}{20d}\Big)^{2x-3}\le\frac{1}{(20d)^2};$$

iii) 对每个类型 (III) 的事件 E_C, 其中圈 C 的长为 y, $\text{Prob}[E_C]=(1-\frac{1}{20d})^y\le \mathrm{e}^{-\frac{y}{20d}}$;

iv) 对每个类型 (IV) 的事件 E_D 其中圈 D 的长度为 $2z$,

$$\text{Prob}[E_D]=\Big(\frac{1}{20d}\Big)^z\Big(1-\frac{1}{20d}\Big)^z\le\frac{2}{(20d)^z}.$$

引理 2.2 对给定的边 e, 有下列事实成立.

i) 至多有 $2d$ 条边与 e 关联;

ii) 至多有 $2d$ 个 B 包含 e(其中 B 是一对相邻点及其关联边构成的双星图);

iii) 至多有 d 个二色圈包含 e;

iv) 至多有 $2d^{k-1}$ 个长度为 $2k$ 的半单色圈包含 e.

由引理 2 知，对每个事件 E_X(X 包含 x 条边), 至多与 $2xd$ 个类型 (I) 事件相关，至多与 $2xd$ 个类型 (II) 事件相关，至多与 xd 个类型 (III) 事件相关，至多与 $2xd^{k-1}$ 个类型 (IV) 的 E_D 事件相关．其中 D 的长度为 $2k$, $k\ge2$.

2) 设定常数并证明不等式

给定 x_i, $i=1,2,3,4$ 分别为 $\frac{1}{200d^2}$, $\frac{1}{200d^2}$, $\frac{1}{100d^2}$, $\frac{1}{(2d)^k}$, 是依次与 (I), (II), (III) 和 (IV) 中的事件相关的常数. 为了证明坏事件不发生的概率为正, 只需证明以下四个不等式成立

$$\begin{aligned}\frac{1}{400d^2} \le \frac{1}{200d^2}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{4d}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{4d-2}\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{2d}&\\ \cdot\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{4d^{k-1}},&\qquad(1)\\ \frac{1}{400d^2} \le \frac{1}{200d^2}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{2xd}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{(2d-1)x}\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{xd}&\\ \cdot\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{2xd^{k-1}},&\qquad(2)\\ \mathrm{e}^{-\frac{y}{20d}} \le \frac{1}{100d^2}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{2yd}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{(2d-1)y}\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{yd}&\\ \cdot\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{2yd^{k-1}},\quad \forall y\ge 4,&\qquad(3)\\ \frac{2}{(20d)^z} \le \frac{1}{(2d)^z}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{4zd}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{(4d-2)z}\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{2zd}&\\ \cdot\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{4zd^{k-1}},\quad \forall z\ge 2.&\qquad(4)\end{aligned}$$

当 $x>2$ 时, 如果 (2) 式成立, 则 (1) 式自然成立, 故只需证明 (2) 成立.

由不等式 $(1-\frac{1}{x})^x \ge \frac{1}{4}$, 对任实数 $x>2$ 均成立, 得到

$$\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{2xd^{k-1}} \ge \prod_k\Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{x}{d2^{k-1}}} = \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{x}{d}\sum\limits_k(\frac{1}{2^{k-1}})}.$$

因为 $2k\ge g(G)\ge 80\Delta\log\Delta\ge 20$, 所以 $k\ge 10$, 则 $\sum\limits_k\big(\frac{1}{2^{k-1}}\big)\le\frac{1}{2^{10}}$, 那么

$$\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{2\alpha d^{k-1}} \ge \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{\alpha}{2^{10}d}}, \qquad(5)$$

同理得到

$$\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{2\alpha d} \ge \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{\alpha}{100d}}, \qquad(6)$$

$$\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{\alpha d} \ge \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\frac{\alpha}{100d}}, \qquad(7)$$

合并 (5)–(7), 可得

$$\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{2\alpha d}\Big(1-\frac{1}{200d^2}\Big)^{\alpha(2d-1)}\Big(1-\frac{1}{100d^2}\Big)^{\alpha d}\prod_k\Big(1-\frac{1}{(2d)^k}\Big)^{2\alpha d^{k-1}} \ge \Big(\frac{1}{2}\Big)^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{\alpha}{d}}.$$

当 $\alpha = x$, 由于 G 是简单图， $0 < x < 2\Delta = 2d$

$$\left(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9}\right)\frac{x}{d} < 1, \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{x}{d}} \geq \frac{1}{2}.$$

令不等式 (2) 的右边为 $(*)$, 则

$$(*) \geq \frac{1}{200d^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{x}{d}} \geq \frac{1}{400d^2}.$$

故不等式 (2) 成立.

对不等式 (1), 令 $x = 2$, 就会成立.

下证明不等式 (4), 令 $\alpha = 2z$, 不等式 (4) 的右边为 $(**)$, 那么

$$(**) \geq \frac{1}{(2d)^z}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{2z}{d}} = \frac{10^z}{(20d)^z}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{3}{25}+\frac{1}{2^8})\frac{z}{d}} \geq \frac{1}{(20d)^z}2^{(3-(\frac{3}{25}+\frac{1}{2^8})\frac{1}{d})z} \geq \frac{2}{20d^z}.$$

不等式 (4) 成立.

要证明不等式 (3) , 只需证明

$$\mathrm{e}^{-\frac{y}{20d}} \leq \frac{1}{100d^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{y}{d}}.$$

由于 $(\frac{1}{2})^{(\frac{3}{50}+\frac{1}{2^9})\frac{y}{d}} < (\frac{1}{2})^{\frac{y}{20d}}$, 故只需证明 $\mathrm{e}^{-\frac{y}{20d}} \leq \frac{1}{100d^2}(\frac{1}{2})^{\frac{y}{20d}}$.

而上述不等式，当 $y \geq 80d\log d \geq 40d\frac{\log(100d^2)}{\log(\frac{e}{2})}$ 时是成立的.

因此，当 $\triangle(G) \geq 10^6$ 时，存在常数 $c = 80$, 使得 $g(G) \geq c\Delta\ln\Delta$ 时， G 有至多 $(\triangle+1+27\sqrt[2]{\triangle\ln\triangle})$ 色的邻点可区别无圈边染色.

参 考 文 献

[1] Alon N, McDiarmid C J H and Reed B A. Acyclic coloring of graphs. *Random Structures and Algorithms*, 1991, **2**: 277–288.

[2] Alon N, Sudakov B, Zaks A. Acyclic edge colorings of graphs. 2002 *John Wiley & Sons, Inc. J. Graph Theory*, 2001, **37**(3): 157–167.

[3] Hatami H. Δ+300 is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number. *J. of Combinatorial Theory* (Series B), 2005, **95**: 246–256.

[4] Zhang Z F, Liu L Z, Wang J F. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**: 623–626.

[5] Molloy M, Reed B. Graph Coloring and the Probabilistic Method. Berlin, Spring, 2002.

[6] Alon N, Spencer J H. The Probabilistic Method. New York, Wiley, 1992.

[7] Michael Krivelevich, Asaf Nachmias. Coloring complete bipartite graphs from random lists. *Random Structures and Algorithms*, 2006, **29**: 436–449.

[8] Alon N, Sudakov B, Zaks A. Acyclic edge colorings of graphs. 2002 *John Wiley & Sons, Inc. J. Graph Theory*, 2001, **37**(3): 157–167.

[9] Alon N, Zaks A. Algorithmic aspects of acyclic edge colorings. *Algorithmica*, 2002, **32**: 611–614.

A BOUND OF ADJACENT VERTEX-DISTINGUISHING ACYCLIC EDGE COLORING OF GRAPHS

QIANG Huiying LI Muchun ZHANG Zhongfu

(*College of Mathematics, Physics and software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070)

Abstract A proper edge coloring of the graph G is called adjacent vertex distinguishing acyclic edge coloring, if there is no 2-colored cycle in G, and the coloring set of edges incident to u is not equal to the coloring set of edges incident to v, where $uv \in E(G)$. In this paper, a new upper bound of adjacent vertex distinguishing acyclic edge coloring of the graph G with no isolated edges is obtained by the way of probability.

Key words Adjacent vertex distinguishing acyclic edge coloring of graphs, adjacent strong edge coloring of graphs, acyclic edge coloring of graphs, Lovász local lemma.

会议信息

第六届偏最小二乘及相关方法国际大会 (The 6th International Conference on Partial Least Squares and Related Methods) 将于 2009 年 9 月 4 日至 9 月 7 日在北京航空航天大学召开. 偏最小二乘及相关方法国际大会于 1999 年发起, 迄今已在欧洲成功举办了 5 届, 对于推动偏最小二乘在管理、工程及生命科学等领域的研究与应用起到了重要的作用. 本届会议诚邀各国偏最小二乘及相关领域的专家学者相会于北京, 共同交流偏最小二乘及相关方法的新成果, 探讨其发展趋势及在实际应用中面临的问题与挑战.

此次会议由北京航空航天大学承办, 会议的语言为英语. 本届会议的最终论文将收录在正式出版的会议论文集中; 论文集将送交 ISTP 检索; 本届会议还将推荐一部分优秀论文到国际期刊 Computational Statistics and Data Analysis 进行评审及发表.

联系人：陈莉

联系地址：北京航空航天大学经济管理学院 (100083)

联系电话： 010-82338804 15810945304

传真： 010-82338804

E-mail: info@pls09. org

会议网站： http://www. pls09. org