

一类稳定的连续时间广义预测控制^{*}

刘 芳

(滨州医学院卫生管理学院, 山东 264003)

刘 晓 华

(鲁东大学数学与信息学院, 山东 264025)

摘要 引入无穷时域的 1-范数性能指标, 通过施加新的终端等式约束确定出无穷时域性能指标的一个上界, 将不可解的优化问题转化为可解的优化问题, 从而提出保证连续时间广义预测控制闭环稳定性的准无穷时域方法. 仿真例子证明了算法的有效性.

关键词 连续时间系统, 广义预测控制, 准无穷时域, 1-范数性能指标, 稳定性.

MR(2000) 主题分类号 93C40

1 引 言

预测控制由于采用多步预测、滚动优化和反馈校正等控制策略, 控制效果好、鲁棒性强, 成为当前自动控制领域中重要的研究课题^[1,2]. 由于预测控制通常是通过反复在线求解一个带约束的有限时域优化问题来实现的, 其闭环描述很难得到, 因此, 对预测控制系统的闭环稳定性的研究十分困难. 文 [3] 指出有限时域开环最优不能保证系统的闭环稳定性, 并采用无穷时域的性能指标, 通过保证最优目标函数值在滚动优化过程中的单调递减性, 获得稳定的预测控制系统. 然而, 使用这个方法的实际控制律的求解过程中, 无穷时域的目标函数值只能近似得到 (即采用足够长的时域近似), 且计算量非常大. 文 [4] 为解决算法计算量大的问题, 通过确定无穷时域性能指标的一个上界得到了原优化问题一个次优解, 给出了准无穷时域控制方法. 文 [5] 基于广义预测控制 (GPC)^[6], 在无穷时域的二次性能指标下, 利用线性有限脉冲响应 (FIR) 模型的特点, 将无穷时域的目标函数等价于有限时域优化问题. 为减少文 [5] 的计算量, 文 [7] 在 GPC 中采用 1-范数的无穷时域性能指标, 通过确定无穷时域目标函数的一个上界, 给出了一种保证广义预测控制闭环稳定性的准无穷时域控制方法.

文 [5, 7] 的结果都是针对离散系统的, 关于连续时间广义预测控制 (CGPC)^[8] 闭环稳定性的研究较少^[9]. 作为 GPC 在连续时间的推广, CGPC 不但具有 GPC 的许多优点, 而且对外界扰动和参数摄动有更强的鲁棒性和自适应能力^[10]. 文 [9] 用终端状态约束和终端状态加权, 给出了一种保证 CGPC 系统的稳定性的方法.

本文针对连续时间的广义预测控制, 给出了一种研究其闭环系统稳定性的新方法. 采用无穷时域的 1-范数性能指标, 通过在预测时域后引入不影响控制目标的等式约束, 确定

^{*} 国家自然科学基金 (60774016) 资助课题.

收稿日期: 2006-12-06.

出无穷时域性能指标的一个上界,证明了最小化这个性能指标的上界得到的控制律可以使 CGPC 的闭环系统达到稳定. 通过仿真例子验证算法的有效性.

2 连续时间的广义预测控制

考虑如下的连续时间线性模型^[8]

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s) + \frac{C(s)}{A(s)}V(s), \quad (1)$$

其中 $Y(s), U(s), V(s)$ 分别是系统的输出、控制输入和干扰输入, $A(s), B(s), C(s)$ 是关于拉氏算子 s 的多项式, $C(s)$ 则是稳定的多项式, 且分别定义如下

$$A(s) = s^{na} + a_1s^{na-1} + \cdots + a_{na-1}s + a_{na}, \quad (2)$$

$$B(s) = s^{nb} + b_1s^{nb-1} + \cdots + b_{nb-1}s + b_{nb}, \quad (3)$$

$$C(s) = s^{nc} + c_1s^{nc-1} + \cdots + c_{nc-1}s + c_{nc}. \quad (4)$$

考虑如下形式的性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \{[y^*(t+T) - w^*(t+T)]^2 + \lambda u^*(t+T)^2\} dT, \quad (5)$$

其中 $y^*(t+T)$, $u^*(t+T)$, $w^*(t+T)$ 分别为以截断的泰勒级数展开式出现的预测输出、预测输入和参考输出, 且有 $y^*(t+T) = T_{Ny}Y$, $u^*(t+T) = T_{Nu}u$, $w^*(t+T) = T_{Ny}W$, 其中

$$T_{Ny} = \left[1 \ T \ \frac{T^2}{2!} \ \cdots \ \frac{T^{Ny}}{Ny!}\right], \quad T_{Nu} = \left[1 \ T \ \frac{T^2}{2!} \ \cdots \ \frac{T^{Nu}}{Nu!}\right], \quad W = [w(t) \ 0 \ \cdots \ 0].$$

最小化性能指标 (5) 可得最优控制律

$$u = K(W - y^0), \quad (6)$$

其中

$$K = (H^T T_y H + T_u)^{-1} H^T T_y, \quad T_y = \int_{t_0}^{t_f} [T_{Ny}^T T_{Ny}] dT, \quad T_u = \int_{t_0}^{t_f} [T_{Nu}^T T_{Nu}] dT, \quad (7)$$

且

$$y^0 = [y(t) \ y_1^0(t) \ \cdots \ y_{Ny}^0(t)], \quad (8)$$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & h_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_1 \\ h_{Ny} & \cdots & \cdots & h_{(Ny-Nu)} & \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中 h_k 为开环系统 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 的 Markov 参数.

基于后退时域策略的算法, 将预测输入在 $T = 0$ 时的值 $u^*(t+0) = u(t)$ 作为控制输入, 则得到最优控制律为

$$u(t) = k(w - y^0), \quad (10)$$

其中 k 为矩阵 K 的第一行.

若将 $A(s)$ 分成稳定和不稳定的两部分, $A(s) = \bar{A}(s)\tilde{A}(s)$, 其中 $\bar{A}(s)$ 为根全部在复平面左半开平面的多项式, $\tilde{A}(s)$ 则为根在复平面右半闭平面的多项式, 且它们分别为

$$\begin{aligned} \bar{A}(s) &= s^{n\bar{a}} + \bar{a}_1 s^{n\bar{a}-1} + \cdots + \bar{a}_{n\bar{a}-1} s + \bar{a}_{n\bar{a}}, \\ \tilde{A}(s) &= s^{n\tilde{a}} + \tilde{a}_1 s^{n\tilde{a}-1} + \cdots + \tilde{a}_{n\tilde{a}-1} s + \tilde{a}_{n\tilde{a}}, \end{aligned} \quad (11)$$

则可以定义预测时域 $Ny = \max[Nu + nb - 1, n\bar{a}]$, 同时假设 $u(t+T) = 0, T \geq Ny$, 即当系统达到稳定后系统的输入为零. 由此还可得

$$\tilde{Y}(s) = \frac{B(s)}{\tilde{A}(s)}U(s) + \frac{C(s)}{\tilde{A}(s)}V(s) = \bar{A}(s)Y(s), \quad (12)$$

而 \tilde{Y} 的输出预测为

$$\tilde{y}(t+T) = T_{Ny}\tilde{H}u + T_{Ny}\tilde{y}^0, \quad (13)$$

其中

$$\tilde{y}^0 = [\tilde{y}(t) \quad \tilde{y}_1^0(t) \quad \cdots \quad \tilde{y}_{Ny}^0(t)], \quad (14)$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{h}_2 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_0 & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \tilde{h}_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_{Ny} & \cdots & \cdots & \tilde{h}_{(Ny-Nu)} & \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中 \tilde{h}_k 为开环系统 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 的 Markov 系数.

3 稳定的连续时间广义预测控制

3.1 准无穷时域控制

定义无穷时域的 1-范数性能指标如下

$$J^\infty = \int_0^\infty [|e(t+T)| + \lambda|u(t+T)|]dT. \quad (16)$$

其中 λ 为控制加权, $e(t+T)$ 为跟踪误差且定义为 $e(t+T) = y(t+T) - w(t+T)$, 其中对于 $t \geq 0$ 有 $w(t) = w_t$ 且 w_t 为时刻 t 的设定点. 与定义在区间 $[t_0, t_f]$ 上的有限时域的二次性能

指标 (5) 式相比, (16) 是定义在区间 $[0, \infty)$ 上的无穷时域的 1-范数性能指标. 由于性能指标的上限是无穷, 此问题是不可解的. 为此引入终端等式约束为

$$\tilde{y}(t+T) = \bar{A}(0)w(t+T), \quad \forall T \geq Ny, \quad (17)$$

文 [5] 为解决含有无穷时域性能指标的优化问题, 引入了终端等式约束, 并对其进行了离散系统的状态空间实现, 将无穷时域的目标函数等价于有限时域优化问题, 使问题得到解决. 由于连续系统与离散系统不同, 我们要引入新的终端等式约束, 通过对其进行连续系统的状态空间实现, 将不可解的优化问题进行转化. 由 (12) 式可知

$$\tilde{y}(t+T) = a[y_0(t+T) \quad y_1(t+T) \quad \cdots \quad y_{n\bar{a}}(t+T)]^T, \quad (18)$$

其中 $a = [\bar{a}_{n\bar{a}} \quad \bar{a}_{n\bar{a}-1} \quad \cdots \quad \bar{a}_1 \quad 1]$. 将 (17) 式代入 (18) 式中可得

$$a[e(t+T) \quad e_1(t+T) \quad \cdots \quad e_{n\bar{a}}(t+T)]^T = 0, \quad \forall T \geq Ny, \quad (19)$$

令 $z = [e(t+T) \quad e_1(t+T) \quad \cdots \quad e_{n\bar{a}-1}(t+T)]^T$, $\Phi = \begin{pmatrix} O_{n\bar{a}-1,1} & I_{n\bar{a}-1} \\ -\bar{a}_{n\bar{a}} & -\bar{a}_{n\bar{a}-1} & \cdots & -\bar{a}_1 \end{pmatrix}$, 其中对于任给的 k, l , $O_{k \times l}$ 表示了一个 $k \times l$ 维的零矩阵. 根据 (19) 式写出它的状态空间表达式

$$\dot{z} = \Phi z, \quad e(t+T) = Lz, \quad (20)$$

其中 $L = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$. 显然, Φ 为稳定且可逆的矩阵. 因此, 就有 $z = e^{\Phi T} z(t+Ny)$ 且 $\lim_{T \rightarrow \infty} z = 0, T \geq Ny$. 于是

$$\lambda \int_{Ny}^{\infty} |e(t+T)| dT = \lambda \int_{Ny}^{\infty} |L\Phi^{-1}z(t+T)| dT \leq \lambda |L\Phi^{-1}| |z(t+Ny)|, \quad (21)$$

令 $\alpha = \lambda |L\Phi^{-1}|$. 因此

$$J^\infty \leq \int_0^{Ny} [|e(t+T)| + \lambda |u(t+T)|] dT + \lambda \alpha |z(t+Ny)|, \quad (22)$$

则

$$J = \int_0^{Ny} [|e(t+T)| + \lambda |u(t+T)|] dT + \lambda \alpha |z(t+Ny)|, \quad (23)$$

确定了无穷时域性能指标的一个上界.

3.2 闭环稳定性

定理 1 对于采用无穷时域的 1-范数性能指标 (16) 的 CGPC, 最小化 J 所得到的控制律可以使 CGPC 的闭环系统达到稳定.

证 假设

$$S_i^j = \int_i^j |e(t+T)| dT, \quad j \geq i, \quad (24)$$

则序列 S_0^∞ 可被分成 $S_0^\infty = S_0^{Ny} + S_{Ny}^\infty$, 其中 $S_{Ny}^\infty \leq \lambda \alpha |z(t+Ny)|$. 于是有

$$S_0^{Ny} \leq S_0^\infty = S_0^{Ny} + S_{Ny}^\infty \leq S_0^{Ny} + \lambda \alpha |z(t+Ny)|, \quad (25)$$

因此, 确定了无穷时域的 1-范数性能指标的一个下界和一个上界

$$\begin{aligned} J^- &= \int_0^{Ny} [|e(t+T)| + \lambda|u(t+T)|]dT, \\ J^+ &= \int_0^{Ny} [|e(t+T)| + \lambda|u(t+T)|]dT + \lambda\alpha|z(t+Ny)|, \end{aligned} \quad (26)$$

若 $u^{-opt}, u^{+opt}, u^{opt}$ 分别为 J^-, J^+, J^∞ 的极小值点, 则有

$$J^-(u^{-opt}) \leq J^-(u^{opt}) \leq J^\infty(u^{opt}) \leq J^\infty(u^{+opt}) \leq J^+(u^{+opt}), \quad (27)$$

由上式可知, 最小化性能指标 J 所得到的控制律可以使 CGPC 达到闭环稳定性^[7].

3.3 终端等式约束

定理 2 对于采用无穷时域的 1-范数性能指标 (16) 的 CGPC, 终端等式约束 (17) 不影响系统的控制目标.

证 这里将分别在系统稳定和不稳定的情况下进行讨论.

如果系统是稳定的, 则有 $\bar{A}(s) = A(s)$, 因此 $\tilde{A}(s) = 1$ 且 $n\tilde{a} = 0$. 此时 (12) 式就变成

$$\tilde{Y}(s) = B(s)U(s) + C(s)V(s) = \bar{A}(s)Y(s), \quad (28)$$

此时终端等式约束就变为

$$\tilde{y}(t+T) = a[w_t \ 0 \ \cdots \ 0]^T = \bar{A}(0)w(t+T). \quad (29)$$

若这个约束条件成立, 则 CGPC 的无穷时域性能指标就可转化为可解的性能指标, 并且保证了 $y(t+T) \rightarrow w(t) = w_t, t \rightarrow \infty$. 若这个约束条件不能满足, 则会导致一个非零的稳态误差, 从而得到一个无界的性能指标. 因此, 最小化性能指标 (23) 而得到的控制序列一定满足终端等式约束.

如果系统是不稳定的, 则 \tilde{y} 描述了系统不稳定部分的输出, 并且终端等式约束说明

i) 系统不稳定的部分一定在时间 $T < Ny$ 时达到稳态;

ii) 在时刻 $t + Ny$ 的 \tilde{y} 所导致的稳态误差要求保证 $y(t+T) \rightarrow w(t) = w_t, t \rightarrow \infty$.

若条件 i) 不满足, 则系统不稳定的部分在 $t + Ny$ 后不可控, 因为我们已经假设 $u(t+T) = 0, T \geq Ny$. 另外, 若条件 ii) 不满足则预测的稳态就会远离设定点, 就会导致无界的性能指标. 因此, 若最优控制有足够的自由度满足 i) 和 ii), 则无穷性能指标最小的控制方案必须满足终端等式约束. 若没有足够的自由度满足终端等式约束, 则性能指标是无界的且得到不稳定的结果.

4 仿真示例

设系统方程为

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s(s^2+1)}, \quad C(s) = 0.2s^2 + s + 1,$$

给定跟踪目标设为 $w_t = 1.4$, 采用无穷时域的性能指标

$$J^\infty = \int_0^\infty [|e(t+T)| + 0.1|u(t+T)|]dT,$$

设定当前时刻 $t = 0$, 当 $Nu = 6$ 时由预测时域的定义可知 $Ny = 6$, 则得到系统稳定的仿真曲线如图 1 所示.

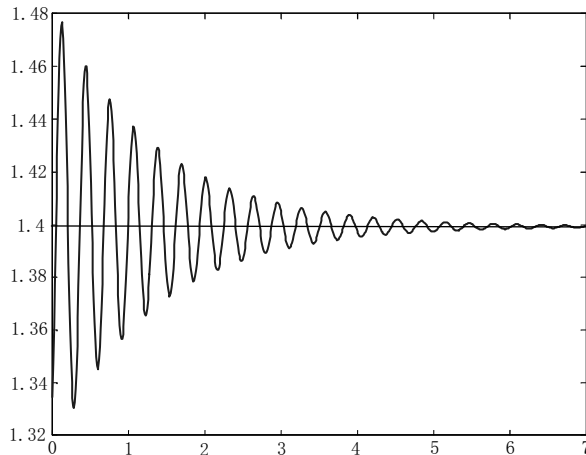


图 1 参考信号和闭环系统输出

仿真结果表明: 采用无穷时域 1-范数性能指标的 CGPC, 恰当的选择预测时域和控制时域后, 可确定出无穷时域性能指标的上界, 进而得到的控制律使系统的输出曲线能够跟踪我们的设定目标, 且输出与设定值之间的误差会随着时间的推移趋于零, 也就是说此闭环系统是渐近稳定的.

5 总 结

本文针对连续时间的广义预测控制, 研究了其闭环系统的稳定性. 引入无穷时域的 1-范数性能指标, 通过施加终端等式约束确定出无穷时域性能指标的一个上界, 将无穷时域性能指标的优化问题转化为有限时域的优化问题. 定理 1 和定理 2 分别证明了最小化无穷时域性能指标的上界得到的控制律, 可以保证 CGPC 的闭环稳定性且满足终端等式约束. 仿真证明了算法的有效性.

参 考 文 献

- [1] Huang B, Tamayo E C. Model validation for industrial model predictive control systems. *Comput. Chem. Eng.*, 2000, **5**: 2315–2327.
- [2] Morari M, Lee J H. Model predictive control: Past, present and future. *Comput. Chem. Eng.*, 1999, **23**: 667–682.

- [3] Bitmead R R, Gevers M, Wertz V. Adaptive Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- [4] Chen H, Allgower F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 1998, **14**(10): 1205–1217.
- [5] Scokaert Pierre O M. Infinite horizon generalized predictive control. *Int. J. Control*, 1997, **66**(1): 161–175.
- [6] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control part 1 and 2. *Automatica*, 1987, **23**: 137–160.
- [7] Megias D, Serrano J, Prada C de. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. *Journal of Process Control*, 2002, **12**: 495–505.
- [8] Demircioglu H, Gawthrop P J. Continuous time generalized predictive control. *Automatica*, 1991, **27**: 55–74.
- [9] Demircioglu H, Ercan Karasu. Generalized predictive control-A practical application and comparison of discrete and continuous time versions. *IEEE Control Systems Magazine*, 2000, **10**: 36–47.
- [10] Demircioglu H, Clarke D W. CGPG with guaranteed stability properties. *IEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 1992, **139**(4): 371–380.

A STABLE CONTINUOUS-TIME GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL

LIU Fang

(College of Health Management, Binzhou Medical University, Shandong 264003)

LIU Xiaohua

(School of Mathematics and Information, Ludong University, Shandong 264025)

Abstract The closed-loop stability of the continuous-time generalized predictive control is considered, by using the infinite horizon control. The 1-norm cost function with infinite horizon is imported. By inflicting the new end-point equality constraints, an upper bound of the cost function with infinite horizon is given, and the unsolvable optimal problem can be transformed into a solvable optimal problem. Then the quasi-infinite horizon approach which can guarantee the closed loop stability of generalized predictive control is presented. Simulation result shows the validity of the proposed control.

Key words Continuous-time system, generalized predictive control, quasi-infinite horizon, 1-norm cost function, stability.