第 31 卷 第 5 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2008

关于双奇异平面地图的计数 *

龙述德
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京 100875)
(重庆文理学院数学与计算机科学系，重庆 402160)
(E-mail: longshude@163.com)

蔡俊亮
(北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京 100875)
(E-mail: caijunliang@bnu.edu.cn)

摘　要　本文讨论了带根双奇异平面地图的计数问题，提供了以根面次、度和内面数为参数及以根面次、奇异边数和自环数为参数的计数函数所满足的计数方程，并且导出了所有的计数显式.

关键词　双奇异平面地图；计数函数；计数方程
MR(2000) 主题分类　05A15; 05C30
中图分类　O157.5

1　引言

带根地图的概念是 Tutte 首次引进的．他在二十世纪六十年代初发表的一系列文章 [1−4] 奠定了地图计数理论的基础．从那时起，许多人发展了该理论，诸如：Arqués[5], Brown[6,7], Mullin et al.[8], Tutte[9], Walsh et al.[10], Bender et al.[11−15], Gao[16,17] 和刘彦佩 [18,19]. 2000 年，任韩和刘彦佩在 [20] 中，给出了在球面上的带根双奇异地图以根点次、奇异边数和自环数为参数的计数函数所满足的计数方程及计数显式.

本文主要研究带根双奇异平面地图的计数问题，给出了以根面次，度 (边数) 和内面数为参数及以根面次、奇异边数和自环数为参数的计数函数所满足的计数方程，并且导出了所有的计数显式，文中未加解释而采用的概念、术语及符号请参见 [18].

一个地图即为图在某个曲面上的一个 2- 包腔嵌入．本文所讨论的平面地图，自然就是指可平面图在平面或球面上的一个 2- 包腔嵌入，当然这里的地图都为连通图．一个平面地图 M, 常更具体地记为 $M=(V,E)$, 其中 $V=V(M)$ 为地图 M 的顶点集，$E=E(M)$ 为地图 M 的边集合或 $M=(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, 其中 $\mathcal{X}$ 为一个四元胞腔集， $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个置换．本文允许有平凡图，即节点地图的出现，它是作为地图 $M=(V,E)$, 当 $V=\vartheta, E=\emptyset$ 时的特殊情形．如果将一个平面地图中的一条边指定一个方向，那么该边称为根边，根边的始端称为根点，与根边关联的一个面称为根面，通常这个面为无限

本文 2008 年 3 月 15 日收到．2008 年 8 月 2 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10271017)(2002) 和北京师范大学校级重点学科基金资助项目.

面．一个图的根点，根边和根面统称为该图的根元素．凡定义了根元素的平面地图称为带根平面地图．

一条边若只在一个面的边界上则称之为奇异边．显然可平面地图的一条边是奇异边当且仅当它是一条割边．一个地图若它的边不是自环就是奇异边，则称之为双奇异地图．

设 $\mathcal{M}$ 是一些地图的集合，定义 $\mathcal{M}$ 的计数函数如下：

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}}(x,y,z) &= \sum_{M\in\mathcal{M}} x^{m(M)}y^{n(M)}z^{s(M)}, \\ \widetilde{f}_{\mathcal{M}}(x,y,z) &= \sum_{U\in\mathcal{M}} x^{m(U)}y^{p(U)}z^{q(U)}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $m(M),n(M)$ 和 $s(M)$ 分别为 M 的根面次，度和内面数，而 $m(U),p(U)$ 和 $q(U)$ 分别为 U 的根面次，奇异边数和自环数．

另外，我们还采用 $\mathcal{M}$ 的一些其它的计数函数：

$$\begin{aligned} &g_{\mathcal{M}}(x,y) = \sum_{M\in M} x^{m(M)}y^{n(M)}, \qquad h_{\mathcal{M}}(y,z) = \sum_{M\in\mathcal{M}} y^{n(M)}z^{s(M)}, \\ &H_{\mathcal{M}}(y) = \sum_{M\in\mathcal{M}} y^{n(M)}, \qquad \widetilde{h}_{\mathcal{M}}(y,z) = \sum_{U\in\mathcal{M}} y^{p(U)}z^{q(U)}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $m(M),n(M),s(M),p(U)$ 和 $q(U)$ 与 (1) 式相同．

显然，

$$\begin{aligned} &g_{\mathcal{M}}(x,y) = f_{\mathcal{M}}(x,y,1), \qquad h_{\mathcal{M}}(y,z) = f_{\mathcal{M}}(1,y,z), \\ &H_{\mathcal{M}}(y) = h_{\mathcal{M}}(y,1) = g_{\mathcal{M}}(1,y) = f_{\mathcal{M}}(1,y,1), \\ &\widetilde{h}_{\mathcal{M}}(y,z) = \widetilde{f}_{\mathcal{M}}(1,y,z). \end{aligned} \tag{3}$$

我们定义地图上的两个运算：

对任意两个地图 $M_1,M_2\in\mathcal{M}$, 它们的根分别为 $r_1=r(M_1)$ 和 $r_2=r(M_2)$, 若地图

$$M = M_1\cup M_2$$

使得 $M_1\cap M_2 = v$ 且

$$v = v_{r_1} = v_{r_2}.$$

并规定 M 与 M_1 有相同的根、根节点和根边，但它的根面为 M_1 和 M_2 的根面 $f_r(M_1)$ 和 $f_r(M_2)$ 的合成，则称这种从 M_1 和 M_2 到 M 的运算为 $1v$- 加法，简记为

$$M = M_1 \dot{+} M_2,$$

且 M 称为它们的 $1v$- 和．进而，对任意两个地图的集合 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$, 集合

$$\mathcal{M}_1\odot\mathcal{M}_2 = \{M_1\dot{+}M_2 \mid M_1\in\mathcal{M}_1, M_2\in\mathcal{M}_2\}$$

被称为 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的 $1v$- 积，其中的运算称为 $1v$- 乘．

二地图集 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的笛卡尔积定义为

$$\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2 = \{(M_1,M_2)\mid M_1\in\mathcal{M}_1, M_2\in\mathcal{M}_2\},$$

其中规定 $(M_1,M_2)=(M_2,M_1)$.

下面我们讨论双奇异平面地图的计数问题．

2 函数方程

在这节我们将建立双奇异平面地图的计数函数所满足的函数方程.

令 $\mathfrak{U}$ 为所有带根双奇异平面地图的集合，将带根双奇异平面地图分成三类：$\mathfrak{U}_0 = \{\vartheta\}$，$\mathfrak{U}_1 = \{U \in \mathfrak{U} \mid e_r(U)$ 为自环 $\}$，$\mathfrak{U}_2 = \{U \in \mathfrak{U} \mid e_r(U)$ 为奇异边 $\}$.

引理 1 令 $\mathfrak{U}_{<1>} = \{U - a \mid U \in \mathfrak{U}_1,\ a$ 为 U 的根边 $\}$, 则

$$\mathfrak{U}_{<1>} = \mathfrak{U} \odot \mathfrak{U}, \tag{4}$$

其中 $\odot$ 表示 $1v$- 积.

证 对任何 $U \in \mathfrak{U}_{<1>}$, 存在 $U' \in \mathfrak{U}_1$ 使得 $U = U' - a'$, a' 为 U' 的根边. 由 a' 为自环可知，存在 $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ 使得 $U = U_1 \dotplus U_2$, 其中 U_1 为 U' 在 a' 内部的子地图，而 U_2 为 U' 在 a' 外部的子地图， $\dotplus$ 为 $1v$- 和. 从而， $U \in \mathfrak{U} \odot \mathfrak{U}$, 其中 $\odot$ 为 $1v$- 积.

反之，对任何 $U = (\mathcal{X}, \mathcal{J}) \in \mathfrak{U} \odot \mathfrak{U}$, 则存在 $U_i = (\mathcal{X}_i, \mathcal{J}_i) \in \mathfrak{U}\ (i = 1, 2)$, 使得 $U = U_1 \dotplus U_2$. 现在可以唯一地构造地图 $U' = (\mathcal{X}', \mathcal{J}')$, 使得 $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + Kr'$, 且 $\mathcal{J}'$ 仅在根节点

$$v_{r'} = (r', r_1, \mathcal{J}_1 r_1, \cdots, \mathcal{J}_1^{m(U_1)-1} r_1, \alpha\beta r', r_2, \mathcal{J}_2 r_2, \cdots, \mathcal{J}_2^{m(U_2)-1} r_2)$$

处与 $\mathcal{J}$ 不同,其中 $m(U_1)$ 和 $m(U_2)$ 分别为 U_1 和 U_2 的根点次. 显然, $U = U' - a'$, $a' = Kr'$. 从而， $U \in \mathfrak{U}_{<1>}$. 证毕.

引理 2 令 $\mathfrak{U}_{<2>} = \{U - a \mid U \in \mathfrak{U}_2, a$ 为 U 的根边 $\}$, 则

$$\mathfrak{U}_{<2>} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}, \tag{5}$$

其中 $\times$ 表示笛卡尔积.

证 设 $U \in \mathfrak{U}_{<2>}$, 则存在 $U' \in \mathfrak{U}_2$, 使得 $U = U' - a'$, 其中 a' 为 U' 的根边. 又因为 a' 为奇异边，所以存在 $U_1, U_2 \in U$, 使 $U = U_1 + U_2$. 从而， $U \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$, 其中 $\times$ 为笛卡尔积.

反之，设 $U = U_1 + U_2 \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$, 且 $U_i = (\mathcal{X}_i, \mathcal{J}_i)\ (i = 1, 2)$, 则我们可通过添加一条边 $Kr' = a'$ 得一地图 $U' = (\mathcal{X}', \mathcal{J}')$, 使 $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + Kr'$ 且 $\mathcal{J}'$ 仅在节点

$$v_{r'} = (r', r_1, \mathcal{J}_1 r_1, \cdots, \mathcal{J}_1^{m(U_1)-1} r_1),$$
$$v_{\beta r'} = (\alpha\beta r', r_2, \mathcal{J}_2 r_2, \cdots, \mathcal{J}_2^{m(U_2)-1} r_2)$$

处与 $\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{J}_2$ 不同. 显然， a' 是 U' 的一条奇异边，且 $U = U' - a'$. 又 $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, 因此 $U' \in \mathfrak{U}_2$. 从而， $U \in \mathfrak{U}_{<2>}$. 证毕.

定理 1 计数函数 $f = f_{\mathfrak{U}}(x, y, z)$ 满足方程

$$x^2 y f^2 + (xyzh - 1) f + 1 = 0, \tag{6}$$

其中 $h = h_{\mathfrak{U}}(y, z)$.

证 由于 $f = f_0 + f_1 + f_2$, 其中 $f_0 = f_{\mathfrak{U}_0}(x, y, z)$, $f_1 = f_{\mathfrak{U}_1}(x, y, z)$, $f_2 = f_{\mathfrak{U}_2}(x, y, z)$. 因此，我们只需确定 $f_i (i = 0, 1, 2)$.

因为 $\mathfrak{U}_0$ 只含节点地图 ϑ, 它无边也无根面次和内面，所以 $f_0 = 1$.

由引理 1 可知

$$f_1 = xyz \Big(\sum_{U_1 \in \mathfrak{U}} x^{m(U_1)} y^{n(U_1)} z^{s(U_1)} \Big) \Big(\sum_{U_2 \in \mathfrak{U}} y^{n(U_2)} z^{s(U_2)} \Big) = xyzhf,$$

其中 $h = h_{\mathfrak{U}}(y,z) = f_{\mathfrak{U}}(1,y,z)$.

又由引理 2 可知

$$f_2 = x^2 y\Big(\sum_{M_1\in\mathfrak{U}} x^{m(M_1)} y^{n(M_1)} z^{s(M_1)}\Big)\Big(\sum_{M_2\in\mathfrak{U}} x^{m(M_2)} y^{n(M_2)} z^{s(M_2)}\Big) = x^2 y f^2.$$

因此

$$f = f_0 + f_1 + f_2 = 1 + xyzhf + x^2 y f^2. \tag{7}$$

由 (7) 式移项再合并同类项可得 (6) 式. 证毕.

在 (6) 式中取 $z = 1$, 我们得

推论 1 计数函数 $g = g_{\mathfrak{U}}(x,y)$ 满足下面方程

$$x^2 y g^2 + (xyH - 1)g + 1 = 0, \tag{8}$$

其中 $H = H_{\mathfrak{U}}(y) = h_{\mathfrak{U}}(y,1)$.

在 (6) 式中取 $x = 1$, 我们得

推论 2 计数函数 $h = h_{\mathfrak{U}}(y,z)$ 满足下面方程

$$y(1+z)h^2 - h + 1 = 0. \tag{9}$$

在 (9) 式中取 $z = 1$, 我们得

推论 3 计数函数 $H = H_{\mathfrak{U}}(y)$ 满足下面方程

$$2yH^2 - H + 1 = 0. \tag{10}$$

定理 2 计数函数 $\widetilde{f} = \widetilde{f}_{\mathfrak{U}}(x,y,z)$ 满足方程

$$x^2 y \widetilde{f}^2 + (xz\widetilde{h} - 1)\widetilde{f} + 1 = 0, \tag{11}$$

其中 $\widetilde{h} = \widetilde{h}_{\mathfrak{U}}(y,z)$.

证 设 $\widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_{\mathfrak{U}_0}(x,y,z)$, $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_{\mathfrak{U}_1}(x,y,z)$ 和 $\widetilde{f}_2 = \widetilde{f}_{\mathfrak{U}_2}(x,y,z)$. 因为 $\widetilde{f} = \widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, 所以我们只需求出 $\widetilde{f}_i$ $(i = 0,1,2)$.

因为 $\mathfrak{U}_0$ 只含节点地图 ϑ, 它无边也无根面次，自然也无奇异边和自环，所以 $\widetilde{f}_0 = 1$.

由引理 1 可知

$$\widetilde{f}_1 = xz\Big(\sum_{U_1\in\mathfrak{U}} x^{m(U_1)} y^{p(U_1)} z^{q(U_1)}\Big)\Big(\sum_{U_2\in\mathfrak{U}} y^{p(U_2)} z^{q(U_2)}\Big) = xz\widetilde{h}\widetilde{f},$$

其中 $\widetilde{h} = \widetilde{h}_{\mathfrak{U}}(y,z) = \widetilde{f}_{\mathfrak{U}}(1,y,z)$.

又由引理 2 可知

$$\widetilde{f}_2 = x^2 y\Big(\sum_{M_1\in\mathfrak{U}} x^{m(M_1)} y^{p(M_1)} z^{q(M_1)}\Big)\Big(\sum_{M_2\in\mathfrak{U}} x^{m(M_2)} y^{p(M_2)} z^{q(M_2)}\Big) = x^2 y \widetilde{f}^2.$$

因此

$$\widetilde{f} = \widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2 = 1 + xz\widetilde{h}\widetilde{f} + x^2 y \widetilde{f}^2. \tag{12}$$

由 (12) 式移项再合并同类项可得 (11) 式. 证毕.

在 (11) 式中取 $x = 1$, 我们得

推论 4 计数函数 $\widetilde{h}=\widetilde{h}_{\mathfrak{U}}(y,z)$ 满足下面方程

$$(y+z)\widetilde{h}^2-\widetilde{h}+1=0. \tag{13}$$

另外，由 (6) 式和 (11) 式可知

$$\widetilde{f}=f\Big(x,y,\frac{z}{y}\Big),\qquad \widetilde{h}=h\Big(y,\frac{z}{y}\Big). \tag{14}$$

3 计数显式

在这节为了求出计数函数 f,g,h 和 H, 其实就是解 (6),(8),(9) 式和 (10) 式中的函数方程，而求解 $\widetilde{f}$ 和 $\widetilde{h}$, 由 (14) 式可知只需解出 f 和 h. 本节我们所使用的主要工具是 Lagrange 反演定理.

定理 3[18] 带根双奇异平面地图以度为参数的计数函数是

$$H=\sum_{n\geq 0}\frac{2^n(2n)!}{(n+1)!\ n!}y^n. \tag{15}$$

证 由 (10) 式可知

$$H=\frac{1-\sqrt{1-8y}}{4y}.$$

现选取参数 θ 使 $y=\theta(1-2\theta)$, 则

$$yH=\theta.$$

从而，我们得到函数 $H=H_{\mathfrak{U}}(y)$ 的参数表达式如下：

$$\theta=\frac{y}{1-2\theta},\qquad yH=\theta.$$

利用 Lagrange 反演定理有

$$\begin{aligned}H&=\sum_{n\geq 1}\frac{y^{n-1}}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\theta^{n-1}}(1-2\theta)^{-n}\Big|_{\theta=0}\\&=\sum_{n\geq 1}\frac{2^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!}y^{n-1}\\&=\sum_{n\geq 0}\frac{2^n(2n)!}{(n+1)!\ n!}y^n.\end{aligned}$$

证毕.

定理 4 带根双奇异平面地图以度和内面数为参数的计数函数是

$$h=\sum_{n\geq 0}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n+1)!s!(n-s)!}y^n z^s. \tag{16}$$

证 由 (9) 式可知

$$h=\frac{1-\sqrt{1-4y(1+z)}}{2y(1+z)}.$$

现选取参数 ξ 使 $y(1+z)=\xi(1-\xi)$, 则

$$h=\frac{1}{1-\xi}.$$

从而，函数 $h=h_{\mathfrak{U}}(y,z)$ 具有如下的参数表达式：

$$\xi=\frac{y(1+z)}{1-\xi},\qquad h=\frac{1}{1-\xi}.$$

利用 Lagrange 反演定理有

$$\begin{aligned}h=&1+\sum_{n\geq 1}\frac{[y(1+z)]^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(1-\xi)^{-(n+2)}\Big|_{\xi=0}\\=&1+\sum_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}y^n(1+z)^n\\=&\sum_{n\geq 0}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n+1)!s!(n-s)!}y^nz^s.\end{aligned}$$

证毕.

注 利用幂级数的展开式，也可求出 (15) 式和 (16) 式.

定理 5 带根双奇异平面地图以根面次、度和内面数为参数的计数函数是

$$\begin{aligned}f=&\sum_{m,n\geq 1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{m-s}{2}\rceil\}}^{\min\{n-s,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\\&\cdot\frac{m!(2n-m-1)!}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(n-k)!(s-m+2k)!(n-s-k)!}x^my^nz^s\\&+\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n.\end{aligned}\tag{17}$$

证　由 (6) 式可知

$$f=\frac{1}{1-(xyzh+x^2yf)}.\tag{18}$$

我们利用 Lagrange 反演定理，有

$$\begin{aligned}f=&\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{df^{k-1}}\left[1-(xyzh+x^2yf)\right]^{-k}\Big|_{f=0}\\=&\sum_{m\geq 0}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}\begin{pmatrix}k+m-1\\m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\k-1\end{pmatrix}x^{m+k-1}y^mz^{m-k+1}h^{m-k+1}\\=&\sum_{m\geq 1}\sum_{k=1}^{m}\frac{(k+m-1)!}{k!(k-1)!(m-k+1)!}x^{m+k-1}y^mz^{m-k+1}h^{m-k+1}\\&+\sum_{m\geq 0}\frac{(2m)!}{(m+1)!\ m!}x^{2m}y^m.\end{aligned}\tag{19}$$

在 (18) 式中取 $x=1$, 可得

$$h=\frac{1}{1-y(z+1)h}.$$

我们再利用 Lagrange 反演定理，对 $t\geq 1$, 有

$$\begin{aligned}
h^t&=\sum_{l\geq 1}\frac{t}{l!}\frac{d^{l-1}}{dh^{l-1}}\left\{\left[1-y(z+1)h\right]^{-l}h^{t-1}\right\}\Big|_{h=0}\\
&=\sum_{l\geq t}\sum_{s=0}^{l-t}\frac{t}{l}\binom{2l-t-1}{l-t}\binom{l-t}{s}y^{l-t}z^s\\
&=\sum_{n\geq 0}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n+t-1)!\ t}{(n+t)!s!(n-s)!}y^nz^s.
\end{aligned}\tag{20}$$

现将 (20) 式代入 (19) 式，得

$$\begin{aligned}
f=&\sum_{\substack{m\geq 1\\ n\geq 0}}\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{(k+m-1)!(2n+m-k)!}{k!(k-1)!(m-k)!(n+m-k+1)!s!(n-s)!}x^{m+k-1}y^{m+n}z^{s+m-k+1}\\
&+\sum_{m\geq 0}\frac{(2m)!}{(m+1)!m!}x^{2m}y^m\\
=&\sum_{n\geq m\geq 1}\sum_{s=0}^{n-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(k+m)!(2n-m-k-1)!}{(k+1)!k!(m-k-1)!(n-k)!s!(n-m-s)!}x^{m+k}y^nz^{s+m-k}\\
&+\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n\\
=&\sum_{m,n\geq 1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{m-s}{2}\rceil\}}^{\min\{n-s,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\frac{m!(2n-m-1)!x^my^nz^s}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(n-k)!(s-m+2k)!(n-s-k)!}\\
&+\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n.
\end{aligned}$$

证毕.

由 (17) 式右边的第二项，我们得

推论 5 带根树以根面次和度为参数的计数函数为

$$f(x,y,0)=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n.\tag{21}$$

在 (21) 式中取 $x=1$, 我们得

推论 6[9] 带根树以度为参数的计数函数为

$$f(1,y,0)=\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}y^n.\tag{22}$$

在 (17) 式中取 $z=1$, 我们得

推论 7 带根双奇异平面地图以根面次和度为参数的计数函数是

$$
\begin{aligned}
g = &\sum_{m,n\geq 1}\sum_{k=\max\{0,m-n\}}^{\min\{n-1,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\frac{2^{n-m+k}m!(2n-m-1)!}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(n-k)!(n-m+k)!}x^m y^n\\
&+\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n.
\end{aligned}\tag{23}
$$

下面我们给出最后的两个定理.

定理 6 带根双奇异平面地图以根面次、奇异边数和自环数为参数的计数函数是

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f} = &\sum_{m,q\geq 1}\sum_{p\geq 0}\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{m-q}{2}\rceil\}}^{\min\{p,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\\
&\cdot\frac{m!(2p+2q-m-1)!}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(p+q-k)!(q-m+2k)!(p-k)!}x^m y^p z^q\\
&+\sum_{p\geq 0}\frac{(2p)!}{(p+1)!\ p!}x^{2p}y^p.
\end{aligned}\tag{24}
$$

证 由 (14) 式的第一个等式和 (17) 式可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f} = &\sum_{m,n\geq 1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{m-s}{2}\rceil\}}^{\min\{n-s,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\\
&\cdot\frac{m!(2n-m-1)!}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(n-k)!(s-m+2k)!(n-s-k)!}x^m y^{n-s} z^s\\
&+\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!\ n!}x^{2n}y^n\\
= &\sum_{m,q\geq 1}\sum_{p\geq 0}\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{m-q}{2}\rceil\}}^{\min\{p,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor\}}\\
&\cdot\frac{m!(2p+2q-m-1)!}{(k+1)!k!(m-2k-1)!(p+q-k)!(q-m+2k)!(p-k)!}x^m y^p z^q\\
&+\sum_{p\geq 0}\frac{(2p)!}{(p+1)!\ p!}x^{2p}y^p.
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 7 带根双奇异平面地图以奇异边数和自环数为参数的计数函数是

$$
\widetilde{h} = \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0}\frac{(2p+2q)!}{(p+q+1)!p!q!}y^p z^q.\tag{25}
$$

证　由 (14) 式的第二个等式和 (16) 式可得

$$\widetilde{h}=\sum_{n\geq 0}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n)!}{(n+1)!s!(n-s)!}y^{n-s}z^{s}=\sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0}\frac{(2p+2q)!}{(p+q+1)!p!q!}y^{p}z^{q}.$$

证毕.

致谢　谨以此文献给刘彦佩老师 70 寿辰，并祝他健康快乐、幸福长寿！刘老师学识渊博、治学严谨，真正做到教书育人，传道授业解惑．他的精益求精的工作作风，诲人不倦的高尚师德，严以律己、宽以待人的崇高风范，朴实无华、平易近人的人格魅力以及科学的教学方法，都使我们学生终身受益．在此，本文第二作者代表刘老师的全体研究生及博士后合作者，对他表示衷心的感谢．

参 考 文 献

[1] Tutte W T. A Census of Planar Triangulations. *Canad. J. Math.*, 1962, 14: -21-38

[2] Tutte W T. A Census of Slicings. *Canad. J. Math.*, 1962, 14: 708–722

[3] Tutte W T. A Census of Hamiltonian Polygons. *Canad. J. Math.*, 1962, 68: 402–417

[4] Tutte W T. A Census of Planar Maps. *Canad. J. Math.*, 1963, 15: 249–271

[5] Arqués D. Relations Fonctionelles et Dénombremant Des Cartes Point ées Sur le Tore. *J. Combin. Theory* (Series B), 1987, 43: 253–274

[6] Brown W G. Enumeration of Nonseparable Planar Maps. *Canad. J. Math. XV*, 1963, 526–545

[7] Brown W G. On the Number of Nonplanar Maps. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1966, 65: 1–42

[8] Mullin R C, Schellenberg P J. The Enumeration of c-nets Via Quadrangulations. *J. Combin. Theory*, 1964, 4: 256–276

[9] Tutte W T. On the Enumeration of Planar Maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, 74: 64–74

[10] Walsh T, Lehman A B. Counting Rooted Maps by Genus I, II. *J. Combin. Theory* (Series B), 1972, 13: 122–141, 192–218

[11] Bender E A. Asymptotic Methods in Enumeration. *SIAM Rev.*, 1974, 16: 485–515

[12] Bender E A, Canfield E R, Robinson R W. The Enumaration of Maps on the Torus and the Projective Plane. *Canad. Math. Bull.*, 1988, 31: 257–271

[13] Bender E A, Canfield E R. The Asmptotic Number of Rooted Maps on a Surface. *J. Combin. Theory* (Series A), 1986, 43: 244–257

[14] Bender E A, Richmond L B. A Survey of the Asmptotic Behaviour of Maps. *J. Combin. Theory* (Series B), 1986, 40: 297–329

[15] Bender E A, Wormald N C. The Asymptotic Number of Rooted Nonseparable Maps on a Given Surface. *J. Combin. Theory* (Series A), 1988, 49: 370–380

[16] Gao Z C. The Number of Rooted 2-connected Triangular Maps on the Projective Plane. *J. Combin. Theory* (Series B), 1991, 53: 130–142

[17] Gao Z C. The Asymptotic Number of Rooted 2-connected Triangular Maps on a Surface. *J. Combin. Theory* (Series B), 1992, 54: 102–112

[18] Liu Yanpei. Enumerative Theory of Maps. Boston: Kluwer, 1999

[19] Liu Yanpei. On the Number of Rooted c-nets. *J. Combin. Theory* (Series B), 1984, 36: 118–123

[20] Ren Han, Liu Yanpei. Bisingular Maps on the Sphere and Projective Plane. *Discrete Math.*, 2000, 223: 275–285

[21] Goulden I P, Jackson D M. Combinatorial Enumeration. New York: Wiley, 1983

The Enumeration of Bisingular Maps

LONG Shude

(*School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijng* 100875)

(*Department of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing* 402160)

(*E-mail: longshude@163.com*)

CAI Junliang

(*School of Mathematical Sciences, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Beijing Normal University, Beijing* 100875)

(*E-mail: caijunliang@bnu.edu.cn*)

Abstract This paper studies the enumeration of bisingular maps, provides the enumerating equations satisfied by enumerating functions with the valency of root-face, the size and the number of inner faces and with the valency of root-face, the numbers of singular edges and loops of the maps as parameters. Moreover, explicit expressions of these functions are also derived.

Key words bisingular map; enumerating function; enumerating equation; Lagrangian inversion

MR(2000) Subject Classification 05A15; 05C30

Chinese Library Classification O157.5