辅助原理技术在广义混合似变分不等式中的应用*

张黎丽

(大连理工大学应用数学系，大连 116024)

(大连东软信息学院基础部，大连 116023)

(E-mail: zhanglili@neusoft.edu.cn)

刘泽庆

(辽宁师范大学数学系，大连 116029)

摘　要　通过使用辅助原理技术证明了 Hilbert 空间中一类广义混合似变分不等式解的存在性，并给出一种算法计算此类变分不等式的近似解.

关键词　广义混合似变分不等式；辅助原理技术；迭代算法

MR(2000) 主题分类　62G05; 62N01

中图分类　O177.91

1　引言

1964 年， Stampacchia 提出并建立了初期的变分不等式理论，之后变分不等式问题成为应用数学中一个重要的研究领域，它不仅在非线性最优化中具有广泛的应用，而且在微分方程、力学、控制论、对策论、经济平衡理论、社会和经济模型等许多方面都有着重要的应用，见 [1–14]. 在变分不等式理论中，最有趣和最重要的问题之一是发展有效的用于求逼近解的迭代算法，其中投影方法是非常有效的方法之一，并且投影方法在解经典变分不等式的各种推广形式的问题时，发挥了重要作用．但是，投影方法未能应用于一般混合型变分不等式. 因此，这个事实促使许多作者发展辅助原理技术来研究各种变分不等式解的存在性和发展大量的数值方法来解各种变分不等式问题，见 [2,3].

2001 年， Huang 和 Deng[2] 应用辅助原理技术研究了一类广义集值强非线性混合似变分不等式，利用 Chang 和 Xiang[1] 中的定理 1 证明辅助问题解的存在性，在这个

本文 2005 年 6 月 15 日收到. 2007 年 12 月 25 日收到修改稿.

* 辽宁省教育厅科研基金 (2004C063) 资助项目.

结论的基础上提出求逼近解的迭代算法，建立了关于广义集值非线性混合似变分不等式的解的存在定理.

受上述工作 [1−14] 的启发，本文研究了一类广义混合似变分不等式. 这里给出的关于广义混合似变分不等式的辅助问题不同于 Huang 和 Deng[2], Luo[3] 中的辅助问题. 利用 [1, 定理 1] 的结论，证明了这个辅助问题解的存在性，在此基础上，建立了广义混合似变分不等式解的存在性定理，提出了求广义混合似变分不等式逼近解的迭代算法并讨论了此算法的收敛性.

2 预备知识

设 H 为实 Hilbert 空间， $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 H 中的内积， $\|\cdot\|$ 表示 H 中的范数， I 表示 H 上的恒等映射. 设 $b: H\times H\to(-\infty,+\infty)$ 是不可微的并且满足：

(a) $b(\cdot,\cdot)$ 在第一变元是线性的；

(b) $b(\cdot,\cdot)$ 在第二变元是凸的；

(c) $b(\cdot,\cdot)$ 是有界的，即存在 $\gamma>0$ 使得 $|b(u,v)|\le\gamma\|u\|\|v\|$, $\forall\, u,v\in H$;

(d) $b(u,v)-b(u,w)\le b(u,v-w)$, $\forall\, u,v,w\in H$.

设 $A,B,C,g: H\to H$, $\eta: H\times H\to H$ 和 $N: H\times H\times H\to H$ 为单值映射. 考虑如下广义混合似变分不等式 (GMVI): 求 $u\in H$ 满足

$$\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v,u)\rangle+b(g(u),v)-b(g(u),u)\ge 0,\qquad \forall\, v\in H. \tag{2.1}$$

如果 $g=I$, $N(x,y,z)=x-y$, $\eta(y,x)=Gy-Gx$, $b(x,y)=f(y)$, $\forall\, x,y,z\in H$, 其中 $G: H\to H$, $f: H\to(-\infty,+\infty)$, 则 (2.1) 相当于求 $u\in H$ 使得

$$\langle Au-Bu,Gv-Gu\rangle+f(v)-f(u)\ge 0,\qquad \forall\, v\in H, \tag{2.2}$$

称为广义变分不等式，见 [11].

定义 2.1 设 $T: H\to H$ 为映射.

(1) 称 T 为 α- 强单调，如果存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$\langle Tu-Tv,u-v\rangle\ge\alpha\|u-v\|^2,\qquad \forall\, u,v\in H;$$

(2) 称 T 为 β-Lipschitz 连续，如果存在常数 $\beta>0$ 使得

$$\|Tu-Tv\|\le\beta\|u-v\|,\qquad \forall\, u,v\in H.$$

定义 2.2 设 $T,S: H\to H$ 和 $N: H\times H\times H\to H$ 是三个映射.

(1) 称 N 在第一元为 t-Lipschitz 连续，如果存在常数 $t>0$, 使得

$$\|N(x,u,v)-N(y,u,v)\|\le t\|x-y\|,\qquad \forall\, x,y,u,v\in H;$$

(2) 称 T 关于 N 的第一元为 S-ς- 强单调，如果存在常数 $\varsigma > 0$ 使得

$$\langle N(Tx,u,v) - N(Ty,u,v), Sx - Sy\rangle \geq \varsigma\|x-y\|^2, \qquad \forall\, x,y,u,v \in H;$$

(3) 称 T 关于 N 的第一元为 S-τ- 松弛单调，如果存在常数 $\tau > 0$ 使得

$$\langle N(Tx,u,v) - N(Ty,u,v), Sx - Sy\rangle \geq -\tau\|x-y\|^2, \qquad \forall\, x,y,u,v \in H.$$

类似地，还可以定义 N 关于第二元，第三元的 Lipschitz 连续性以及 T 关于 N 的第二元的 S- 松弛单调性.

定义 2.3 称映射 $\eta : H \times H \to H$ 为

(1) σ- 强单调，如果存在常数 $\sigma > 0$ 使得

$$\langle u - v, \eta(u,v)\rangle \geq \sigma\|u-v\|^2, \qquad \forall\, u,v \in H;$$

(2) δ-Lipschitz 连续，如果存在常数 $\delta > 0$ 使得

$$\|\eta(u,v)\| \leq \delta\|u-v\|, \qquad \forall\, u,v \in H.$$

定义 2.4 设 $T : H \to H$ 和 $\eta : H\times H \to H$ 是两个映射. 称 T 是 η- 半连续的, 如果对任意给定的 $x,y \in H$, 由 $g(t) = \langle T(x+t(y-x)), \eta(y,x)\rangle$ 定义的映射 $g : [0,1] \to (-\infty,+\infty)$ 在 0^+ 连续.

引理 2.1[1] 设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 的一个非空闭凸子集, $\phi,\psi : X\times X \to (-\infty,+\infty)$ 是两个映射满足如下条件:

(i) $\psi(x,y) \leq \phi(x,y)$, $\forall\, x,y \in X$, 并且 $\psi(x,x) \geq 0$, $\forall\, x \in X$;

(ii) 对每个 $x \in X, \phi(x,\cdot)$ 在 X 上是上半连续;

(iii) 对每个 $y \in X$, 集合 $\{x \in X : \psi(x,y) < 0\}$ 是凸的;

(iv) 存在一个非空紧集 $K \subset X$ 和 $x_0 \in K$ 使得 $\psi(x_0,y) < 0$, $\forall\, y \in X \setminus K$.

则存在 $\overline{y} \in K$ 满足

$$\phi(x,\overline{y}) \geq 0, \qquad \forall\, x \in K.$$

引理 2.2[15] 设 $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}, \{\beta_n\}_{n\geq 0}$ 和 $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ 是三个非负数列并且满足

$$\alpha_{n+1} \leq (1-\delta_n)\alpha_n + \delta_n\beta_n + \gamma_n, \qquad \forall\, n \geq 0,$$

其中

$$\{\delta_n\}_{n\geq 0} \subset [0,1], \quad \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n < \infty,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

假设 2.1 映射 $\eta : H \times H \to H$ 满足下列条件:

(1) $\eta(v,u) = -\eta(u,v)$, $\forall\, u,v \in H$;

(2) 对给定的 $x,y,z,u \in H$, 映射 $v \to \langle N(x,y,z), \eta(u,v)\rangle$ 是凹的和上半连续的.

[2] 中的例 2.2 说明了满足定义 2.3 和假设 2.1 的映射 η 是存在的.

3 主要结果

在本节, 我们将辅助原理技术应用到解决 GMVI(2.1) 上. 首先我们证明 GMVI(2.1) 的辅助问题存在唯一解，在这个结论的基础上建立解决 GMVI(2.1) 的迭代算法. 最后研究由这种算法产生的迭代序列的收敛性.

考虑如下辅助问题 $P(u)$: 对给定 $u\in H$, 求 $w\in H$ 满足

$$\begin{aligned}&\langle Sw, v-w\rangle+\rho b(g(w),v)-\rho b(g(w),w)\\ \geq&\langle Su, v-w\rangle-\rho\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v,w)\rangle,\qquad\forall\, v\in H,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $\rho>0$ 是个常数， $S:H\to H$ 是个映射.

注 3.1 辅助问题 $P(u)$ 不同于 [2] 中的辅助问题.

定理 3.1 设 $\eta:H\times H\to H$ 是 ξ-Lipschitz 连续， $S:H\to H$ 是 δ- 强单调和 η- 半连续， g 是 α-Lipschitz 连续，函数 $b:H\times H\to(-\infty,+\infty)$ 满足条件 (a)–(d). 如果假设 2.1 成立并且存在 $\rho\in(0,\delta(\gamma\alpha)^{-1})$, 则对任意给定的 $u\in H$, 辅助问题 $P(u)$ 存在唯一的解.

证 设 u 是 H 中任意给定的点. 定义 $\phi,\psi:H\times H\to(-\infty,+\infty)$ 如下：

$$\begin{aligned}\phi(v,w)=&\langle Sv, v-w\rangle-\langle Su, v-w\rangle+\rho\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v,w)\rangle\\ &-\rho b(g(w),w)+\rho b(g(w),v),\qquad\forall\, v,w\in H,\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\psi(v,w)=&\langle Sw, v-w\rangle-\langle Su, v-w\rangle+\rho\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v,w)\rangle\\ &-\rho b(g(w),w)+\rho b(g(w),v),\qquad\forall\, v,w\in H.\end{aligned}\tag{3.3}$$

首先证明映射 ϕ,ψ 满足引理 2.1 的条件. 由 S 的强单调性， b 关于第二元的连续性及假设 2.1 容易验证 ϕ,ψ 满足引理 2.1 的条件 (i)–(iii). 设 v^* 是 H 中的任意点. 令 $r=(\delta-\rho\alpha\gamma)^{-1}\big(\|Sv^*\|+\|Su\|+\rho\xi\|N(Au,Bu,Cu)\|+\rho\gamma\|gv^*\|\big)$, $K=\{w\in H:\|w-v^*\|\leq r\}$.

设 $w\in H\setminus K$. 由假设 2.1, η,g 的 Lipschitz 连续性及 S 的强单调性有

$$\begin{aligned}\psi(v^*,w)=&\langle Sw, v^*-w\rangle-\langle Su, v^*-w\rangle+\rho\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v^*,w)\rangle\\ &-\rho b(g(w),w)+\rho b(g(w),v^*)\\ \leq&-\langle Sw-Sv^*, w-v^*\rangle+\|Sv^*\|\|w-v^*\|+\|Su\|\|w-v^*\|\\ &+\rho\xi\|N(Au,Bu,Cu)\|\|w-v^*\|+\rho b(g(w),v^*-w)\\ &-\rho b(g(v^*),v^*-w)+\rho b(g(v^*),v^*-w)\\ \leq&(\rho\alpha\gamma-\delta)\|w-v^*\|[\|w-v^*\|-(\delta-\rho\alpha\gamma)^{-1}(\|Sv^*\|+\|Su\|\\ &+\rho\xi\|N(Au,Bu,Cu)\|+\rho\gamma\|g(v^*)\|)]\\ <&0.\end{aligned}$$

所以引理 2.1 的条件 (iv) 成立. 根据引理 2.1, 存在 $\overline{w} \in H$ 满足 $\phi(v, \overline{w}) \geq 0$, $\forall v \in H$, 即

$$\begin{aligned}\langle Sv, v-\overline{w}\rangle \geq& \langle Su, v-\overline{w}\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,\overline{w})\rangle \\ &+ \rho b(g(\overline{w}),\overline{w}) - \rho b(g(\overline{w}), v).\end{aligned} \tag{3.4}$$

对任意 $t \in (0,1]$ 和 $v \in H$, 设 $x_t = tv + (1-t)\overline{w}$. 将 x_t 代入 (3.4) 的 v, 可得

$$\begin{aligned}t\langle S(x_t), v-\overline{w}\rangle \geq& t\langle Su, v-\overline{w}\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(tv+(1-t)\overline{w},\overline{w})\rangle \\ &+ \rho b(g(\overline{w}),\overline{w}) - \rho b(g(\overline{w}), tv+(1-t)\overline{w}) \\ \geq& t\langle Su, v-\overline{w}\rangle - \rho t\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,\overline{w})\rangle \\ &- \rho tb(g(\overline{w}), v) + \rho tb(g(\overline{w}),\overline{w}),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\langle S(x_t), v-\overline{w}\rangle \geq& \langle Su, v-\overline{w}\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,\overline{w})\rangle \\ &- \rho b(g(\overline{w}), v) + \rho b(g(\overline{w}),\overline{w}).\end{aligned}$$

在上面的不等式中令 $t \to 0^+$, 则

$$\begin{aligned}\langle S(\overline{w}), v-\overline{w}\rangle \geq& \langle Su, v-\overline{w}\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,\overline{w})\rangle \\ &- \rho b(g(\overline{w}), v) + \rho b(g(\overline{w}),\overline{w}).\end{aligned}$$

所以 $\overline{w}$ 是辅助问题 $P(u)$ 的一个解.

其次证明辅助问题 $P(u)$ 解的唯一性. 对任意给定的 $u \in H$, 假设 w_1 和 w_2 是辅助问题 $P(u)$ 的两个不同的解, 则

$$\begin{aligned}\langle S(w_1), v-w_1\rangle \geq& \langle Su, v-w_1\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,w_1)\rangle \\ &- \rho b(g(w_1), v) + \rho b(g(w_1), w_1), \qquad \forall v \in H,\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\langle S(w_2), v-w_2\rangle \geq& \langle Su, v-w_2\rangle - \rho\langle N(Au,Bu,Cu), \eta(v,w_2)\rangle \\ &- \rho b(g(w_2), v) + \rho b(g(w_2), w_2), \qquad \forall v \in H.\end{aligned} \tag{3.6}$$

在 (3.5) 中取 $v = w_2$, 在 (3.6) 中取 $v = w_1$, 然后将这两个不等式相加, 则有

$$\langle S(w_1) - S(w_2), w_1 - w_2\rangle \leq -\rho b(g(w_2) - g(w_1), w_2) + \rho b(g(w_2) - g(w_1), w_1),$$

即

$$\begin{aligned}\rho\gamma\alpha\|w_2 - w_1\|^2 \geq& \rho b(g(w_2) - g(w_1), w_1) - \rho b(g(w_2) - g(w_1), w_2) \\ \geq& \langle S(w_1) - S(w_2), w_1 - w_2\rangle \geq \delta\|w_1 - w_2\|^2,\end{aligned}$$

因此 $\rho\gamma\alpha \geq \delta$, 这与已知条件相矛盾. 所以辅助问题 $P(u)$ 存在唯一解. 证明完毕.

由定理 3.1, 对每个 $u \in H$, 可以找到一个满足 (3.1) 式的 $w \in H$ 与 u 对应，这样构成了一个映射，记作 $F: H \to H$, 即 $F(u) = w$.

从定理 3.1 可提出关于 GMVI(2.1) 的如下的迭代算法.

算法 3.1 设 $N: H \times H \times H \to H$, $\eta: H \times H \to H$ 和 $S: H \to H$ 是三个单值映射. 对给定 $u_0 \in H$, 按照如下方法产生序列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$:

$$\begin{aligned}
&\langle S(z_n), v - z_n\rangle \\
\geq &\langle S(u_n), v - z_n\rangle - \rho\langle N(Au_n, Bu_n, Cu_n), \eta(v, z_n)\rangle \\
&- \rho b(g(z_n), v) + \rho b(g(z_n), z_n), \qquad \forall v \in H, \quad n \geq 0, \qquad (3.7)\\
&\langle S(u_{n+1}), v - u_{n+1}\rangle \\
\geq &\langle S(z_n), v - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(Az_n, Bz_n, Cz_n), \eta(v, u_{n+1})\rangle \\
&- \rho b(g(u_{n+1}), v) + \rho b(g(u_{n+1}), u_{n+1}), \qquad \forall v \in H, \quad n \geq 0, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

其中 $\rho > 0$ 是常数.

现在讨论算法 3.1 的收敛性.

定理 3.2 设 $N: H \times H \times H \to H$ 在第一元是 r-Lipschitz 连续，在第二元是 s-Lipschitz 连续，在第三元是 t-Lipschitz 连续. 设 $A, B, C: H \to H$ 分别是 l-Lipschitz 连续， m-Lipschitz 连续和 p-Lipschitz 连续， A 和 B 分别是关于 N 的第一元 S-μ- 强单调和关于 N 的第二元 S-τ- 松弛单调. 设 $g: H \to H$ 是 α-Lipschitz 连续， $S: H \to H$ 是 δ- 强单调和 σ-Lipschitz 连续， $\eta: H \times H \to H$ 是 ε- 强单调和 ξ-Lipschitz 连续. 设 $k = (rl + sm)\sqrt{1 - 2\varepsilon + \xi^2} + tp\xi$, $a = (rl + sm)^2 - (\gamma\alpha + k)^2$, $b = (\mu + \tau) - (\gamma\alpha + k)\delta$, $c = \sigma^2 - \delta^2$, $\mu > \tau$. 如果假设 2.1 成立并且存在一个常数 $\rho > 0$ 满足

$$\rho < \delta(\gamma\alpha + k)^{-1} \qquad (3.9)$$

和下列条件之一：

$$a > 0, \qquad b^2 > ac, \qquad |\rho - ba^{-1}| < a^{-1}\sqrt{b^2 - ac}; \qquad (3.10)$$

$$a < 0, \qquad |\rho - ba^{-1}| > -a^{-1}\sqrt{b^2 - ac}, \qquad (3.11)$$

则 GMVI (2.1) 存在解 $u \in H$, 并且由算法 3.1 定义的序列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 强收敛到 u.

证　为证明 GMVI (2.1) 有解 $u \in H$, 只要证明由 (3.1) 定义的映射 $F: H \to H$ 有不动点 $u \in H$ 即可. $\forall x, y \in H$, 由定理 3.1 可知

$$\begin{aligned}
\langle S(Fx), v - Fx\rangle \geq &\langle Sx, v - Fx\rangle - \rho\langle N(Ax, Bx, Cx), \eta(v, Fx)\rangle \\
&+ \rho b(g(Fx), Fx) - \rho b(g(Fx), v), \qquad \forall v \in H, \qquad (3.12)\\
\langle S(Fy), v - Fy\rangle \geq &\langle Sy, v - Fy\rangle - \rho\langle N(Ay, By, Cy), \eta(v, Fy)\rangle \\
&+ \rho b(g(Fy), Fy) - \rho b(g(Fy), v), \qquad \forall v \in H. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

令 (3.12) 中 $v=Fy$, (3.13) 中 $v=Fx$. 将这两个不等式相加可得

$$\begin{aligned}&\langle S(Fx)-S(Fy),Fx-Fy\rangle\\ \le&\langle Sx-Sy,Fx-Fy\rangle-\rho\langle N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cy),\eta(Fx,Fy)\rangle\\ &+\rho b(g(Fx)-g(Fy),Fy-Fx).\end{aligned}$$

由条件 (c), g 的 Lipschitz 连续性以及 S 的强单调性可得

$$\begin{aligned}&(\delta-\rho\alpha\gamma)\,\|Fx-Fx\|^2\\ \le&\langle Sx-Sy-\rho[N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cx)],Fx-Fy\rangle\\ &+\rho\langle N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cx),Fx-Fy-\eta(Fx,Fy)\rangle\\ &-\rho\langle N(Ay,By,Cx)-N(Ay,By,Cy),\eta(Fx,Fy)\rangle\\ \le&\big\|Sx-Sy-\rho[N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cx)]\big\|\,\|Fx-Fy\|\\ &+\rho\big\|N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cx)\big\|\,\|Fx-Fy-\eta(Fx,Fy)\|\\ &+\rho\big\|N(Ay,By,Cx)-N(Ay,By,Cy)\big\|\,\|Fx-Fy\|.\end{aligned}\tag{3.14}$$

因为 $N:H\times H\times H\to H$ 在第一元是 r-Lipschitz 连续，在第二元是 s-Lipschitz 连续并且在第三元是 t-Lipschitz 连续， $A,B,C:H\to H$ 分别是 l-Lipschitz 连续， m-Lipschitz 连续和 p-Lipschitz 连续, 并且 A,B 分别关于 N 的第一元, 第二元是 S-μ- 强单调和 S-τ-松弛单调， $S:H\to H$ 是 δ- 强单调和 σ-Lipschitz 连续， $\eta:H\times H\to H$ 是 ε- 强单调和 ξ-Lipschitz 连续，所以

$$\begin{aligned}&\big\|Sx-Sy-\rho[N(Ax,Bx,Cx)-N(Ay,By,Cx)]\big\|^2\\ \le&[\sigma^2-2\rho(\mu-\tau)+(rl+sm)^2\rho^2]\,\|x-y\|^2,\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\big\|Fx-Fy-\eta(Fx,Fy)\big\|^2\le(1-2\varepsilon+\xi^2)\,\|Fx-Fy\|^2.\tag{3.16}$$

根据 (3.14)–(3.16), 易证 $\|Fx-Fy\|\le\theta\|x-y\|$, 其中

$$\theta=(\delta-\rho\gamma\alpha)^{-1}[\sqrt{\sigma^2+(rl+sm)^2\rho^2-2(\mu-\tau)\rho}+\rho k].$$

由 (3.9) 及 (3.10) 或 (3.11) 可得 $0<\theta<1$, 所以 F 是压缩映射，因此 F 有唯一的不动点 $u\in H$. 当然此不动点即是 GMVI (2.1) 的一个解.

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$. 因为 u 是 GMVI (2.1) 的一个解，所以

$$\begin{aligned}\langle Su,v-u\rangle\ge&\langle Su,v-u\rangle-\rho\langle N(Au,Bu,Cu),\eta(v,u)\rangle\\ &-\rho b(g(u),v)+\rho b(g(u),u),\qquad\forall\,v\in H.\end{aligned}\tag{3.17}$$

在 (3.8) 中令 $v=u$, 在 (3.17) 中令 $v=u_{n+1}$ 并将这两不等式相加得 $\|u_{n+1}-u\|\le\theta\|z_n-u\|$. 类似, 在 (3.7) 中令 $v=u$, 在 (3.17) 中令 $v=z_n$ 并相加两不等式得 $\|z_n-u\|\le\theta\|u_n-u\|$. 所以对 $n\ge0$, $\|u_{n+1}-u\|\le\theta^2\|u_n-u\|$. 由 (3.9) 和 (3.10) 或 (3.11) 可知 $\theta^2<1$, 所以当 $n\to\infty$ 时 $u_n\to u$. 定理证毕.

定理 3.3 设 N, g, C, η, k 和 a 与定理 3.2 中相同. 设 $A, B: H \to H$ 分别是 l-Lipschitz 连续和 m-Lipschitz 连续并且分别关于 N 的第一元，第二元是 I-μ- 强单调和 I-τ- 松弛单调. 设 $S: H \to H$ 是 δ- 强单调，$I - S$ 是 σ-Lipschitz 连续. 假设 $b = (\mu + \tau) - (\gamma\alpha + k)(\delta - \sigma)$, $c = 1 - (\delta - \sigma)^2$, $\mu > \tau$. 如果假设 2.1 成立并且存在常数 $\rho > 0$ 满足 $\rho < (\delta - \sigma)(\gamma\alpha + k)^{-1}$ 和 (3.10), (3.11) 中的一个，则 GMVI (2.1) 有解 $u \in H$ 并且由算法 3.1 定义的序列 $\{u_n\}_{n \geq 0}$ 强收敛到 u.

证 与定理 3.2 的证明类似可得

$$\begin{aligned}
&(\delta - \rho\gamma\alpha) \|Fx - Fy\|^2 \\
\leq &\langle Sx - Sy - (x - y), Fx - Fy\rangle \\
&+ \langle x - y + \rho[N(Ay, By, Cx) - N(Ax, Bx, Cx)], Fx - Fy\rangle \\
&- \rho\langle N(Ay, By, Cx) - N(Ax, Bx, Cx), Fx - Fy - \eta(Fx, Fy)\rangle \\
&- \rho\langle N(Ay, By, Cx) - N(Ay, By, Cy), \eta(Fx, Fy)\rangle \\
\leq &[\sigma + \sqrt{1 - 2\rho(\mu - \tau) + \rho^2(rl + sm)^2} + \rho k] \|x - y\| \|Fx - Fy\|,
\end{aligned}$$

即 $\|Fx - Fy\| \leq \theta\|x - y\|$, 其中 $\theta = (\delta - \rho\gamma\alpha)^{-1}[\sigma + \sqrt{1 - 2\rho(\mu - \tau) + \rho^2(rl + sm)^2} + \rho k]$. 余下的证明与定理 3.2 相同，在此省略. 定理证毕.

注 3.2 定理 3.2 和定理 3.3 改进了 [11] 中定理 3.1, [13] 中定理 2.1 和 [14] 中定理 2.2.

参 考 文 献

[1] Chang S S, Xiang S W. On the Existence and Uniqueness of Solutions for a Class of Variational Inequalities with Applications to the Signorini Problem in Mechanics. *Appl. Math. Mech.*, 1991, 12: 401–407

[2] Huang N J, Deng C X. Auxiliary Principle and Iterative Algorithms for Generalized Set-valued Strongly Nonlinear Mixed Variational-like Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, 256: 345–359

[3] Luo C L. Existence and Iterative Algorithms of Solutions for Generalized Mixed Quasi-variational Inequalities. *Appl. Math. Mech.*, 1999, 20: 969–976

[4] Liu Z, Ume J S, Kang S M. General Strongly Nonlinear Quasi-variational Inequalities with Relaxed Lipschitz and Relaxed Monotone Mappings. *J. Optim. Theory Appl.*, 2002, 114(3): 639–656

[5] Liu Z, Ume J S, Kang S M. Resolvent Equations Technique for General Variational Inclusions. *Proc. Japan Acad. Ser.*, 2002, 78(10): 188–193

[6] Liu Z, Debnath L, Kang S M, Ume J S. Sensitivity Analysis for Parametric Completely Generalized Nonlinear Implicit Quasivariational Inclusions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 277: 142–154

[7] Liu Z, Kang S M. Generalized Multivalued Nonlinear Quasi-variational Inclusions. *Math. Nachr.*, 2003, 253: 45–54

[8] Liu Z, Kang S M, Ume J S. Completely Generalized Multivalued Strongly Quasivariational Inequalities.

Publ. Math. Debrecen, 2003, 62(1-2): 187–204

[9] Liu Z, Kang S M. Convergence and Stability of Perturbed Three-step Iterative Algorithm for Completely Generalized Nonlinear Quasi-variational Inequalities. *Appl. Math. Comput.*, 2004, 149: 245–258

[10] Liu Z, Debnath L, Kang S M, Ume J S. Generalized Mixed Quasi-variational Inclusions and Generalized Mixed Resolvent Equations for Fuzzy Mappings. *Appl. Math. Comput.*, 2004, 149: 879–891

[11] Yao J C. Existence of Genrealized Variational Inequalities. *Operations Research Letters*, 1994, 15: 35–40

[12] Zeng L C. A Note on General Algorithm for Variational Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 1998, 223: 354–363

[13] Verma R U. On a Class of Implicit Variational Inequalities Involving a Class of Partially Relaxed Monotone Mappings. *Adv. Nonlinear Var. Inequal.*, 2001, 4(2): 65–73

[14] Verma R U. Generalized Pseudo-contractions and Nonlinear Variational Inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, 1998, 53: 23–28

[15] Liu L S. Ishikawa and Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, 194: 114–125

The Application of Auxiliary Principle Technique in a Class of Generalized Mixed Variational-like Inequalities

ZHANG Lili

(*Department of Applied mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)

(*Basic Courses Teaching Department, Dalian Neusoft Institute of Information, Dalian* 116023)

(*E-mail: zhanglili@meusoft.edu.cn*)

LIU Zeqing

(*Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian* 116029)

Abstract In this paper, by employing the auxiliary principle technique, some existence theorems of solutions for a new class of generalized mixed variational-like inequalities are proved in Hilbert spaces and an iterative algorithm to compute approximate solutions of the generalized mixed variational-like inequality is suggested and analyzed. These results presented here improve and generalize some results in recent literatures.

Key words generalized mixed variational-like inequality; auxiliary principle technique; iterative algorithm; estimating equation

MR(2000) Subject Classification 62G05; 62N015

Chinese Library Classification O212.7