第 31 卷 第 5 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2008

度为奇数的正则图的上负全控制数 *

吴建刚
(华东师范大学数学系，上海 200241)
苗正科
(徐州师范大学数学学院，徐州 221116)
吕长虹
(华东师范大学数学系，上海 200241)
(E-mail: chlu@math.ecnu.edu.cn)

摘 要 $f: V(G)\to\{-1,0,1\}$ 称为图 G 的负全控制函数，如果对任意点 $v\in V$, 均有 $f[v]\geq 1$, 其中 $f[v]=\sum\limits_{u\in N(v)} f(u)$. 如果对每个点 $v\in V$, 不存在负全控制函数 $g: V(G)\to\{-1,0,1\}$, $g\neq f$, 满足 $g(v)\leq f(v)$, 则称 f 是一个极小负全控制函数. 图的上负全控制数 $\Gamma_t^-(G)=\max\{\omega(f)\mid f$ 是 G 的极小负全控制函数 $\}$, 其中 $\omega(f)=\sum\limits_{v\in V(G)} f(v)$. 本文研究正则图的上负全控制数，证明了：令 G 是一个 n 阶 r- 正则图. 若 r 为奇数，则 $\Gamma_t^-(G)\leq \frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n$.

关键词 k- 正则图；上负全控制数；控制数
MR(2000) 主题分类 05C69
中图分类 O157.5

1 引言

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图. $|V(G)|$ 称为图 G 的阶数. 如果图 H 满足条件 $V(H)\subseteq V(G)$ 并且 $E(H)\subseteq E(G)$, 则称 H 为图 G 的一个子图. 对 $S\subseteq V(G)$, $G[S]$ 表示由 S 导出的子图. 图 G 中点 x 的开邻域 $N(x,G)=\{y\mid xy\in E(G)\}$, x 的闭邻域 $N[x,G]=N(x,G)\cup\{x\}$. 更一般地，对 $X\subseteq V(G)$, $N(X,G)=\bigcup\limits_{x\in X} N(x,G)$ 和 $N[X,G]=N(X,G)\cup X$. 在不引起混淆的情况下，上述符号可分别简记为 $N(x), N[x], N(X)$ 和 $N[X]$. 我们称 $d(x)=|N(x)|$ 为点 x 的度. $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的最小度和最大度. 度为 1 和 0 的点分别称为图的悬挂点和孤立点，所有顶点的度都等于 k 的图称为 k- 正则图. 图 G 中度为奇数和偶数的点分别称为奇点和偶点. $S\subseteq V(G)$ 是 G 的一个独立集，如果 S 中任意两个不同的点在图 G 中不邻接. 凡是文中未加定义的术语和符号可参看 [1].

本文 2008 年 5 月 18 日收到. 2008 年 7 月 3 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (60673048), 江苏省自然科学基金项目 (BK2007030), 江苏省普通高等学校“青蓝工程”中青年学术带头人和江苏省高校自然科学基金项目 (07KJD110207) 资助项目.

Harris[2] 等人引入图的上负全控制数的概念. $f:V(G)\to\{-1,0,1\}$ 称为图 G 的负全控制函数, 如果对任意点 $v\in V$, 均有 $f[v]\ge 1$, 其中 $f[v]=\sum\limits_{u\in N(v)}f(u)$. 如果对每个点 $v\in V$, 不存在负全控制函数 $g:V(G)\to\{-1,0,1\}$, $g\ne f$, 满足 $g(v)\le f(v)$, 则称 f 是一个极小负全控制函数. 图的上负全控制数 $\Gamma_t^-(G)=\max\{\omega(f)\mid f$ 是 G 的极小负全控制函数 $\}$, 其中 $\omega(f)=\sum\limits_{v\in V(G)}f(v)$.

Yan[3] 等人给出了 3- 正则图上负全控制数的可达上界.

定理 1[3] 若 G 为 n 阶的 3- 正则图, 则 $\Gamma_t^-(G)\le\frac{5}{7}n$, 且这个界是可达的.

Wang[4] 等人给出了 5- 正则图上负全控制数的可达上界.

定理 2[4] 若 G 为 n 阶的 5- 正则图, 则 $\Gamma_t^-(G)\le\frac{13}{17}n$, 且这个界是可达的.

我们给出了度为奇数的正则图的上负全控制数的可达上界, 它包含了定理 1 和定理 2 中的结果. 下面即本文的主要结果:

定理 3 若 G 为 n 阶的 r- 正则图 ($r\ge 3$ 为奇数), 则 $\Gamma_t^-(G)\le\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n$. 并且这个界是可达的.

2 主要结果的证明

下面的引理在证明本文的主要结果时有很重要的作用.

引理 1[3] 图 $G=(V,E)$ 上的一个负全控制函数 f 是极小的当且仅当对每个点 $v\in V$, 若 $f(v)\ge 0$, 则存在一个点 $u\in N(v)$ 使得 $f[u]=1$.

设 $G=(V,E)$ 为 n 阶图. $f:V\to\{-1,0,1\}$ 为 G 上一个极小负全控制函数. 如果 $\omega(f)=\Gamma_t^-(G)$, 称 f 为 G 的 $\Gamma_t^-(G)$- 函数. 对 $v\in V$ 和 $S\subseteq V$, 用 $N_S(v)$ 表示 S 中与 v 相邻的点集, 且令 $d_S(v)=|N_S(v)|$. 设 $X\subseteq V$ 且 $X\cap S=\emptyset$, 令 $E(X,S)=\{uv\in E\mid u\in X, v\in S\}$, $e(X,S)=|E(X,S)|$. P, Q 和 M 的定义分别为:

$$\begin{aligned}P&=\{v\in V|f(v)=+1\},\\Q&=\{v\in V|f(v)=0\},\\M&=\{v\in V|f(v)=-1\}.\end{aligned}$$

设 f 为图 G 的一个 $\Gamma_t^-(G)$- 函数. . 令 $|P|=p$, $|Q|=q$ 和 $|M|=m$, 则 $\Gamma_t^-(G)=\omega(f)=p-m$. 由定义可知, 对任意点 $v\in V$, $d_P(v)\ge d_M(v)+1\ge 1$, $d_Q(v)\le r-1-2d_M(v)$. 因此可以把 P, Q 和 M 分别划分为以下集合:

$$\begin{aligned}P_{ij}&=\Big\{v\in P\mid d_Q(v)=i,\ d_M(v)=j,\ 0\le j\le\frac{r-1}{2},\ 0\le i\le r-1-2j\Big\},\\Q_{ij}&=\Big\{v\in Q\mid d_P(v)=i,\ d_M(v)=j,\ 0\le j\le\frac{r-1}{2},\ j+1\le i\le r-j\Big\},\\M_{ij}&=\Big\{v\in M\mid d_P(v)=i,\ d_Q(v)=j,\ 0\le j\le r-1,\ \Big\lfloor\frac{r-j}{2}\Big\rfloor+1\le i\le r-j\Big\}.\end{aligned}$$

令 $|P_{ij}|=p_{ij}$, $|Q_{ij}|=q_{ij}$ 和 $|M_{ij}|=m_{ij}$, 则

$$p=\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j}p_{ij},\qquad q=\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}q_{ij},\qquad m=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}m_{ij}.$$

令

$$P' = \bigcup_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}, \qquad Q' = \bigcup_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} Q_{i+1,i}, \qquad M' = \bigcup_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} M_{\frac{r-2i+1}{2},2i}$$

显然，每个点 $v \in P' \cup Q' \cup M'$, 在 f 下是 G 的临界点，即 $f[v] = 1$; 而对每个点 $v \in (V - P' \cup Q' \cup M')$, 有 $f[v] \geq 2$. 通过计算边数 $e(P,Q)$, $e(Q,M)$, 和 $e(P,M)$. 我们得到下列等式：

$$\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1-2j} i \cdot p_{ij} = e(P,Q) = rq - \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=j+1}^{r-j} (r-i-j) \cdot q_{ij} - \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=j+1}^{r-j} j \cdot q_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=j+1}^{r-j} j \cdot q_{ij} = e(Q,M) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=\lfloor \frac{r-j}{2} \rfloor+1}^{r-j} j \cdot m_{ij}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1-2j} j \cdot p_{ij} = e(P,M) = rm - \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=\lfloor \frac{r-j}{2} \rfloor+1}^{r-j} (r-i-j) \cdot m_{ij} - \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=j+1}^{r-j} j \cdot q_{ij}. \tag{3}$$

根据引理 1, 对点 $v \in P - P'$, 存在一个点 $u \in N(v)$, 使得 $f[u] = 1$. 因此，对任意点 $v \in P - P'$, 总存在 $P' \cup Q' \cup M'$ 中一个点与 v 相邻，所以我们可以得到：

$$\begin{aligned} & p - p' \leq e(P-P', P' \cup Q' \cup M') = e(P-P', P') + e(P-P', Q' \cup M') \\ = & \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} e(P-P', P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}) + e(P-P', Q' \cup M'). \end{aligned} \tag{4}$$

进一步，注意到对每个点 $v \in P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$, 一定存在 v 的一个邻点 u 满足 $f[u] = 1$, 也即， $u \in P' \bigcup M' \cup Q'$. 若 $u \in P'$, 则 v 至多邻接 $P - P'$ 中的 $\frac{r-1}{2} - i$ 个点. 但是，若 $u \in M' \cup Q'$, 则 v 至多与 $P - P'$ 中的 $\frac{r+1}{2} - i$ 个点相邻. 因此, 可把 $P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$ 划分为两个子集 $P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} = \{v \in P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} | d_{P-P'}(v) = \frac{r+1}{2} - i\}$ 和 $P''_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} = P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} - P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$. 设 $|P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}| = p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$, 则 $|P''_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}| = p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} - p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$. 因每个点 $v \in P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}$ 至少邻接 $Q' \cup M'$ 中的一个点，所以 $p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} \leq e(P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}, Q' \cup M')$. 因此，可得：

$$\begin{aligned} & e\Big(P-P', P_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big) = e\Big(P-P', P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big) + e\Big(P-P', P''_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big) \\ \leq & \Big(\frac{r+1}{2} - i\Big) p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \Big(\frac{r-1}{2} - i\Big) \Big(p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} - p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big) \\ = & p'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \Big(\frac{r-1}{2} - i\Big) p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} \\ \leq & e\Big(P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}, Q' \cup M'\Big) + \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式代入 (4) 式得：

$$p - p' \leq \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \Big[e\Big(P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}, Q' \cup M'\Big) + \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big] + e(P-P', Q' \cup M')$$

$$\le \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} e\Big(P'_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}, Q' \cup M'\Big) + e(P-P', Q'\cup M')$$

$$\le \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + e(P, Q'\cup M')$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} (i+1) q_{i+1,i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i+1}{2} m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}.$$

下一步，我们开始建立 $\Gamma_t^-(G)$ 的上界，首先可得：

$$\begin{aligned} n =& q+m+p = q+m+p-p'+p' \\ \le& (q+m) + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} (i+1) q_{i+1,i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i+1}{2} m_{\frac{r-2i+1}{2},2i} + p' \\ =& (2r+1)(q+m) - a. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} a = 2r(q+m) - \Big[&\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} (i+1) q_{i+1,i} \\ &+ \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i+1}{2} m_{\frac{r-2i+1}{2},2i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} \Big]. \end{aligned}$$

所以 $q+m \ge \frac{1}{2r+1} n + \frac{1}{2r+1} a$.

故

$$p = n-(q+m) \le n - \Big(\frac{1}{2r+1} n + \frac{1}{2r+1} a\Big) = \frac{2r}{2r+1} n - \frac{1}{2r+1} a. \tag{6}$$

另一方面：

$$\begin{aligned} p =& p-p'+p' \\ \le& \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i-1}{2} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} (i+1) q_{i+1,i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \frac{r-2i+1}{2} m_{\frac{r-2i+1}{2},2i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}} \\ =& \frac{2r^2+4r-2}{3r^2-4r-1} \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij} - \frac{2r^2+4r-2}{3r^2-4r-1} \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij} + 2r(q+m) - a. \end{aligned}$$

将 (3) 式代入上式得： $p \le \frac{2r^3+4r^2-2r}{3r^2-4r-1} m - \frac{2r^2+4r-2}{3r^2-4r-1} b$. 这里

$$\begin{aligned} b =& \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=\lfloor \frac{r-j}{2} \rfloor+1}^{r-j} (r-i-j)\cdot m_{ij} + \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij} \\ &+ \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij} + \frac{3r^2-4r-1}{2r^2+4r-2} a - \frac{2r(3r^2-4r-1)}{2r^2+4r-2}(q+m).. \end{aligned}$$

所以

$$m \geq \frac{3r^2-4r-1}{2r^3+4r^2-2r}p + \frac{2r^2+4r-2}{3r^2-4r-1}\cdot\frac{3r^2-4r-1}{2r^3+4r^2-2r}b = \frac{3r^2-4r-1}{2r^3+4r^2-2r}p + \frac{b}{r}.$$

故

$$\Gamma_t^-(G) = p - m \leq p - \Big(\frac{3r^2-4r-1}{2r^3+4r^2-2r}p + \frac{b}{r}\Big) = \frac{2r^3+r^2+2r+1}{2r^3+4r^2-2r}p - \frac{b}{r}.$$

将 (6) 式代入上式得：

$$\begin{aligned}\Gamma_{t^-}(G) \leq& \frac{2r^3+r^2+2r+1}{2r^3+4r^2-2r}\Big(\frac{2r}{2r+1}n - \frac{1}{2r+1}a\Big) - \frac{b}{r}\\ =&\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n - \frac{r^2+1}{2r^3+4r^2-2r}a - \frac{b}{r}\\ =&\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n - \Big(\frac{r^2+1}{2r^3+4r^2-2r}a + \frac{b}{r}\Big)\\ =&\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n - \frac{1}{2r^3+4r^2-2r}\big[(r^2+1)a + (2r^2+4r-2)b\big]\\ =&\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n - \frac{1}{2r^3+4r^2-2r}c.\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}c =&(r^2+1)a + (2r^2+4r-2)b\\ =&(r^2+1)a + (2r^2+4r-2)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij} + \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}\\ &+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij} + \frac{3r^2-4r-1}{2r^2+4r-2}a - \frac{2r(3r^2-4r-1)}{2r^2+4r-2}(q+m)\Big]\\ =&(4r^2-4r)a + (2r^2+4r-2)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij} + \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}\\ &+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}] - 2r(3r^2-4r-1)(q+m)\\ =&2(r^2+1)(rq+rm) + (2r^2+4r-2)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij} + \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}\\ &+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big] - (4r^2-4r)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\\ &+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i} + \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big].\end{aligned} \tag{7}$$

将 (1) 式和 (3) 式代入 (7) 式得:

$$\begin{aligned}
c =&2(r^2+1)\Big[\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} i\cdot p_{ij}+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot q_{ij}\\
&+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\\
&+\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij}+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}\Big]\\
&+(2r^2+4r-2)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij}+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}+\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big]\\
&-(4r^2-4r)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i}\\
&+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

上式中关于 p_{ij} 项的和记为 c_p,

$$\begin{aligned}
c_p =&2(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} i\cdot p_{ij}\Big)\\
&+2(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big)+(2r^2+4r-2)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big)\\
&-(4r^2-4r)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big]\\
=&(4r^2+4r)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big)\\
&+2(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} i\cdot p_{ij}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big).
\end{aligned}$$

令 $\frac{r-2i-1}{2}=j$, 则

$$\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}=\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} jp_{r-1-2j,j}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(4r^2+4r)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i-1}{2}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big)\\
=&(4r^2+4r)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} j\cdot p_{ij}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}jp_{r-1-2j,j}\Big)\ge(4r^2-4r)p_{0,\frac{r-1}{2}}.
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
&2(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{r-1-2j} i\cdot p_{ij}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big)\\
\ge&2(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{r-1-2j}{2}} 2i\cdot p_{2i,j}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big)\\
=&4(r^2+1)\Big(\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{r-1-2j}{2}} i\cdot p_{2i,j}\Big)-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}p_{2i,\frac{r-2i-1}{2}}\Big)\ge-(4r^2-4r)p_{0,\frac{r-1}{2}}.
\end{aligned}
$$

综上可得 $c_p\ge 0$.

c 中关于 m_{ij} 项的和记为

$$
\begin{aligned}
c_m=&2(r^2+1)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij}\Big]\\
&+(2r^2+4r-2)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij}\Big]\\
&-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\Big)\\
=&(4r^2+4r)\Big[\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot m_{ij}\Big]-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\Big)\\
=&(4r^2+4r)\Big[\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=\lfloor\frac{r-i}{2}\rfloor+1}^{r-i}(r-i-j)\cdot m_{ji}\Big]-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\Big)\\
\ge&(4r^2+4r)\Big[\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=\lfloor\frac{r-i}{2}\rfloor+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot m_{ji}\Big]\\
&+(4r^2+4r)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(r-2i-\frac{r+1-2i}{2})\cdot m_{\frac{r+1-2i}{2},2i}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(4r^2-4r)\Big(\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\frac{r-2i+1}{2}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\Big)\\
=&(4r^2+4r)\Big[\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=\lfloor\frac{r-i}{2}\rfloor+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot m_{ji}\Big]\\
&+4r\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(r-2i)m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\Big]-4r^2\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\\
=&(4r^2+4r)\Big[\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=\lfloor\frac{r-i}{2}\rfloor+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot m_{ji}\Big]-4r\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}2i\cdot m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\\
\geq&-4r\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}2i\cdot m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}.
\end{aligned}
$$

c 中关于 q_{ij} 项的和记为

$$
\begin{aligned}
c_q=&2(r^2+1)\Big[\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot q_{ij}+2\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}\Big]\\
&+(2r^2+4r-2)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}-(4r^2-4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i}\\
=&2(r^2+1)\Big[\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}(r-i-j)\cdot q_{ij}\Big]+(4r^2+4r)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}\\
&-(4r^2-4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i}+2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}\\
=&2(r^2+1)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{j=i+1}^{r-i}(r-i-j)\cdot q_{ji}\Big]+(4r^2+4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{j=i+1}^{r-i}i\cdot q_{ji}\\
&-(4r^2-4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i}+2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}\\
=&2(r^2+1)\Big[\sum_{i=0}^{\frac{r-3}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot q_{ji}\Big]+\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(r-2i-1)q_{i+1,i}+(4r^2+4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i}i\cdot q_{ji}\\
&+(4r^2+4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}i\cdot q_{i+1,i}-(4r^2-4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(i+1)q_{i+1,i}+2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j}j\cdot q_{ij}\\
\geq&2(r^2+1)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}(r-2i-1)q_{i+1,i}-4r^2\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}q_{i+1,i}+2(r^2+1)\sum_{i=0}^{\frac{r-3}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot q_{ji}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(4r^2+4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i} i\cdot q_{ji}+2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}[2(r^2+1)(r-2i-1)-4r^2]q_{i+1,i}+2(r^2+1)\sum_{i=0}^{\frac{r-3}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i}(r-i-j)\cdot q_{ji}\\
&+(4r^2+4r)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{j=i+2}^{r-i} i\cdot q_{ji}+2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}.
\end{aligned}
$$

当 $i\in[0,\frac{r-1}{2}-1]$ 时， $[2(r^2+1)(r-2i-1)-4r^2]q_{i+1,i}\geq 0$. 所以对于 c_q 来讲，根据以上分析，只有 $q_{\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}}$ 的系数可能为负．再回到 c_q 分析可知， $q_{\frac{r+1}{2},\frac{r-1}{2}}$ 的系数恰好为 0. 故

$$
c_q\geq 2(r^2+1)\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}.
$$

由 (2) 式得

$$
\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j} j\cdot m_{ij}.
$$

所以 $2(r^2+1)\sum\limits_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\sum\limits_{i=j+1}^{r-j} j\cdot q_{ij}$ 可写成 $2(r^2+1)\sum\limits_{j=0}^{r-1}\sum\limits_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j} j\cdot m_{ij}$. 而

$$
2(r^2+1)\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=\lfloor\frac{r-j}{2}\rfloor+1}^{r-j} j\cdot m_{ij}-4r\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}2i\cdot m_{\frac{r-2i+1}{2},2i}\geq 0.
$$

故 $c_m+c_q\geq 0$. 所以 $\Gamma_t^-(G)\leq\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n$.

下面来说明这个界是精确的，即有一类图的值可达到 $\frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n$. 我们定义一组图 $\mathcal{F}=\{G_{k,l}\mid k\geq 1,\ l\geq 1\}$. 它的点集为 $\bigcup\limits_{i=1}^{5}A_i$, $|A_i|=a_i$, 其中 $a_1=l$, $a_2=k$, $a_3=\frac{2r}{r-1}l-\frac{(r-3)(r+1)}{2(r-1)}k$, $a_4=\frac{r+1}{2}k$, $a_5=rl-(r+1)k$. 边的构造如下： A_1 为独立集， A_2 为 $\frac{r-1}{2}$ 正则图． A_3 为 1 正则图， A_4 为独立集， A_5 为 $r-1$ 正则图． A_2 中的每个点连接 A_4 中的 $\frac{r+1}{2}$ 个点，并且， A_4 中的每个点恰好连接 A_2 中的一个点． A_1 中的每个点连接 $A_3\bigcup A_4$ 中的 r 个点，并且 A_4 中的每个点恰好连接 A_1 中的 $\frac{r-3}{2}$ 个点， A_3 中的每个点恰好连接 A_1 中的 $\frac{r-1}{2}$ 个点． A_3 中的每个点连接 A_5 中 $\frac{r-1}{2}$ 个点， A_4 中的每个点连接 A_5 中的 $\frac{r-1}{2}$ 个点，并且 A_5 中每个点恰好连接 $A_3\cup A_4$ 中的一个点．这样 $G_{k,l}$ 就是一个 r 正则图．并且 A_1, A_2 中的点赋值为 -1, A_3, A_4, A_5 中的点赋值为 $+1$. 则：

$$
\begin{aligned}
\omega(f)&=rl+(r+1)k+\frac{r+1}{2}k+\frac{2r}{r-1}l-\frac{(r-3)(r+1)}{2(r+1)}k-l-k=\frac{r^2+1}{r-1}(k+l),\\
n&=rl+(r+1)k+\frac{r+1}{2}k+\frac{2r}{r-1}l-\frac{(r-3)(r+1)}{2(r-1)}k+l+k=\frac{r^2+2r-1}{r-1}(k+l).
\end{aligned}
$$

3 结束语

本文给出了度为奇数的正则图的 $\Gamma_t^-(G)$ 的可达上界. 对于度为偶数的正则图，还有待我们继续探索.

参 考 文 献

[1] West D B. Introduction to Graph Theory, 2nd ed., Prentice Hall, Inc., 2001

[2] Harris L, Hattingh J H. The Algorithmic Complexity of Certain Functional Variations of Total Domination in Graphs. *Australasian J. Combinatorics*, 2004, 29: 143–156

[3] Yan H, Yang X Q, Shan E F. Upper Minus Total Domination in Small-degree Regular Graphs. *Discrete Math.*, 2007, 307: 2453–2463

[4] Wang H C, Shan E F. Upper Minus Total Domination of a 5-regular Graph, to appear in Ars Combinatoria

Upper Minus Total Domination of Regular Graphs

WU JIANGANG

(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241)

MIAO ZHENKE

(*Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, Xuzhou* 221116)

LÜ CHANGHONG

(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200241)

(*E-mail: chlu@math.ecnu.edu.cn*)

Abstract A function $f : V(G) \to \{-1, 0, 1\}$ defined on the vertices of a graph G is a minus total dominating function (MTDF) if the sum of its function values over any open neighborhood is at least one. An MTDF f is minimal if there does not exist an MTDF $g : V(G) \to \{-1, 0, 1\}$, $f \neq g$, for which $g(v) \leq f(v)$ for every $v \in V(G)$. The weight of an MTDF is $\omega(f) = \sum\limits_{v \in V(G)} f(v)$. Thus, the upper minus total domination $\Gamma_t^-(G)$ is defined as follows: $\Gamma_t^-(G) = \max\{\omega(f) \mid f$ is minimal minus total dominating functon of $G\}$. In this paper, we prove that $\Gamma_t^-(G) \leq \frac{r^2+1}{r^2+2r-1}n$ for r-regular graph G, when r is odd.

Key words k-regular graphs; upper minus total domination; domination number

MR(2000) Subject Classification 05C69

Chinese Library Classification O157.5