第 31 卷 第 5 期 应用数学学报 Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2008

两个不交图的联图的最小圈基长度 *

马登举
(南通大学理学院，南通 226007)
(E-mail: jdm8691@yahoo.com.cn)
刘凯峰
(南通大学理学院，南通 226007)
(E-mail: liu.kf@163.com)

摘　要　这篇文章中，我们分两种情形分别给出了计算两个不交图的联图的最小圈基长度的公式．作为它们的应用，我们给出了计算 n 个相同的图的联图以及完全 r- 部图等图的最小圈基长度的公式.

关键词　圈空间；基本圈基；最小圈基长度
MR(2000) 主题分类　05C10
中图分类　O157.5

1　引言

本文只考虑简单图．设 $G(V,E)$ 是一个具有顶点集 V 和边集 E 的图． $|V|$ 和 $|E|$ 分别表示 G 的顶点数和边数． E 的所有的子集的集合 $\mathcal{E}$ 在域 $Z_2=\{0,1\}$ 上对于加法： $X\oplus Y=(X\cup Y)\backslash(X\cap Y)$, 数量乘法： $1\bullet X=X,\ 0\bullet X=\emptyset$, 这里 $X,Y\in\mathcal{E}$ ，构成了一个 $|E|$ 维的向量空间 $(\mathcal{E},\oplus,\bullet)$.

图 G 的一个圈向量是指一个空集或者 G 的一个或多个边不交的圈的边集所导出的子图． G 的所有的圈向量构成的集合 $\mathcal{C}$ 是 $(\mathcal{E},\oplus,\bullet)$ 的一个子空间，称为 G 的圈空间． $\mathcal{C}$ 的维数记为 $\beta(G)$, 其值等于 $|E(G)|-|V(G)|+1$. G 的圈空间的一个基 $\mathcal{B}$ 称为 G 的一个圈基．一个圈向量的长度是指这个圈向量所含的边数．而 G 的一个圈基长度是指这个圈基的所有圈向量的长度之和． G 的一个最小圈基是指具有最小长度的一个圈基，它的长度称为 G 的最小圈基长度，记为 $l(G)$.

1987 年， Horton J D[1] 给出了寻找一个图的最小圈基的一个多项式算法．但是，把一个图的最小圈基长度用这个图的顶点数和边数表示出来却很有意义．它不仅揭示了一个图的最小圈基长度与顶点数和边数的关系，而且为它的最小圈基长度的计算带来方便． 1998 年， Leydold J 等人 [2] 给出了一个 2- 连通的外平面图 G 的最小圈基长度的计算公式，即 $l(G)=2|E|-|V|$. Imrich W 等人 [3] 给出了两个图的积的最小圈基长度的计算公式．任韩等人 [4] 不仅研究了嵌入在曲面上的图的最小圈基的一些特征，而且给出了像广义 Petersen 图和循环图等图的最小圈基长度的计算公式.

两个不交的图 G 和 H 的联图 $G\vee H$ 是把 G 的每个顶点和 H 的所有顶点都用边连

本文 2008 年 4 月 11 日收到．2008 年 8 月 22 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10671073) 和南通大学引进人才科研启动基金 (03080045) 资助项目.

接起来所得到的图. 两个不交的图的联图在图论中有一定的地位. 例如, $K_m \vee (K_m^c + K_{n-2m})(1 \le m < \frac{n}{2})$ 不是 Hamilton 图 [5], 这里 K_m^c 是完全图 K_m 的补图. 再比如, $K_3 \vee (n-3)K_1$ 是唯一的使式子 $\rho(G) \le \sqrt{3n-8}$ 中等号成立的图, 这里 G 是不含 K_5-minor 的图而 $\rho(G)$ 表示 G 的谱半径 [6].

在这篇文章中, 我们将研究两个不交的图的联图的最小圈基长度问题. 本文中没有定义的术语参见 [5] 和 [7].

2 至少有一个图是连通图的两个不交图的联图的最小圈基长度

我们先叙述关于一个连通图 G 的圈基的一些事实. 设 T 是 G 的一棵支撑树, 则对于每一条不在 T 上的边 e, $T \cup \{e\}$ 中都有唯一的一个圈与之相应, 这个圈称为关于 T 的一个基本圈. 关于 T 的所有的基本圈构成了 G 的一个圈基, 称为关于 T 的 G 的一个基本圈基.

设 G 是一个 2- 连通的平面图. 如果 G 嵌入到平面上, 那么这个嵌入有 $|E|-|V|+2$ 个面, 且每个面的边界都是一个圈, 而其中的 $|E|-|V|+1$ 个面的边界就构成了 G 的一个圈基.

定理 2.1 设 G_1 和 G_2 是两个不交的图, 且 G_1 是至少有两个顶点的连通图, 则 $G_1 \vee G_2$ 的最小圈基的长度 $l(G_1 \vee G_2) = 3[|E(G_1)|+|E(G_2)|+(|V(G_1)|-1)(|V(G_2)|-1)]$.

证 设 $V(G_1)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$. 令 $G=G_1 \vee G_2$. 于是, $\beta(G)=|E(G)|+|V(G)|-1=\big[|E(G_1)|+|E(G_2)|+|V(G_1)||V(G_2)|\big]-\big[|V(G_1)|+|V(G_2)|\big]+1=|E(G_1)|+|E(G_2)|+(|V(G_1)|-1)(|V(G_2)|-1)$.

我们取 G 的一棵支撑树 T 使得 G_1 的每一个顶点都与 v_1 相邻, 且 G_2 的每一个顶点都与 u_1 相邻. 树 T 如图 1 所示.

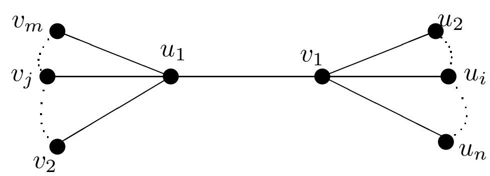

图 1

设 $\mathcal{B}$ 是关于 T 的 G 的一个基本圈基. 则 $\mathcal{B}$ 中每一个圈向量都是一个圈. 我们把 $\mathcal{B}$ 分成两个子集 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$. $\mathcal{B}_1$ 由 $|E(G_1)|+|E(G_2)|$ 个 3- 圈组成. 其中, 每一个 3- 圈具有形式 $u_1v_sv_tu_1$ 或者 $v_1u_xu_yv_1$, 这里 v_sv_t 和 u_xu_y 分别是 G_1 和 G_2 中的边. $\mathcal{B}_2$ 由 $(|V(G_1)|-1)(|V(G_2)|-1)$ 个 4- 圈组成. 其中, 每一个 4- 圈具有形式 $u_1v_1u_iv_ju_1$, 这里 $2 \le i \le n$ 以及 $2 \le j \le m$. 设 $\mathcal{B}_2^j$ 是 $\mathcal{B}_2$ 中含有顶点 v_j 的所有圈组成的集合, 则 $\mathcal{B}_2^j$ 包含 $n-1$ 个 4- 圈. 于是, $\mathcal{B}_2=\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{B}_2^j$.

下面, 我们将通过把 $\mathcal{B}_2$ 中的一个 4- 圈用一个 3- 圈替换的方法, 把 $\mathcal{B}$ 修改为 G 的一个最小圈基.

因为 G_1 是至少有两个顶点的连通图, 所以我们可以取得 G_1 的一棵以 u_1 为根的支撑树 T_1. 设 C 是 $\mathcal{B}_2^j$ 中的一个圈, 且 $C=u_1v_1u_{i_p}v_ju_1$. 设在 T_1 中唯一一条从 u_1 到 u_{i_p} 的路 $P=u_1u_{i_1}\cdots u_{i_{p-1}}u_{i_p}$. 由 P 的顶点和 v_1, v_j 导出的子图是一个 2- 连通的平面图, 如图 2 所示.

令 $i_0=1$. 设 $C'_q=v_1u_{i_{q-1}}u_{i_q}v_1$, 这里 $q=1,2,\cdots,p$. 显然, $C'_q \in \mathcal{B}_1$. 再设

$C"_q = v_j u_{i_{q-1}} u_{i_q} v_j$, 这里 $q = 1, 2, \cdots, p$. 于是,

$$C = \Big[\bigoplus_{q=1}^{p} C'_q\Big] \oplus \Big[\bigoplus_{q=1}^{p} C"_q\Big]. \tag{1}$$

现在，将 $\mathcal{B}_2^j$ 的圈 C 由 $C"_p$ 来代替，即 4- 圈 $u_1v_1u_{i_p}v_ju_1$ 被 3- 圈 $v_ju_{i_{p-1}}u_{i_p}v_j$ 代替．上述过程称为 4- 圈的替换．当 u_{i_p} 取遍 $V(G_1)-\{u_1\}$ 中的顶点时， $\mathcal{B}_2^j$ 就被一个 3- 圈的集合 $\mathcal{A}^j$ 替换．因为在 T_1 中有唯一一条从 u_1 到 u_{i_p} 的路，所以，当 u_{i_p} 取遍 $V(G_1)-\{u_1\}$ 中的顶点时， $\mathcal{A}^j$ 中的任何两个圈都是不同的．

将 $\mathcal{B}_2$ 中其它的子集进行类似 $\mathcal{B}_2^j$ 的 4- 圈替换．这样， $\mathcal{B}_2$ 就被 $\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j$ 替换．

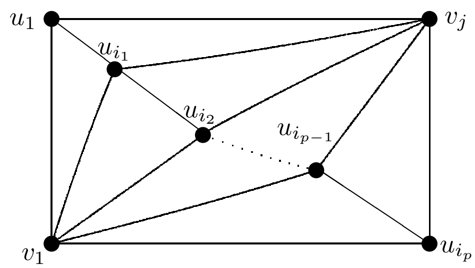

图 2

现在，我们证明 $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 是 G 的一个圈基．因为 $\mathcal{B}$ 是 G 的一个圈基，所以 $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 的任意一个圈都可以由 $\mathcal{B}$ 生成．反之，设 C 是 $\mathcal{B}$ 的任意一个圈．如果 $C\in\mathcal{B}_1$, 那么它可以 $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 生成．如果 $C\in\mathcal{B}_2$, 那么存在某个整数 j 使得 $C\in\mathcal{B}_2^j$, 不妨设 $C=u_1v_1u_{i_p}v_ju_1$. 取 G_1 的以 u_1 为根的与 T_1 相同的一棵支撑树，由 (1) 式知 C 可以由 $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{A}^j$ 生成．因此， $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 等价．这样， $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 是 G 的一个圈基.

考虑到 $\mathcal{B}_1\cup\big[\bigcup\limits_{j=2}^{m}\mathcal{A}^j\big]$ 的每个圈都是 3- 圈，则它就是 G 的一个最小圈基．因此， G 的最小圈基长度 $l(G)=3\big[|E(G_1)|+|E(G_2)|+(|V(G_1)|-1)(|V(G_2)|-1)\big]$.

n 个相同的连通图 G 的联图 G^n 归纳定义如下：$G^1=G$; 当 $n>1$ 时, $G^n=G\vee G^{n-1}$. 于是， $|V(G^n)|=n|V(G)|$ 以及 $|E(G^n)|=n|E(G)|+\frac{n(n-1)}{2}|V(G)|^2$. 应用数学归纳法，易证得下面的结论.

定理 2.2 设 G 是一个连通图且 n 是大于 1 的整数，则 G^n 的最小圈基长度 $l(G^n)=3\big[n|E(G)|+\frac{n(n-1)}{2}|V(G)|^2-n|V(G)|+1\big]$.

设 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 都是正整数．一个图 G 称为一个完全 r- 部图 $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$, 如果

(1) $V(G)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_r$,

(2) 当 $1\le i<j\le r$ 时， $V_i\cup V_j=\emptyset$,

(3) $|V_i|=n_i$,

(4) V_i 的任何两顶点不相邻，但是 V_i 的任何一个顶点都与 $V_j(i\neq j)$ 的所有顶点都相邻,

如果 $r \geq 3$, 我们有下面的结论.

定理 2.3 设 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 都是正整数， r 是一个大于 2 的整数， $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$ 是一个完全 r- 部图，则 $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$ 的最小圈基长度是

$$l(K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}) = 3\Big[\frac{1}{2}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{r} n_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{r} {n_i}^2\Big) - \sum_{i=1}^{r} n_i + 1\Big].$$

证 由 $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$ 的定义知 $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)} = K_{(n_1,n_2,\cdots,n_{r-1})} \vee K^c_{n_r}$. 因为 $r \geq 3$, 所以 $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_{r-1})}$ 是一个连通图. 考虑到 $\big|V(K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)})\big| = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i$ 以及

$$\begin{aligned}\big|E(K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)})\big| &= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{r} n_i\Big(\sum_{i=1}^{r} n_i - n_i\Big)\Big]\\ &=\frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{r} n_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{r} {n_i}^2\Big],\end{aligned}$$

根据定理 2.1, $K_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$ 的最小圈基长度为

$$3\Big[\frac{1}{2}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{r} n_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{r} {n_i}^2\Big) - \sum_{i=1}^{r} n_i + 1\Big].$$

3 两个不交的且都是不连通的图的联图的最小圈基长度

定理 2.1 的题设要求 G_1 和 G_2 中至少有一个是连通的图. 如果 G_1 和 G_2 都是不连通的图，那么 $G_1 \vee G_2$ 的最小圈基的长度会怎样呢？这一节中，我们将讨论它.

设 $\mathcal{B}$ 是连通图 G 的一个圈基. 再设 $\mathrm{span}_{\mathcal{B}}(C)$ 是 G 的一个圈向量 C 被 $\mathcal{B}$ 表示时那些系数不为零的圈向量组成的集合. 我们有下面的引理.

引理 3.1[8] 设 $\mathcal{B}$ 是连通图 G 的一个圈基, 则 $\mathcal{B}$ 是 G 的一个最小圈基当且仅当 G 的任何一个圈向量 C 满足下面的条件：对于 $\mathcal{B}$ 的任意一个圈向量 B, 如果 $B \in \mathrm{span}_{\mathcal{B}}(C)$, 那末 $|C| \geq |B|$.

定理 3.2 设 G_1 和 G_2 是两个不交的图. 再设 G_1 是一个有 $s(s \geq 2)$ 个分支 H_1, $H_2, \cdots, H_s$ 的不连通图， G_2 是一个有 $r(r \geq 2)$ 个分支 F_1, $F_2, \cdots, F_r$ 的不连通图，则 $G_1 \vee G_2$ 的最小圈基的长度

$$l(G_1 \vee G_2) = 3\big[|E(G_1)| + |E(G_2)| + (|V(G_1)|-1)(|V(G_2)|-1) - (s-1)(r-1)\big] + 4(s-1)(r-1).$$

证 设 H_i 有 n_i 个顶点，这里 $1 \leq i \leq s$. 再设 $V(H_i) = \{u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in_i}\}$. 设 F_j 有 m_j 个顶点，这里 $1 \leq j \leq r$, 再设 $V(F_j) = \{v_{j1}, v_{j2}, \cdots, v_{jm_j}\}$. 令 $G = G_1 \vee G_2$. 于是, $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1 = |E(G_1)| + |E(G_2)| + (|V(G_1)| - 1)(|V(G_2)| - 1)$.

我们取 G 的一棵支撑树 T 使得 G_2 的每一个顶点都与 u_{11} 相邻，而 G_1 的每一个顶点都与 v_{11} 相邻. 树 T 如图 3 所示.

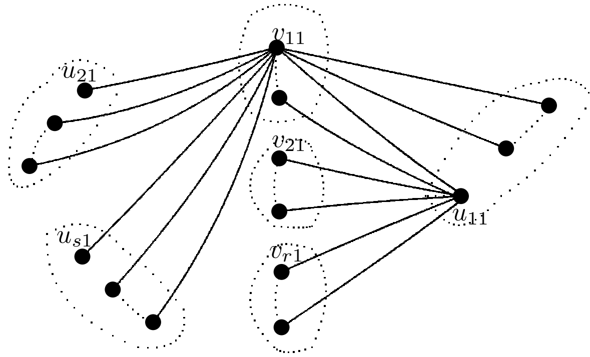

图 3

设 $\mathcal{B}$ 是关于 T 的 G 的一个基本圈基，则 $\mathcal{B}$ 的每个圈向量都是一个圈．$\mathcal{B}$ 分成两个子集 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$. $\mathcal{B}_1$ 是 3- 圈的集合，且 $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_{11}\cup\cdots\cup\mathcal{B}_{1s}$. 其中，$\mathcal{B}_0$ 的每一个 3- 圈具有形式 $u_{11}v_zv_wu_{11}$, 这里 $v_zv_w\in E(G_2)$; $\mathcal{B}_{1i}$ 中的每一个 3- 圈具有形式 $v_{11}u_lu_mv_{11}$, 这里 $u_lu_m\in E(H_i)$. $\mathcal{B}_2$ 是 4- 圈的集合，且 $\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_{21}\cup\mathcal{B}_{22}\cdots\cup\mathcal{B}_{2s}$. 其中，$\mathcal{B}_{2j}$ 中的每一个 4- 圈具有形式 $v_{11}u_{11}v_pu_{jq}v_{11}$, 这里 $v_p\in V(G_2)\backslash\{v_{11}\}$ 以及 $u_{jq}\in V(H_j)$. 注意 $\mathcal{B}_{2j}$ 共含有 $n_j(|V(G_2)|-1)$ 个 4- 圈.

与定理 2.1 的证明类似，我们通过把 $\mathcal{B}_2$ 的一些 4- 圈被 3- 圈替换而将 $\mathcal{B}$ 修改为 G 的一个最小圈基．其步骤如下.

步骤 1　应用定理 2.1 的证明中 4- 圈替换的方法将 $\mathcal{B}_{21}$ 的每个 4- 圈被一个形式为 $u_{1q}v_xv_yu_{1q}$ 的 3- 圈代替．$\mathcal{B}_{21}$ 的每个 4- 圈被替换后所得的集合记为 $\mathcal{A}_{21}$.

步骤 2　当 $2\le j\le s$ 时，对于 $\mathcal{B}_{2j}$, 我们采取下面的步骤.

(1) 设 $\mathcal{B}^1_{2j}$ 是 $\mathcal{B}_{2j}$ 中含有顶点 u_{j1} 的所有圈组成的集合．再设 S_{j1} 是 $\mathcal{B}^1_{2j}$ 中的由形式为 $v_{11}u_{11}v_{i1}u_{j1}v_{11}$ 的圈作成的集合，这里 $2\le i\le r$. 因此，S_{j1} 中有 $r-1$ 个圈.

当 $1\le i\le r$ 时，对于 F_i，取一棵以 v_{i1} 为根的支撑树．对于 $\mathcal{B}^1_{2j}$ 的每个形式为 $v_{11}u_{11}v_{ii_p}u_{j1}v_{11}$ $(i_p\neq 1)$ 的圈，应用定理 2.1 的证明中的 4- 圈替换的方法，它被一个形式为 $u_{j1}v_{ii_p}v_{ii_{p-1}}u_{j1}$ 的 3- 圈替换，如图 4 所示．这样，$\mathcal{B}^1_{2j}$ 中有 $(|V(G_2)|-1)-(r-1)=|V(G_2)|-r$ 个 4- 圈被 3- 圈代替.

(2) 设 $\mathcal{B}^d_{2j}$ 是 $\mathcal{B}_{2j}$ 中含有顶点 u_{jd} 的所有圈组成的集合，这里，$d\neq 1$. 把 $\mathcal{B}^d_{2j}$ 进行与 $\mathcal{B}^1_{2j}$ 类似的处理.

(3) 记 $\mathcal{A}'_{2j}$ 为 (1) 与 (2) 步骤中替换 $\mathcal{B}^1_{2j}$ 中的 4- 圈的 3- 圈的集合．这样，$\mathcal{B}^1_{2j}$ 中共有 $n_j(r-1)$ 个 4- 圈未被替换．设 S_j 是这些未被替换的 4- 圈构成的集合，则 $S_j=S_{j1}\cup S_{j2}\cup\cdots\cup S_{jn_j}$.

(4) 我们将 S_j 中的 $(n_j-1)(r-1)$ 个 4- 圈用 3- 圈替换．其方法如下：先固定 S_{j1}. 再在 $S_j\backslash S_{j1}$ 中取一个圈，不妨设为圈 C, 而 $C=v_{11}u_{11}v_{i1}u_{jq_p}v_{11}$. 在 H_j 中取一棵以 u_{j1} 为根的支撑树 T'. 于是，在 T' 中有唯一一条从 u_{j1} 到 u_{jq_p} 的路 $Q=u_{jq_1}u_{jq_2}\cdots u_{jq_p}$, 这里 $q_1=1$. 设 $D=v_{11}u_{11}v_{i1}u_{j1}v_{11}$. 再设 $C'_k=v_{11}u_{jq_{k-1}}u_{jq_k}v_{11}$ 和 $C"_k=v_{i1}u_{jq_{k-1}}u_{jq_k}v_{i1}$, 这里 $2\le k\le p$. 于是，

$$C=\left[\bigoplus\nolimits_{k=2}^{p}C'_k\right]\oplus\left[\bigoplus\nolimits_{k=2}^{p}C"_k\right]\oplus D. \tag{2}$$

现在，C 被 $C"_p$ 替换，即圈 $v_{11}u_{11}v_{i1}u_{jq_p}v_{11}$ 被圈 $v_{i1}u_{jq_{p-1}}u_{jq_p}v_{i1}$ 替换，如图 5 所示．当 u_{jq_p} 取遍 $V(H_j)\backslash\{u_{j1}\}$ 中的顶点时，$S_j\backslash S_{j1}$ 被一个 3- 圈的集合 $\mathcal{A}"_{2j}$ 替换.

(5) 设 $\mathcal{A}_{2j}=\mathcal{A}'_{2j}\cup\mathcal{A}"_{2j}\cup S_{j1}$. 这样, $\mathcal{B}_{2j}$ 就被 $\mathcal{A}_{2j}$ 替换, 且 $\mathcal{A}_{2j}$ 中的任何两个圈是不同的.

设 $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_{21}\cup\mathcal{A}_{22}\cdots\cup\mathcal{A}_{2s}$. 注意 $\mathcal{A}_{2j}$ 中的子集 S_{j1} 包含 $r-1$ 个 4- 圈, 这里 $2\le j\le s$. 设 $\mathcal{A}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{A}_2$. 设 B 是 $\mathcal{B}$ 的任意一个圈. 如果 $B\in\mathcal{B}_1$, 那么它可以由 $\mathcal{A}$ 生成. 如果 $B\in\mathcal{B}_2$, 那么存在某个整数 j 使得 $C\in\mathcal{B}_{2j}$, 由上面的步骤 1 和步骤 2 可知, B 可由 $\mathcal{A}$ 生成. 又 $\mathcal{A}$ 中的任一个圈可由 $\mathcal{B}$ 生成, 所以, $\mathcal{A}$ 等价于 $\mathcal{B}$. 因此, $\mathcal{A}$ 是 G 的一个圈基.

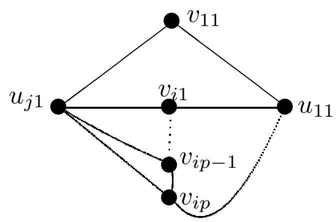

图4

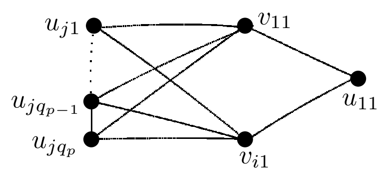

图5

现在我们证明 $\mathcal{A}$ 是 G 的一个最小圈基. 在 G 中任取一个圈向量 C. 如果 $|C|\ge 4$, 那么对于 $\mathcal{A}$ 中任意一个圈 B 有 $|C|\ge|B|$. 如果 $|C|=3$, 那么 C 是一个圈. 我们考虑下面的情形.

情形 1 C 是 G_1 中的一个圈. 此时, C 是 G_1 的某个分支 H_i 中的一个圈. 于是, C 由 $\mathcal{B}_{1i}$ 生成.

情形 2 C 是 G_2 中的一个圈. 则 C 由 $\mathcal{B}_0$ 生成.

情形 3 C 既不是 G_1 也不是 G_2 的一个圈, 则它包含两条从 G_1 到 G_2 的有一个公共端点的边. 设这个公共端点为 w. 我们考虑下面两种情形.

子情形 1 $w\in V(G_1)$. 如果 w 在 H_1 中, 那么 C 或在 $\mathcal{B}_0$, 或在 $\mathcal{A}_{21}$ 中. 如果 w 不在 H_1 中, 不妨设 $C=wv_{ip}v_{iq}w$, 这里, $v_{ip}v_{iq}\in E(F_i)$ 且 $i\ge 2$, 那么 C 在 $\mathcal{A}'_{2j}$ 中. 因此, C 可由 $\mathcal{A}$ 的 3- 圈生成.

子情形 2 $w\in V(G_2)$. 类似于子情形 1, 可证明 C 由 $\mathcal{A}$ 的 3- 圈生成.

由引理 3.1, $\mathcal{A}$ 是 G 的最小圈基. 考虑 $\mathcal{A}$ 有 $(s-1)(r-1)$ 个 4- 圈且其它的圈都是 3- 圈, 所以命题中的公式成立.

因为一个完全二部图 $K_{n,m}$ 是两个无边的不交的图的联图, 由定理 3.2, $K_{n,m}$ 的最小圈基的长度 $l(K_{n,m})=4(n-1)(m-1)$.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Horton J D. A polynomial-time Algorithm to Find the Shortest Cycle Base of a Graph. *SIAM. J. Comput.*, 1987, 16: 359–366

[2] Leydold J, Stadler P F. Minimum Cycle Bases of Outerplanar Graphs. *Electronic J. Combin.*, 1998, 5 #16: 1–14

[3] Imrich W, Stadler P F. Minimum Cycle Bases of Product Graphs. *Ausrealasian J. Comb.*, 2002, 26: 233–244

[4] Ren H, Liu Y P, Ma D J, Lu J J. Generating Cycle Spaces for Graphs on Surfaces with Small Genera. *J. European of Combin.*, 2004, 25: 1087–1105

[5] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application. Macmillan, London, New York: Elsevier 1979

[6] Hong Y. Tree-width, cique-minors, and Eigenvalues. *Discrete Math.*, 2004, 274: 281–287

[7] Tian F, Ma C F. Theory of Graph and Network Flow. Beijing: Scientific Press, 1987

[8] Ren H, Deng M. Short Cycle Structures for Graphs on Surfaces and an Open Problem of Mohar and Thomassen. *Science in China* (Series A), 2006, 49(2): 212–224

The Length of the Minimum Cycle Bases of Join of Two Disjoint Graphs

MA Dengju

(*School of Science, Nantong University, Nantong* 226007)

(*E-mail: jdm8691@yahoo.com.cn*)

Liu KaiFeng

(*School of Science, Nantong University, Nantong* 226007)

(*E-mail: liu.kf@163.com*)

Abstract Minimum cycle base of a graph which is the join of two disjoint graphs is discussed according to two cases, and the corresponding formula for length of minimum cycle base of each case is given. As applications of two formulae, it gives formulae for lengths of minimum cycle bases of some special graphs, such as the graph which is the join n isomorphic graphs and the complete r-partite graph, etc.

Key words cycle space; minimum cycle base; foundamental cycle base

MR(2000) Subject Classification 05C10

Chinese Library Classification O157.5