第 31 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 31 No. 1
2008 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2008

具有性质 $c_{r+1}=3,\ a_{r+1}=3a+1$ 或 $4a$ 的 $(a+1,3)$ 型距离正则图 *

高锁刚
(河北师范大学数学与信息科学学院，石家庄 050016)
(E-mail: sggao@heinfo.net)

步玉恩
(河北衡水学院分院数学系，衡水 053000)

摘　要　设 Γ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图，其中 $a\geq 2$. 用 $l(c,a,b)$ 表示交叉阵列 $\iota(\Gamma)$ 中列 $(c,a,b)^t$ 的个数，记 $r=r(\Gamma)=l(c_1,a_1,b_1)$, $s=s(\Gamma)=l(c_{r+1},a_{r+1},b_{r+1})$ 及 $t=t(\Gamma)=l(c_{r+s+1},a_{r+s+1},b_{r+s+1})$. 那末，若 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}=4a$ 或 $3a+1$, 则 $d=r+t+2$.

关键词　距离正则图；交叉表；团
MR(2000) 主题分类　05C75
中图分类　o157.5

1　引言

设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是一个连通无向的简单有限图，其中 $V\Gamma$ 是顶点集，$E\Gamma$ 是边集. 用 $\partial(x,y)$ 表示 x 与 y 的距离，$d=d(\Gamma)=\max\{\partial(x,y)\mid x,y\in V\Gamma\}$ 表示 Γ 的直径. 我们称 Γ 是距离正则的，如果对所有的整数 h,i,j $(0\leq h,\ i,j\leq d)$ 及所有满足 $\partial(x,y)=h$ 的 $x,y\in V\Gamma$, 整数

$$p_{ij}^h:=\left|\{z\in X|\partial(x,z)=i,\ \partial(y,z)=j\}\right|$$

不依赖于 x 和 y 的选取. 称整数 p_{ij}^h 为 Γ 的 交叉数. 记 $a_i=p_{1i}^i$ $(0\leq i\leq d)$, $b_i=p_{1i+1}^i$ $(1\leq i\leq d)$, $c_i=p_{1i-1}^i$ $(1\leq i\leq d)$, $k_i=p_{ii}^0$ $(0\leq i\leq d)$. 注意 $c_0=a_0=b_d=0$. 我们称 $b_0=k$ 为 Γ 的价. 关于距离正则图的更多信息，请参看 [1,2].

设 $l(c,a,b)$ 表示在交叉阵列 $\iota(\Gamma)$ 中列 $(c,a,b)^t$ 的个数，记 $r=r(\Gamma)=l(c_1,a_1,b_1)$, $s=s(\Gamma)=l(c_{r+1},a_{r+1},b_{r+1})$ 及 $t=t(\Gamma)=l(c_{r+s+1},a_{r+s+1},b_{r+s+1})$.

一个距离正则图 Γ 叫做 (m_1,m_2) 型的，如果对任意 $\alpha\in V\Gamma$, 有 $\Gamma(\alpha)\simeq(m_2+1)*K_{m_1}$, 这里 K_{m_1} 表示有 m_1 个顶点的完全图. $(m_2+1)*K_{m_1}$ 表示 m_2+1 个 K_{m_1} 的不交并.

如果 $m_2=0$, 显然 Γ 是一个完全图. 下面我们记 $a=a_1$.

Mohar B 等在 [3] 中讨论了 $(a+1,1)$ 的情形，他们证明了如果 $k>2$, 则 Γ 同构于一个 Moore 图的线图或者是一个型为 $(a+1,1)$ 的广义 $2d$ 边形的点图.

本文 2006 年 1 月 9 日收到. 2007 年 9 月 24 日收到修改稿.
* 河北省自然科学基金 (A20005000141) 资助项目.

Biggs N L 等在 [4] 中讨论了 $(1,2)$ 型的情形，并给出了完全分类；Hiraki A 等在 [5] 中讨论了 $(2,2)$ 型的情形，证明了在这种情况下只有四个图；Yamazaki N 在 [6] 中讨论了 $(a+1,2)$, $a\geq 2$ 型的情形，并得出以下结论：(1) 如果 $a\geq 1$, $c_{r+1}\geq 2$ 则 $c_{r+1}=3$ 且 $d=r+1$ 或 $c_{r+1}=2$ 且 $d\leq r+2$. (2) 如果 $a\geq 2$ 且 $c_{r+1}=1$ 则 $d\leq r+2$ 或 Γ 是价为 3 的距离双正则图的距离 -2 图.

本文讨论 $(a+1,3)$ 型的情形．通过计算该图不同子图间的边数并结合 [5] 和 [6] 的方法得到了直径与整数 r,s 的关系．我们希望这些结果对 $(a+1,3)$ 型图的完全分类能起到抛砖引玉的作用．主要结果如下：

定理 1 设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图，其中 $a\geq 2$. 若 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}=4a$ 或 $3a+1$, 则 $d=r+t+2$.

2　预备知识

对任意 $0\leq i,j\leq d$, 令 $\Gamma_i(\alpha)=\{x\in\Gamma|\partial(\alpha,x)=i\}$, $\Gamma(\alpha)=\Gamma_1(\alpha)$. 对 Γ 的顶点 α,β, 若 $\partial(\alpha,\beta)=i$, 令

$$
\begin{aligned}
C_i(\alpha,\beta)&=\Gamma_{i-1}(\alpha)\cap\Gamma(\beta),\\
A_i(\alpha,\beta)&=\Gamma_{i}(\alpha)\cap\Gamma(\beta),\\
B_i(\alpha,\beta)&=\Gamma_{i+1}(\alpha)\cap\Gamma(\beta).
\end{aligned}
$$

对子集 $S\subset V\Gamma$, Γ 在 S 上的导出子图仍记为 S. 特别，对 $\alpha,x\in V\Gamma$, $\partial(\alpha,x)=i$, 我们称导出子图 $C_i(\alpha,x)$ 是关于 (α,x) 的 C_i 图，称 $A_i(\alpha,x)$ 是关于 (α,x) 的 A_i 图，称 $B_i(\alpha,x)$ 是关于 (α,x) 的 B_i 图．我们把完全图称为团，而把没有边的子图称为余团．对不同的顶点 x,y, 若 $\partial(x,y)=1$, 我们记 $x\sim y$, 否则，记 $x\not\sim y$. 设 $e(A,B)$ 表示 Γ 的子集 A 和 B 之间的边数，且对任意 $x\in V\Gamma$, 令 $e(\{x\},A)=e(x,A)$.

设 α 和 β 是 Γ 中邻接的两点，令 $D^i_j(\alpha,\beta)=\Gamma_i(\alpha)\cap\Gamma_j(\beta)$. 特别，对固定的一对定点 (α,β), 记 $D^i_j=D^i_j(\alpha,\beta)$. 关于 (α,β) 的交叉表是由点集 $\{D^i_j\}_{i,j}$ $(0\leq i,j\leq d)$ 构成，其中点集之间可能有线相连，即如果 D^i_j 与 D^h_l 间可能有边就在它们之间划一条线，否则不划线．例如，如果 $c_{r+1}\geq 2$, 交叉表的形状如图 2.1 所示.

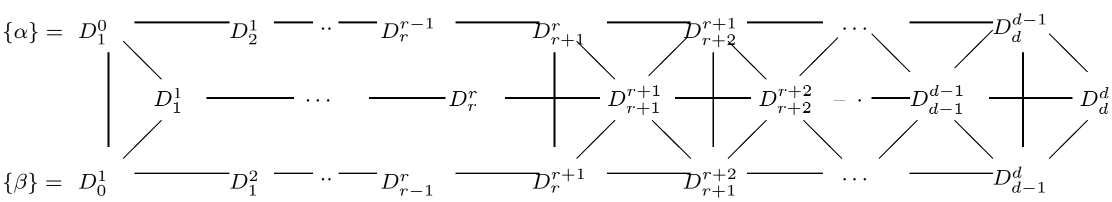

图　2.1

关于交叉表的基本性质见 [6–8]. 特别，下面性质成立.

命题 2.1[7] 设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是直径为 d 的距离正则图，则下列成立.

(1) $b_i=b_{i+1}$ 当且仅当 $e(D^{i+1}_i,D^i_{i+1})=e(D^{i+1}_{i+1},D^{i+1}_i)=0$.

(2) $c_i=c_{i+1}$ 当且仅当 $e(D^{i+1}_i,D^i_i)=e(D^i_{i+1},D^{i+1}_i)=0$.

命题 2.2[6] 设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是一 $(a+1,m_2)$, $a\geq 1$ 型且直径为 d 的距离正则图，则下列 (1)–(4) 成立.

(1) $e(D_i^{i-1}, D_i^i) = e(D_i^{i-1}, D_{i-1}^{i-1}) = e(D_i^{i-1}, D_{i-1}^i) = e(D_{i-1}^i, D_i^i) = e(D_{i-1}^i, D_{i-1}^{i-1}) = 0 \ \ (2 \le i \le r)$;

(2) 设 $x, y \in D_j^{j+1}$, 且 $z \in D_{j-1}^j \ \ (1 \le j \le r)$, 如果 $y \sim x \sim z$, 则 $y \sim z$;

(3) $e(D_r^r, D_r^{r+1}) = e(D_r^r, D_{r+1}^r) = 0$;

(4) 每个 C_{r+1} 图是一个余团.

3 定理的证明

引理 3.1 设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1, 3)$ 的距离正则图，其中 $a \ge 2$, $c_{r+1} = 3$, $a_{r+1} > 3a$, 则子图 $C_{r+2} \simeq m * K_{a_{r+1}-3a+1}$, 其中 $m = 3$ 或 4. 进一步, 若 $m = 4$, 则 $d = r+2$.

证 任取 $x \in \Gamma_{r+1}(\alpha)$, 因为 $c_{r+1} = 3$, 设 $\{x_1, x_2, x_3\} = C_{r+1}(\alpha, x) = \Gamma_r(\alpha) \cap \Gamma(x)$. 设 $X_i = D_1^1(x, x_i) \ (i = 1, 2, 3)$, $B_{r+1} = B_{r+1}(\alpha, x) = \Gamma_{r+2}(\alpha) \cap \Gamma(x)$, 则 $|X_i| = a$. 又因为 C_{r+1} 图是余团，所以 X_i 彼此不交，从而 $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = 3a$, 因为 $a_{r+1} > 3a$ 且 $\Gamma(x) \simeq 4 * k_{a+1}$, 所以存在团

$$X' = (\Gamma(x) \cap \Gamma_{r+1}(\alpha)) \backslash (X_1 \cup X_2 \cup X_3) \quad 且 \quad |X'| = a_{r+1} - 3a,$$

从而点 $x \in \Gamma_{r+1}(\alpha)$ 的邻域结构如图 3.1 所示.

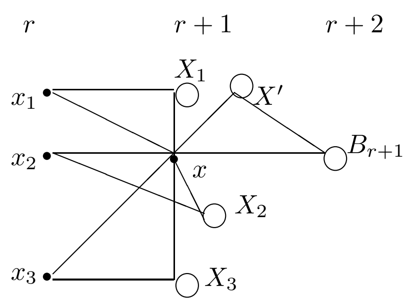

图 3.1

由图 3.1 可以看出，对任意 $y \in \Gamma_{r+2}(\alpha)$ 及任意 $x \in C_{r+2}(\alpha, y) = \Gamma_{r+1}(\alpha) \cap \Gamma(y)$, 有 $y \sim x \in \Gamma_{r+1}(\alpha)$, $y \in X' \cup B_{r+1}$, 从而 $\Gamma(y) \cap \Gamma(x) \cap \Gamma_{r+1}(\alpha) = |X'| = a_{r+1} - 3a$, 因此子图 C_{r+2} 为 m 个 $K_{a_{r+1}-3a+1}$ 的不交并，即 $C_{r+2} \simeq m * K_{a_{r+1}-3a+1}$. 因为每个 C_{r+2} 图包含着一个 C_{r+1} 图，且 C_{r+1} 图是顶点数为 3 的余团，所以 $3 \le m \le 4$.

如果 $m = 4$, 则对任意 $y \in \Gamma_{r+2}(\alpha)$, 有 $\Gamma(y) \cap \Gamma_{r+3}(\alpha) = \emptyset$, 所以 $d = r+2$.

下面考虑 $m = 3$ 的情形，即 $C_{r+2} \simeq 3 * K_{a_{r+1}-3a+1}$.

引理 3.2 设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1, 3)$ 的距离正则图，其中 $a \ge 2$. 如果 $c_{r+1} = 3$, $a_{r+1} > 3a$ 且子图 $C_{r+2} \simeq 3 * K_{a_{r+1}-3a+1}$, 则 $e(D_{r+2}^{r+1}, D_{r+1}^{r+2}) = 0$.

证 若不然，假设存在 $x \in D_{r+1}^{r+2}$, $y \in D_{r+2}^{r+1}$, 使 $x \sim y$. 因为子图 $C_{r+1}(\beta, x)$ 为余团且 $c_{r+1} = 3$, 由图 2.1 可设 $\{x_1, x_2, x_3\} = D_r^{r+1} \cap \Gamma(x) = C_{r+1}(\beta, x)$, 这时 $\{x_1, x_2, x_3\} \subset C_{r+2}(\alpha, x)$, $y \in C_{r+2}(\alpha, x)$, 而 C_{r+2} 图为三个团的不交并，所以 y 必和 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 中一个点相邻，与 $e(D_r^{r+1}, D_{r+2}^{r+1}) = 0$ 矛盾.

引理 3.3 设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1, 3)$ 的距离正则图，其中 $a \ge 2$. 如果 $c_{r+1} = 3, a_{r+1} > 3a$, 则对任意 $x \in D_{r+1}^{r+1}$, 有 $e(x, D_r^r) \le 1$, 并且存在 $x \in D_{r+1}^{r+1}$, 使得 $e(x, D_r^r) = 0$.

证　首先证明对任意 $x\in D_{r+1}^{r+1}$, 有 $e(x,D_r^r)\le 1$. 若不然，假设存在 $x\in D_{r+1}^{r+1}$, 使 $e(x,D_r^r)>1$, 即存在 $y_r,z_r\in D_r^r\cap\Gamma(x), y_r\ne z_r$. 设 $\{y_{r-i}\}=D_{r-i}^{r-i}\cap\Gamma(y_{r-i+1})$, $\{z_{r-i}\}=D_{r-i}^{r-i}\cap\Gamma(z_{r-i+1})$ $(i=1,2,\cdots,r-1)$. 因为 $c_{i+1}=1$, 所以 $y_{r-i}\ne z_{r-i}$. 又因为 D_1^1 是团，所以 $y_1\sim z_1$ 且 $y_1\in\Gamma_r(x)\cap\Gamma(\alpha)$, $z_1\in\Gamma_r(x)\cap\Gamma(\alpha)$. 于是 $\{y_1,z_1\}\subset C_{r+1}(x,\alpha)$, 且 $y_1\sim z_1$, 与 C_{r+1} 图为余团矛盾.

再因为 $b_r\ne 0$, 由图 2.1 可知，必然存在 $x'\in D_{r+1}^{r+1}$, 使 $e(x',D_r^r)=1$.

最后证明存在 $x''\in D_{r+1}^{r+1}$, 使 $e(x'',D_r^r)=0$. 若不然，假设对任意 $x\in D_{r+1}^{r+1}$, 有 $e(x,D_r^r)=1$. 我们用两种方法计算 D_r^r 和 D_{r+1}^{r+1} 之间的边数.

由图 2.1 可知，对任意 $z\in D_r^r$, 有 $e(z,D_{r+1}^{r+1})=b_r$, 所以

$$k\cdot e(D_r^r,D_{r+1}^{r+1})=k\cdot b_r|D_r^r|=k\cdot b_r\cdot p_{r,r}^1=k_rb_rp_{1,r}^r=k_rb_ra_r=k_{r+1}c_{r+1}a_r=3a\cdot k_{r+1}.\quad(1)$$

另一方面，

$$k\cdot e(D_{r+1}^{r+1},D_r^r)=k\cdot|D_{r+1}^{r+1}|=k\cdot p_{r+1,r+1}^1=k_{r+1}\cdot p_{1,r+1}^{r+1}=k_{r+1}a_{r+1}.\qquad(2)$$

由 (1) 式和 (2) 式得 $a_{r+1}=3a$, 与 $a_{r+1}>3a$ 矛盾.

由引理 3.3, 我们如下定义点集 A 和 B:

$$A=\{x\in D_{r+1}^{r+1}|\,e(x,D_r^r)=1\},\qquad B=\{x\in D_{r+1}^{r+1}|\,e(x,D_r^r)=0\}.$$

易知 $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=D_{r+1}^{r+1}$, 并且 $A\ne\emptyset$, $B\ne\emptyset$.

引理 3.4　设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图，并且 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}>3a$, 子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$. 那么 $a\ge 2$, 且对任意 $x\in D_{r+2}^{r+2}$, 若 $x\sim y\in A\subset D_{r+1}^{r+1}$, 则 $e(x,D_{r+2}^{r+1})=e(x,D_{r+1}^{r+2})=0$, 并且 $\Gamma(x)\cap D_{r+1}^{r+1}\subset A$, 即 $C_{r+2}(\alpha,x)\subset A$; 对任意 $z\in D_{r+1}^{r+2}\cup D_{r+2}^{r+1}$, 若 $z\sim w\in A$, 则 $\Gamma(z)\cap D_{r+1}^{r+1}\subset A$.

证　因为 $y\in A$, 所以存在 $\gamma_1\in D_1^1$, 使 $\partial(\gamma_1,y)=r$, 从而 $\partial(\gamma_1,x)=r+1$, 即 $\gamma_1\in C_{r+2}(x,\alpha)$. 又因为 C_{r+2} 图为 3 个 $K_{a_{r+1}-3a+1}$ 的不交并，注意 D_1^1 为团，所以 D_1^1 中共有 $a_{r+1}-3a+1$ 个点到 x 距离为 $r+1$, 设为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{a_{r+1}-3a+1}$. 若 $a=1$, 则 D_1^1 中有 $a_{r+1}-3+1>1$ 个点到 x 距离为 $r+1$, 即至少有 2 个点到 x 距离为 $r+1$, 但 $|D_1^1|=a=1$, 矛盾. 所以若 $c_{r+1}=3, a_{r+1}>3a$, 则 $a\ge 2$. 下面总设 $a\ge 2$.

因为 $c_{r+1}(\gamma_i,x)=3$, 并且子图 $C_{r+1}(\gamma_i,x)$ 为余团, 所以存在余团 $\{u_i,v_i,w_i\}\subset D_{r+1}^{r+1}$, 并且 $\{u_i,v_i,w_i\}=C_{r+1}(\gamma_i,x)$ $(i=1,2,\cdots,a_{r+1}-3a+1)$. 又因为子图 C_{r+1} 为余团, 所以若 $i\ne j$, 则 $\{u_i,v_i,w_i\}\cap\{u_j,v_j,w_j\}=\emptyset$, 从而 $D_{r+1}^{r+1}\cap\Gamma(x)$ 中有三个互不相交的 $K_{a_{r+1}-3a+1}$ 团，并且每个 $K_{a_{r+1}-3a+1}\subset A$. 因此子图 $C_{r+2}(\alpha,x)\subset A$ 并且 $C_{r+2}(\alpha,x)\cap D_{r+2}^{r+1}=\emptyset$, 即 $\Gamma(x)\cap D_{r+2}^{r+1}=\emptyset$, $\Gamma(x)\cap D_{r+1}^{r+2}=\emptyset$.

同理可证任意 $z\in D_{r+1}^{r+2}\cup D_{r+2}^{r+1}$, 若 $z\sim w\in A\subset D_{r+1}^{r+1}$, 则 $\Gamma(z)\cap D_{r+1}^{r+1}\subset A$.

引理 3.5　设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图，其中 $a\ge 2$. 如果 $c_{r+1}=3, a_{r+1}>3a$ 且子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$, 则 $s=1$.

证　因为 $a_{r+1}>3a$, 所以 $a_{r+1}-3a+1\ge 2$, 于是 $c_{r+2}=3(a_{r+1}-3a+1)\ge 6$. 而 $c_{r+1}=3$, 故 $c_{r+1}\ne c_{r+2}$, 从而 $s=1$.

当 $a_{r+1}=4a$ 时，定理的证明.

证　因为 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}=4a$, 所以 $b_{r+1}=1$. 而 $\{b_i\}$ 递减，所以 $b_{r+t+1}=1$. 由引理 3.1 及 t 的定义知， $c_{r+2}=c_{r+3}=\cdots=c_{r+t+1}$, $b_{r+2}=b_{r+3}=\cdots=b_{r+t+1}$, 并且 $(c_{r+t+1},a_{r+t+1},b_{r+t+1})\ne(c_{r+t+2},a_{r+t+2},b_{r+t+2})$.

若 $c_{r+t+1}=c_{r+t+2}$, 则 $b_{r+t+1}\neq b_{r+t+2}$. 又因为 $\{b_i\}$ 递减且 $b_{r+t+1}=1$, 所以 $d=r+t+2$.

若 $c_{r+t+1}\neq c_{r+t+2}$. 因为每个 C_i 图均包含着一个 C_{i-1} 图, $(i=r+2,\cdots,r+t+1,r+t+2)$, 因为子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$, 且 $c_{r+2}=c_{r+3}=\cdots=c_{r+t+1}$, 所以子图 $C_{r+t+1}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$. 因为 $b_{r+t}=b_{r+t+1}$, 所以 $e(D^{r+t}_{r+t+1},D^{r+t+1}_{r+t+1})=0$. 现在交叉表如图 3.2 所示.

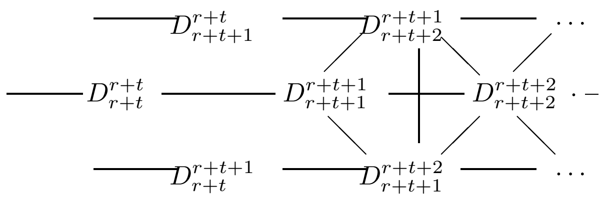

图 3.2

对任意 $x\in D^{r+t+1}_{r+t+2}$, 有

$$\begin{aligned}&c_{r+t+2}(\beta,x)=e(x,D^{r+t}_{r+t+1}\cup D^{r+t+1}_{r+t+1}\cup D^{r+t+2}_{r+t+1})\\=&e(x,D^{r+t}_{r+t+1})+e(x,D^{r+t+1}_{r+t+1}\cup D^{r+t+2}_{r+t+1})\\=&c_{r+t+1}(\alpha,x)+e(x,D^{r+t+1}_{r+t+1}\cup D^{r+t+2}_{r+t+1}).\end{aligned}$$

因为 $c_{r+t+1}\neq c_{r+t+2}$, 所以 $e(x,D^{r+t+1}_{r+t+1}\cup D^{r+t+2}_{r+t+1})\neq 0$.

而 C_{r+t+1} 图为三个团的不交并, 所以 C_{r+t+2} 图为四个团的并, 从而 $d=r+t+2$.

为了证明 $c_{r+1}=3,a_{r+1}=3a+1$ 的情形, 我们首先给出下面的引理.

引理 3.6 设 $\Gamma=(V\Gamma,E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图, 其中 $a\geq 2$. 如果 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}>3a$, 子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$, 则 $e(D^{r+2}_{r+1}\cup D^{r+1}_{r+2},B)=0$.

证 若不然, 假设存在 $x\in D^{r+2}_{r+1}$, 使 $e(x,B)\neq 0$. 由引理 3.4, $e(x,A)=0$. 从而对任意 $\gamma\in D^1_1$, 有 $\partial(x,\gamma)=r+2$. 又因为 $\partial(x,\alpha)=r+2$, 所以

$$D^1_1\cup\{\alpha\}\subset B_{r+1}(x,\beta)=\Gamma_{r+2}(x)\cap\Gamma(\beta).$$

于是 $b_{r+1}(x,\beta)\geq a+1$. 但 $c_{r+1}=3$, 且 $a_{r+1}>3a$, 所以 $b_{r+1}<a+1$, 矛盾. 故 $e(D^{r+2}_{r+1},B)=0$. 同理, $e(D^{r+1}_{r+2},B)=0$. 证毕.

引理 3.7 设 $\Gamma=(X,E)$ 是一个满足 $\Gamma(x)\simeq 4*K_{a+1}$ $(a\geq 2)$ 的直径为 d 的距离正则图. 当 $c_{r+1}=3,3a<a_{r+1}<4a$, 并且子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$ 时, 必有 $e(A,D^{r+2}_{r+2})\neq 0$.

证 因为对任意 $x\in D^{r+1}_{r+2}$, 有子图 $C_{r+2}(\beta,x)\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a+1}$, 且 $|\Gamma(x)\cap D^r_{r+1}|=3=c_{r+1}(\alpha,x)$, 所以 $\Gamma(x)\cap D^{r+1}_{r+1}\simeq 3*K_{a_{r+1}-3a}$. 因此由引理 3.6, $e(D^{r+1}_{r+2},D^{r+1}_{r+1})=e(D^{r+1}_{r+2},A)=3(a_{r+1}-3a)\cdot|D^{r+1}_{r+2}|$, 即

$$k\cdot e(A,D^{r+1}_{r+2})=3(a_{r+1}-3a)\cdot k\cdot p^1_{r+1,r+2}=3(a_{r+1}-3a)\cdot k_{r+1}\cdot b_{r+1}.$$

因为 $a_{r+1}<4a$, 所以 $a_{r+1}-3a<a$, 于是

$$k\cdot e(A,D^{r+1}_{r+2})<3a\cdot k_{r+1}\cdot b_{r+1}.\tag{3}$$

另一方面

$$e(A, D^{r+1}_{r+2} \cup D^{r+2}_{r+2}) = b_{r+1} \cdot |A|, \tag{4}$$

而

$$k \cdot |A| = k \cdot e(D^r_r, D^{r+1}_{r+1}) = k \cdot |D^r_r| \cdot b_r = k \cdot p^1_{r,r} \cdot b_r = k_r a_r b_r = k_{r+1} c_{r+1} a_r = 3a \cdot k_{r+1}. \tag{5}$$

由 (3)–(5) 式可得

$$k \cdot e(A, D^{r+1}_{r+2} \cup D^{r+2}_{r+2}) = k \cdot |A| \cdot b_{r+1} = 3a \cdot k_{r+1} \cdot b_{r+1} > k \cdot e(A, D^{r+1}_{r+2}). \tag{6}$$

由 (6) 式可得 $e(A, D^{r+2}_{r+2}) \neq 0$.

引理 3.8 设 $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ 是直径为 d 且型为 $(a+1,3)$ 的距离正则图，其中 $a \geq 2$. 如果 $c_{r+1}=3, a_{r+1}=3a+1$, 并且子图 $C_{r+2} \simeq 3 * K_{a_{r+1}-3a+1}$, 则对任意 $y \in B \subset D^{r+1}_{r+1}$ 及任意 $\gamma \in D^1_1$, 有 $\partial(y,\gamma) = r+2$. 从而 $e(A,B)=0$.

证　只需证明任意 $y \in B \subset D^{r+1}_{r+1}$ 及任意 $\gamma \in D^1_1$, 均有 $\partial(y,\gamma)=r+2$.

设 $y \in B$, 则 $\alpha \in \Gamma_{r+1}(y)$. 因为子图 $\Gamma_r(y) \cap (\{\beta\} \cup D^1_1) = \emptyset$, 所以子图 $C_{r+1}(y,\alpha) \subset D^1_2$, 从而 $B_{r+1}(y,\alpha) \subset \{\beta\} \cup D^1_1$. 因为 $\partial(y,\beta) = r+1$, 所以 $B_{r+1}(y,\alpha) \subset D^1_1$.

注意 $b_{r+1} = a$, 因此 $B_{r+1}(y,\alpha) = D^1_1$. 从而对任意 $\gamma \in D^1_1$, 有 $\partial(y,\gamma) = r+2$, 即 $e(y,A)=0$. 因此 $e(A,B)=0$.

引理 3.9 设 $\Gamma = (X,E)$ 是一个满足 $\Gamma(x) \simeq 4 * K_{a+1}$ $(a \geq 2)$ 的直径为 d 的距离正则图. 如果 $c_{r+1}=3$, $a_{r+1}=3a+1$, 并且 $C_{r+2} \simeq 3 * K_{a_{r+1}-3a+1}$, 则 $t = l(c_{r+2}, a_{r+2}, b_{r+2}) = 1$, $d = r+3$ 或 $t = l(c_{r+2}, a_{r+2}, b_{r+2}) \geq 2$, 并且 $b_{r+1} = b_{r+2}$.

证　若 C_{r+3} 图为四个团的不交并，则 $d=r+3$. 由引理 3.5 得，　$t=1$.

若 C_{r+3} 图为三个团的不交并，我们证明 $t \geq 2$. 首先证明 $c_{r+2} = c_{r+3}$. 假设 $c_{r+2} \neq c_{r+3}$. 因为 C_{r+2} 图和 C_{r+3} 图均为三个团的不交并，所以 $e(D^{r+2}_{r+3}, D^{r+3}_{r+2}) = 0$, $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+1}_{r+2}) \neq 0$, $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+2}_{r+3}) \neq 0$. 事实上，任取 $x \in D^{r+2}_{r+3}$, 因 C_{r+2} 图是三个团的不交并，所以存在余团 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 使得 $\{x_1,x_2,x_3\} \subset C_{r+2}(\alpha,x)$, 从而 $\{x_1,x_2,x_3\} \subset C_{r+3}(\beta,x)$. 若存在 $y \in \Gamma(x) \cap D^{r+3}_{r+2}$, 则 $y \in C_{r+3}(\beta,x)$. 因为 C_{r+3} 图为三个团的不交并，所以存在 $i \in \{1,2,3\}$ 使得 $x_i \sim y$, 矛盾. 因此 $e(D^{r+2}_{r+3}, D^{r+3}_{r+2}) = 0$. 类似地可证明 $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+2}_{r+3}) \neq 0$ 且 $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+1}_{r+2}) \neq 0$.

再由引理 3.2, 有图 3.3.

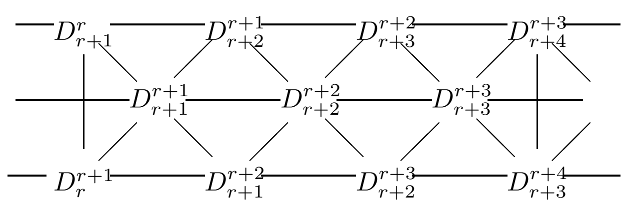

图 3.3

因为对任意 $x_1, x_2 \in D^{r+1}_{r+2}$, 有 $e(x_1, D^{r+1}_{r+2}) = e(x_2, D^{r+1}_{r+2}) = a_{r+1} - (c_{r+2} - 3)$, 所以有

$$e(x_1, D^{r+2}_{r+2}) = e(x_2, D^{r+2}_{r+2}) = a_{r+2} - e(x_1, D^{r+1}_{r+2}). \tag{7}$$

又因为 $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+1}_{r+2}) \neq 0$, 所以由 (7) 式，对任意 $x \in D^{r+1}_{r+2}$, 有 $e(x, D^{r+2}_{r+2}) \neq 0$. 因为 $d \geq r+3$, 所以对任意 $x \in D^{r+1}_{r+2}$, 有 $e(x, D^{r+2}_{r+3}) \neq 0$. 因此必有团 $\{x, y, z\}$, 其中 $x \in D^{r+1}_{r+2}$, $y \in D^{r+2}_{r+2}$, $z \in D^{r+2}_{r+3}$.

由引理 3.4 可知，$\Gamma(y) \cap D^{r+1}_{r+1} \subset B$, 所以

$$\Gamma(y) \cap D^{r+1}_{r+1} \simeq 2 * K_2 \quad 且 \quad e(y, D^{r+1}_{r+2}) = a_{r+1} - 3a + 1 = 2.$$

由引理 3.6 可知，任意 $x \in B$, 有 $e(x, D^{r+2}_{r+2}) \neq 0$. 设点集 M, M_1 定义如下：

$$M = \left\{x \in D^{r+2}_{r+2} \,|\, e(x, D^{r+1}_{r+2}) = e(x, D^{r+2}_{r+1}) = a_{r+1} - 3a + 1\right\},$$
$$M_1 = \left\{x \in D^{r+2}_{r+2} \,|\, e(x, B) = 3(a_{r+1} - 3a + 1) = 6\right\}.$$

易知对任意 $x \in M$, 有 $e(x, B) = 2(a_{r+1} - 3a + 1) = 4$.

由引理 3.4 可知，对任意 $x \in M$, 有 $e(x, A) = 0$, 即 $\Gamma(x) \cap D^{r+1}_{r+1} \subset B$, 则 $M \cup M_1$ 是 D^{r+2}_{r+2} 中与 B 中点相邻的所有顶点的集合. 下面用两种方法来计算 B 和 $M \cup M_1$ 之间的边数，则

$$|B| \cdot b_{r+1} = 6 \cdot |M_1| + 4 \cdot |M|.$$

所以

$$|M| \leq \frac{|B| \cdot b_{r+1}}{4} = \frac{|B| \cdot a}{4}. \tag{8}$$

由 (5) 式知，

$$k \cdot |B| = k \cdot |D^{r+1}_{r+1}| - k \cdot |A| = k_{r+1} \cdot a_{r+1} - 3a \cdot k_{r+1} = k_{r+1}.$$

由 (8) 式，得

$$4k|M| \leq a\, k_{r+1}.$$

从而

$$k \cdot e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+1}_{r+2}) = k \cdot e(M, D^{r+1}_{r+2}) = 2k \cdot |M| \leq \frac{k_{r+1} \cdot a}{2}.$$

另一方面，由 (7) 式得，任意 $x \in D^{r+1}_{r+2}$, $e(x, D^{r+2}_{r+2}) \neq 0$, 所以

$$k \cdot e(D^{r+1}_{r+2}, D^{r+2}_{r+2}) \geq k \cdot |D^{r+1}_{r+2}| = k_{r+1} \cdot b_{r+1} = k_{r+1} \cdot a.$$

矛盾. 所以 $c_{r+2} = c_{r+3}$. 从而 $e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+2}_{r+3}) = e(D^{r+2}_{r+2}, D^{r+3}_{r+2}) = 0$.

下面证明 $b_{r+1} = b_{r+2}$. 由命题 2.1 和引理 3.2, 只需证明 $e(D^{r+1}_{r+2}, D^{r+2}_{r+2}) = 0$.

假设存在 $x \in D^{r+1}_{r+2}$, $y \in D^{r+2}_{r+2}, x \sim y$. 因为 C_{r+1} 图为余团，且 $c_{r+1} = 3$, $\Gamma(x) \simeq 4 * K_{a+1}$, 所以存在 $z \in D^{r+2}_{r+3}$, 使得 $\{x, y, z\}$ 是一个团.

最后要证明 $t \geq 2$, 只需证明 $b_{r+2} = b_{r+3}$. 因为 $b_{r+1} = b_{r+2}$ 且 $c_{r+2} = c_{r+3}$, 所以交叉表如图 3.4 所示.

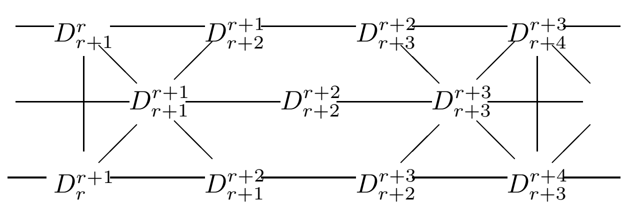

图 3.4

若 $b_{r+2}\neq b_{r+3}$, 则存在 $y\in D_{r+3}^{r+3}$, 使 $e(y,D_{r+3}^{r+2})\neq 0$. 由对称性，$e(y,D_{r+2}^{r+3})\neq 0$. 设 $y\sim x\in D_{r+3}^{r+2}$，$x\sim w\in D_{r+2}^{r+1}$, 由引理 3.6, $\Gamma(w)\cap D_{r+1}^{r+1}\subset A$, 所以存在 $\gamma\in D_1^1$, 使 $\partial(w,\gamma)=r+1$, 从而 $\partial(x,\gamma)=r+2$, 故 $\partial(y,\gamma)\leq r+3$. 我们断言 $\partial(y,\gamma)=r+3$. 否则，若 $\partial(y,\gamma)=r+2$, 则子图 $C_{r+2}(\gamma,y)=\Gamma_{r+1}(\gamma)\cap\Gamma(y)\subset D_{r+2}^{r+2}$ 且子图 $C_{r+2}(\gamma,y)\simeq 3*K_2$. 从而 $\Gamma(y)\cap D_{r+2}^{r+2}$ 为三个团，故 $\Gamma(y)$ 至少为 5 个团的并，矛盾．所以 $\partial(y,\gamma)=r+3$. 进一步，我们有 $C_{r+3}(\gamma,y)\cap D_{r+2}^{r+2}=\emptyset$. 若不然，则存在 $v\in C_{r+3}(\gamma,y)\cap D_{r+2}^{r+2}=\Gamma(y)\cap D_{r+2}^{r+2}\cap\Gamma_{r+2}(\gamma)$. 由引理 3.7 和引理 3.8, D_{r+1}^{r+1} 中有 A 型点 w_1, 使 $w_1\sim v$, 这样存在 $\gamma_1\in D_1^1$, 使 $\partial(w_1,\gamma_1)=r$, 从而 $\partial(v,\gamma_1)=r+1$, 于是 $\partial(y,\gamma_1)=r+2$. 类似上述讨论可得矛盾．所以 $C_{r+3}(\gamma,y)\cap D_{r+2}^{r+2}=\emptyset$, 从而 $C_{r+3}(\gamma,y)\subset D_{r+3}^{r+2}\cup D_{r+2}^{r+3}$. 注意子图 $C_{r+3}(\alpha,y)\simeq 3*K_2$, 与 $e(D_{r+3}^{r+2},D_{r+2}^{r+3})=0$ 矛盾．所以 $b_{r+2}=b_{r+3}$.

当 $a_{r+1}=3a+1$ 时，定理的证明.

证　由引理 3.1, 子图 $C_{r+2}\simeq m*K_2$，$m=3$ 或 4. 若 $m=4$, 则 $d=r+2$, 此时 $t=0$, 结论成立.

下面讨论 $m=3$ 的情形.

引理 3.9 讨论了 $t=1$ 的情形．下面考虑 $t\geq 2$ 的情形．由 t 的定义可知

$$
\begin{aligned}
&c_{r+2}=c_{r+3}=\cdots=c_{r+t+1},\\
&b_{r+2}=b_{r+3}=\cdots=b_{r+t+1},\\
&(c_{r+t+1},a_{r+t+1},b_{r+t+1})\neq(c_{r+t+2},a_{r+t+2},b_{r+t+2}).
\end{aligned}
$$

因为每个 C_i 图包含着一个 C_{i-1} 图 $(i=r+2,\cdots,r+t+1,r+t+2)$ 及子图 $C_{r+2}\simeq 3*K_2$, 且 $c_{r+2}=c_{r+3}=\cdots=c_{r+t+1}$, 所以子图 $C_{r+t+1}\simeq 3*K_2$, 所以 C_{r+t+2} 图为至少为 3 个团的并．又因为 $\Gamma(x)\simeq 4*k_{a+1}$, 所以 C_{r+t+2} 图为三个团或四个团的不交并.

为了证明 $d=r+t+2$, 只需证明 C_{r+t+2} 图为四个团的不交并.

若不然，则 C_{r+t+2} 图为三个团的不交并. 因为 $e(D_{r+t+1}^{r+t},D_{r+t+1}^{r+t+1})=0$, 且 C_{r+t+1} 图为三个团的不交并，所以 $e(D_{r+t+2}^{r+t+1},D_{r+t+1}^{r+t+1}\cup D_{r+t+1}^{r+t+2})=0$. 事实上，设 $x\in D_{r+t+2}^{r+t+1}$, 因为 C_{r+t+1} 图为三个团的不交并，所以存在余团 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 使得 $\{x_1,x_2,x_3\}\subset C_{r+t+1}(\alpha,x)\subset D_{r+t+1}^{r+t}$. 假设 $e(D_{r+t+2}^{r+t+1},D_{r+t+1}^{r+t+1}\cup D_{r+t+1}^{r+t+2})\neq 0$, 则存在 $y\in\Gamma(x)\cap(D_{r+t+1}^{r+t+1}\cup D_{r+t+1}^{r+t+2})$, 从而 $y\in C_{r+t+2}(\beta,x)$. 因 C_{r+t+2} 图为三个团的不交并，所以存在 $i\in\{1,2,3\}$ 使得 $x_i\sim y$. 因为 $e(D_{r+t+1}^{r+t},D_{r+t+1}^{r+t+1})=0$, 所以 $y\in D_{r+t+1}^{r+t+2}$, 这说明 D_{r+t+1}^{r+t} 与 D_{r+t+1}^{r+t+2} 间有边相连，矛盾.

于是交叉表如图 3.5.

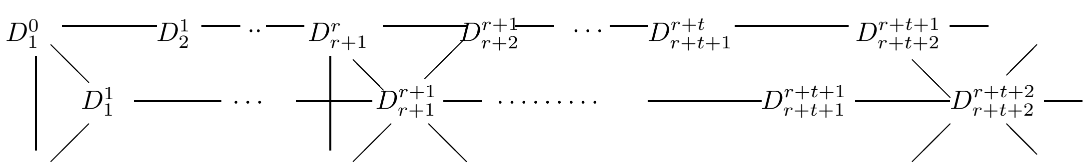

图　3.5

所以 $c_{r+t+1}=c_{r+t+2}$. 从而必有 $C_{r+t+2}\simeq 3*K_2$，$b_{r+t+1}\neq b_{r+t+2}$. 由命题 2.1 得 $e(D_{r+t+2}^{r+t+1},D_{r+t+2}^{r+t+2})\neq 0$. 从而存在 $y\in D_{r+t+2}^{r+t+2},x\in D_{r+t+2}^{r+t+1}$, 使 $y\sim x$. 由对称性，$e(y,D_{r+t+1}^{r+t+2})\neq 0$. 对于 $x\in D_{r+t+2}^{r+t+1}$, 在 D_{r+2}^{r+1} 中存在和 x 距离最近的点 w, 由引理 3.6, 存

在 $\gamma \in D_1^1, \partial(w,\gamma)=r+1$, 从而 $\partial(x,\gamma)=r+t+1$, $\partial(y,\gamma)\le r+t+2$. 断言 $\partial(y,\gamma)=r+t+2$. 否则，若 $\partial(y,\gamma)=r+t+1$, 则子图 $C_{r+t+1}(\gamma,y)=\Gamma_{r+t}(\gamma)\cap\Gamma(y)\subset D_{r+t+1}^{r+t+1}$ 且子图 $C_{r+t+1}(\gamma,y)\simeq 3*K_2$. 从而 $\Gamma(y)\cap D_{r+t+1}^{r+t+1}$ 为三个团的不交并，这样 $\Gamma(y)$ 至少为 5 个团的并，矛盾．所以 $\partial(y,\gamma)=r+t+2$. 进一步，我们有 $C_{r+t+2}(\gamma,y)\cap D_{r+t+1}^{r+t+1}=\emptyset$. 若不然，则存在 $v\in C_{r+t+2}(\gamma,y)\cap D_{r+t+1}^{r+t+1}=\Gamma(y)\cap D_{r+t+1}^{r+t+1}\cap\Gamma_{r+t+1}(\gamma)$, 则由引理 3.7 和引理 3.8, 存在 $w_1\in A$ 和 v 距离最近，从而存在 $\gamma_1\in D_1^1$, 使 $\partial(w_1,\gamma_1)=r$, 于是 $\partial(v,\gamma_1)=r+t$, $\partial(y,\gamma_1)=r+t+1$. 类似上述讨论可得矛盾．这样 $C_{r+t+2}(\gamma,y)\cap D_{r+t+1}^{r+t+1}=\emptyset$, 进而 $C_{r+t+2}(\gamma,y)\subset D_{r+t+2}^{r+t+1}\cup D_{r+t+1}^{r+t+2}$. 但是子图 $C_{r+t+2}(\gamma,y)\simeq 3*K_2$, 与 $e(D_{r+t+2}^{r+t+1},D_{r+t+1}^{r+t+2})=0$ 矛盾．所以 $d=r+t+2$.

参 考 文 献

[1] Bannai E, Ito T. Algebraic Combinatorics I. California: Benjamin, 1984

[2] Brouwer A E, Cohen A M, Neumaier A. Distance-regular Graphs. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989

[3] Mohar B, Shawe-Taylor J. Distance-biregular Graphs with 2-valent Vertices and Distance-biregular Line Graphs. *J. Combin. Th.*, 1985, 38(B): 193–203

[4] Biggs N L, Boshier A G, Shawe-Taylor J. Cubic Distance-regular Graphs. *J. London Math. Soc.*, 1986, 33(2): 385–394

[5] Hiraki A, Nomura K, Suzuki H. Distance-regular Graphs of Valency 6 and $a_1=1$. *J. Alg. Combin.*, 2000, 11: 101–134

[6] Yamazaki N. Distance-regular Graphs with $\Gamma(x)\simeq 3*K_{a+1}$. *Europ. J. Combin.*, 1995, 16: 525–536

[7] Boshier A, Nomura K. A Remark on the Intercection Array of Distance-regular Graphs. *J. Combin. Theory* (Series B), 1988, 44: 147–153

[8] Hiraki A. A Circuit Chasing Technique in Distance-regular Graphs. *Europ. J. Combin*, 1993, 14: 413–420

Distance-regular Graphs with Order $(a+1,3)$ and $c_{r+1}=3,\ a_{r+1}=3a+1$ or $4a$

GAO Suogang

(*Mathematics and Information College, Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050016)

(*E-mail: sggao@heinfo.net*)

BU Yuen

(*Department of Mathematics, Hengshui College, Hengshui* 053000)

Abstract Let Γ be a distance-regular graph with order $(a+1,3)$, where $a\ge 2$, and let $l(c,a,b)$ denote the number of columm $(c,a,b)^t$ in the intersection array $\iota(\Gamma)$. Write $r=r(\Gamma)=l(c_1,a_1,b_1)$, $s=s(\Gamma)=l(c_{r+1},a_{r+1},b_{r+1})$ and $t=t(\Gamma)=l(c_{r+s+1},a_{r+s+1},b_{r+s+1})$. If $c_{r+1}=3, a_{r+1}=3a+1$ or $4a$, then $d=r+t+2$.

Key words distance-regular graphs; intersection diagram; clique

MR(2000) Subject Classification 05C75

Chinese Library Classification o157.5