第 31 卷 第 5 期　应用数学学报　Vol. 31 No. 5
2008 年 9 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　Sep., 2008

直径为三的不可上嵌入的图 *

李德明
(首都师范大学数学科学学院，北京 100048)
(E-mail: lidm@mail.cnu.edu.cn)

梁志宇
(河北建筑工程学院数理系，张家口 075000)

杨海珍
(张家口教育学院数学系，张家口 075000)

刘明菊
(北京航空航天大学数学系，北京 100083)

摘　要　本文证明了只存在一类 3- 边连通的直径为三的 12 个点的不可上嵌入的图.

关键词　直径；边连通；上嵌入
MR(2000) 主题分类　05C10
中图分类　O157.5

1　引言

连通图 G 的最大亏格， $\gamma_M(G)$, 是指 G 有可定向胞腔嵌入的曲面亏格的最大值. 易知， $\gamma_M(G)\le\lfloor\beta(G)/2\rfloor$, 其中， $\beta(G)$ 为 G 的圈秩. 使 $\gamma_M(G)=\lfloor\beta(G)/2\rfloor$ 成立的 G 称为上可嵌入的，等价的，图的亏数 $\xi(G)=\beta(G)-2\gamma_M(G)\le 1$.

过去的几十年，人们一直在研究图的最大亏格与其它参数间的关系. 研究较多的有围长，直径，连通度等与最大亏格的关系，详见 [1–8]. 1991 年， M. Skoviera[7] 证明了直径为 2 的无环图是上可嵌入的，对有环的情形给出了一个下界 $\lceil\beta(G)/2\rceil-2$. 随后，Fu 和 Tsai[2], 黄和刘 [4] 证明了直径为 3 的无环图的最大亏格至少为 $\lceil\beta(G)/2\rceil-2$. 所以直径为 3 的无环图的亏数至多为 2. 本文的目的是深化这一结果，得到的结论是只存在一类 3- 边连通的直径为三的 12 个点的不可上嵌入的图. 本文只考虑无环的连通图.

令 $\{f,f'\},\{x_1,x_1'\},\{x_2,x_2'\},\{x_3,x_3'\},\{y_1,y_1'\}$ 和 $\{y_2,y_2'\}$ 为 6 对点，每对点间连有偶数条边，再在这 12 个点间连下列 9 条边 $\{fx_1,fx_2,f'x_3,x_2y_2,x_3y_1,x_1'y_1',x_1'y_2',x_2'y_1,x_3'y_2'\}$. 所得的图类记为 N.

定理　G 为直径为 3 的 3- 边连通图. G 是不可上嵌入的当且仅当 G 为 N 图类的元素.

本文 2008 年 7 月 12 日收到. 2008 年 8 月 20 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10201022, 10571124) 和北京市教委 (KM 200610028002) 资助项目

G 中两点 u 和 v 之间的距离， $d_G(u,v)$, 是 u 和 v 之间的最短路的长度．有时用 $d(u,v)$ 表示 $d_G(u,v)$. $P_{u,v}$ 表示 u 和 v 之间的最短路．与点 x 关联的边的数目称为 x 的度，记为 $d(x)$. 我们称 d 度点为 d- 点．

引理 1[2,4,6] H 为不可上嵌入的连通无环图，则存在 H 的边割 A 使

(1) $\xi(H)=b(H,A)+c(H,A)-|A|-1$, 且 $b(H,A)=c(H,A)$, 其中 $c(H,A)$ 为 $H-A$ 的分支数， $b(H,A)$ 为 $H-A$ 的具有奇数圈秩的分支数．

(2) A 中每边的两端点在 $H-A$ 的不同分支中，

(3) A 的两分支间至多有 A 中一条边相连．

使引理 1 的 (1, 2, 3) 成立的 A, 我们称为 Nebesky 割．其他没有给出的术语可参阅 [3].

由边割 A, 可以得到 $H-A$ 的分支，收缩每一个分支，使得到的该分支只有 2 个点，由于每个分支有奇数圈秩，这 2 个点之间连有偶数条平行边，再去掉一些，只留下 2 条使之成为 2- 圈．这些 2- 圈分支与 A 的并得到的图记为 G. 当然，也可认为这些变换是在 H 上做的．由边割 A 和 G, 还可以构造图 G_A, G_A 的点集由 $G-A$ 的分支组成，设 $G-A$ 的分支为 $F_1,F_2,\cdots,F_c$, 即 $|G_A|=c$, 相异两端点 F_i 与 F_j 间连 k 条边当且仅当 $V(F_i)\cup V(F_j)$ 的导出子图中含有 A 中 k 条边．易知， $E(G_A)=A$ 且 G_A 为简单图．

引理 2 H 为直径为 3 的 3- 边连通的图，则 G 也是直径至多为 3 的 3- 边连通的图， H 和 G 的亏数相等，且 G_A 的最小度为 3.

证明比较简单，只说明 G_A 的最小度为 3. G 是 3- 边连通的， G_A 的最小度大于等于 3. 若大于 3, $|A|$ 至少为 $2c$, 代入引理 1 的 (1), 与 G 为不可上嵌入的图矛盾．

令 G 为直径为 3 的 3- 边连通的不可上嵌入图， A 为 Nebesky 割， F 为 G_A 的一个 d- 点．又设 F 的邻点为 $X_1,X_2,\cdots,X_d$, 不与 F 相邻的点为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_h$. 设 X 为 $G-A$ 的一分支，含有点 x,x'. 在 G 中，分支 X_i 中与 F 相邻的点为 x_i. 从 Y_i 的点到 F 的点有至少 2 条长度为 2 或 3 的边不相交的最短路 [2]. 长度为 i 的最短路的起始边称为 i- 路边．令 A_i 表示从 Y_i 到 F 的最短路的起始边的集合．易知 $|A_i|\geq 2$.

2 定理的证明

充分性进行验证即可． N 图类的亏数为 2. 必要性是由一些论断完成的．先讨论 A_i 的特征．

(1) 若 $|A_i|=2$, 则 A_i 有 2 个 2- 路边或 1 个 2- 路边和 1 个 3- 路边且关联于 Y_i 的不同点．

若 $|A_i|=2$, 且 2 个起始边关联于 Y_i 的同一点，不妨设为 y_i, 则 y_i' 到 F 的某点的距离大于 3.

(2) 若 A_i 有 2- 路边和 3- 路边则它们关联于 Y_i 的不同点．原因是 2 点间的距离是唯一的．

(3) 若 A_i 没有 2- 路边， $|A_i|\geq 4$.

若 A_i 没有 2- 路边， Y_i 的一点到 F 的 2 点间的 3- 路边不同， Y_i 有 2 个点，所以 $|A_i|\geq 4$.

(4) 对不同的 i, j, A_i, A_j 是两两不交的．否则设 $uv\in A_i\cap A_j$, 且 $u\in Y_i$, $v\in Y_j$, uv 是 A_i 的 3- 路边， uv 又在 A_j 中， Y_i 有 1 个 2- 路边起点为 u, 所以 $uv\notin A_i$. 矛盾．

下面开始对 G 和 G_A 的讨论．

(5) G_A 中，至少有 2 个点不与 F 相邻，即 $h\geq 2$.

若 G_A 中 F 的度为 $c-1$, 即 $h=0$. 与 F 关联的边有 $c-1$, 因为 G 是 3- 边连通的， G_A-F 的最小度为 2, 所以 $|A|\geq 2(c-1)$, 与引理 1 矛盾．

若 G_A 中 F 的度为 $c-2$, G_A 中的边可分为与 F 关联的 $c-2$ 条边，设 Y 不与 F 关联，与 Y 关联的至少 3 条边．在 G_A-F 中，每点的度至少为 2, 所以边数至少为

$(c-2)-3/2$. 故 $|A| \geq (c-2)+3+c-2-1=2c-2$. 代入引理 1, 得 G 的亏数至多为 1, 这与 G 是不可上嵌入的矛盾.

C_k 为有 k 条边的 2- 正则连通图. 对 $C_{2k}=(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_k,y_k)$ 加边 x_iy_i 其中 $1 \leq i \leq k$, 所得之图 L_k 称为长为 k 的链.

令 $S_x=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_d$, $S_y=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_h$, $e(X,Y)$ 表示一端在 X 另一端在 Y 的边的数目. $e(X,X)$ 记为 $e(X)$. 则 $|A|=e(F,S_x)+e(S_x)+e(S_x,S_y)+e(S_y)$. 令 $A^*=\bigcup\limits_{i=1}^{h}A_i$.

(6) $G-A$ 中的分支中的每个点都与 A 的边关联.

设 $G-A$ 中的分支 F 有点 f' 不与 A 的边关联, F 为 2- 圈, 点 f' 在 G_A 为 2- 点. 由 F 在 G_A 中的度为 d. 由于 G 的直径为 3, 每个 A_j 有至少 2 个 2- 路边.

如果 $G[S_x]$ 是连通图, $e(X)\geq d-1$. 又因为 G_A 的最小度为 3, $e(S_x,S_y)+e(S_y)\geq 2h+h/2$. $|A|=e(F,S_x)+e(S_x)+e(S_x,S_y)+e(S_y)\geq d+d-1+2h+h/2$. 由引理 1 和 $h\geq 2$, $\xi=2(d+h+1)-|A|-1\leq 1$, 这与 G 为不可上嵌入的矛盾. 考虑 $G[S_x]$ 是不连通的情形, 设有 k 个分支, $e(X)\geq d-k$. 不失一般性, 设 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 分别在 $G[S_x]$ 的不同分支, x'_j 是 X_j 中不与 F 的点相邻的点. 对不同的两点 x'_i 和 x'_j, 它们在 $G_A[S_x]$ 的距离为 4, 故 x'_i 和 x'_j 在 G 的最短路一定含有 $G_A[S_y]$ 的点.

若对不同的两点 x'_i 和 x'_j, 它们在 G 中的距离都为 2, x'_i 和 x'_j 在 G_A 的最短路含有 Y_l 的点 y_l, 则 x'_iy_l 和 x'_jy_l 是 Y_l 的不在 A_l 中的边. i 固定, j 取 $1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k$, 可以得到至少 k 个不在任一 A_l 中的边. 如果恰为 k 个这样的边, $G_A[S_x\cup S_y]$ 有星结构. 其他的 $|A_j|\geq 2$, 又 G_A 的最小度为 3. 所以 $|A|>d+d-k+k+2h$. 由引理 1, $\xi=2(d+h+1)-|A|-1\leq 1$, 这与 G 为不可上嵌入的矛盾.

考虑存在不同的两点 x'_i 和 x'_j, 它们在 G 的距离为 3 的情形. x'_i, x'_j 间的最短路根据过一个或 2 个 S_y 中的点有如下形式 $x'_ix_iy_lx'_j$, $x'_iy_lx_jx'_j$, $x'_iy_ly'_lx'_j$ 或 $x'_iy_ly_sx'_j$. 这 4 种形式分别有 1, 1, 2, 3 条 A 中的边没有被计入 A^* 中. (实际上, 前两种是同构结构). 我们有 $e(F,S_x)=d$, $e(S_x)\geq d-k$, $k-1$ 个不在 A^* 中的边, 还有 $2h$ 个在 A^* 中的 2- 路边. 如果不只出现第一和二情形, $|A|\geq d+d-k+k-1+2h+1=2d+2h$, 由引理 1, $\xi=2(d+h+1)-|A|-1\leq 1$, 矛盾. 如果只出现第一或二情形, 有 $|A|\geq d+d-k+k-1+2h=2d+2h-1$, $\xi=2(d+h+1)-|A|-1\leq 2$, 由 G 为不可上嵌入的, 等号成立, 即 $|A|=2d+2h-1$. 此时, 我们还有每个 Y_l 关联 2 个 2- 路边和一个不在 A^* 中的边, 此边一端在 S_x, 另一端在 S_y, 且 $e(S_x)=d-k$, $e(S_y)=0$. 所以有 $|A|\geq d+d-k+3h$. 注意到, $c=1+d+h$, 若 $k\leq h$, $\xi=2(d+h+1)-|A|-1\leq 1$, 故 $k\geq h+1$. 如果只出现第一情形, 即最短路形式为 $x'_ix_iy_lx'_j$, 则 x'_i 不与 A 中的边关联, 并且 x'_j, (j 为 1 到 k 间不等于 i 的数) 只与一个不在 A^* 中的边关联, 由 $k\geq h+1$, G 中有一定出现 x'_r, x'_s, 它们的最短路形式为 $x'_rx_ry'_ty_tx'_s$, (过一个 Y_t, 与 y_t 关联的 2- 路边的另一端点是 x_i, 与 y'_t 关联的 2- 路边的另一端点是 x_r), 但 x'_r, x'_s 在 G 的距离为 4. 如果出现第一和第二情形, $k-1$ 个不在 A^* 中的边, $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 是 k 个分支, 则肯定有一个 x'_r 不与 A 中的边关联, 由 $k\geq h+1$, G 中一定有一个 x'_s 与 x'_r 的最短路过一个 Y_t, 最短路形式为 $x'_rx_ry'_ty_tx'_s$ (与 y_t 关联的 2- 路边的另一端点是 x_i). 但 x'_r, x'_s 在 G 的距离为 4.

(7) $G[S_x]$ 分支数至少为 3.

若 $G[S_x]$ 连通, $e(S_x)\geq d-1$, 则 $|A|\geq d+d-1+2h$. 若等号成立, 即每个 A_j 等于 2, 且 $G_A[S_y]$ 的边都在 A^* 中. A_j 的边不能都是 3- 路边, 否则 $|A_j|\geq 4$. A_j 的边也不能都是 2- 路边, 如若不然, 设 A_1 有 2 个 2- 路边, 由于, G_A 的最小度为 3, 与 Y_1 的顶

点关联的边，设为 A_2 的元素 y_1y_2, 边 y_1y_2 一定是 A_2 的 3- 路边. 由此知，与 y_2' 关联的是 A_2 的 2- 路边，再由 G_A 的最小度为 3, 与 y_2' 关联的边可设为 A_3 的边， $y_2'y_3$, ($y_2'y_3$ 是 A_3 的 3- 路边), 与 y_3' 关联的是 A_3 的 2- 路边，同理， y_3' 又关联 A_4 的边. 这样可以进行下去，因为 h 是有限的，要么找到 A_l 含有至少 3 条边，或者 $e(G_A[S_y]) \neq 0$. 但，与 $|A| = d + d - 1 + 2h$ 矛盾. 若 $|A| \geq 2d + 2h$, 这与 G 为不可上嵌入的矛盾. 所以， A_j 的边 1 个为 3- 路边，一个为 2- 路边. 若存在 A_l, 不妨令 $l = 1$, $e(S_x, Y_1) = 2$. 当 $h = 2$ 时，由 $d_{G_A}(Y_1) + d_{G_A}(Y_2) \geq 6$, 有 $e(Y_2, Y_1) \geq 2$ 或 $e(S_x, Y_2 \cup Y_1) \geq 4$. 与 $|A| = 2d - 1 + 2h$ 矛盾. 当 $h \geq 3$ 时，可以如上得出 $Y_2, Y_3, \cdots$, 得出矛盾. 所以， $e(S_x, Y_l) = 1$, 即 Y_l 的 3- 路边都在 $E(S_y)$. 由 G_A 的最小度为 3, $h \geq 3$. 若 $h > 3$, $G_A[S_y]$ 有导出圈， $G[S_y]$ 中存在 2 点距离在 G 中大于等于 4, 矛盾. 当 $h = 3$ 时， $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ 在 G 中导出 3- 链，与 Y_i 的 2- 路边关联的点为 y_i. 有直径条件，从 y_1' 考虑，与 y_1, y_3 关联的 2- 路边的端点一个与 f 关联的边相邻一个与 f' 关联的边相邻. 从 y_2' 考虑，与 y_1, y_2 关联的 2- 路边的端点一个与 f 关联的边相邻一个与 f' 关联的边相邻. 所以，与 y_3, y_2 关联的 2- 路边的端点只与 f, f' 中的一个关联的边相邻. 在 G 中从 y_3' 出发，到 f, f' 之一距离必然大于等于 4.

若 $G[S_x]$ 有 2 个分支, $e(S_x) \geq d-2$. 可设 $G[X_1 \cup X_2 \cdots X_s]$ 和 $G[X_{s+1} \cup X_{s+2} \cdots X_d]$(其中 $1 \leq s < d$) 是这 2 个分支. 有 $|A| \geq d + d - 2 + 2h$, 要证明 $|A| \geq d + d + 2h$, 只需找到一个 A_l 有至少 4 边，或 2 个不同的 A_l, 每个有至少 3 边，或 1 个 A_l 有至少 3 边和 1 条不在 A^* 中的边或 2 条不在 A^* 中的边.

对不同的两点 x_i' 和 x_j', 其中 $1 \leq i \leq s$, $s + 1 \leq j \leq d$, 它们在 $G[F \cup S_x]$ 的距离为 4, 所以 x_i' 和 x_j' 间的最短路过 $G[S_y]$ 的点. 若 x_i' 和 x_j' 间的距离为 2, 则最短路的形式为 $x_i'y_lx_j'$, 有 $e(S_x, Y_l) \geq 3$, 有 $|A_l| \geq 3$ 或 $|A_l| = 2$ 和 2 条不在 A^* 中的边. 余下的其他 A_j 只能含 2 边，类似于一个分支的论证情形，可得到矛盾.

若 x_i' 和 x_j' 间的距离为 3, 最短路通过一个 Y_l 时的形式为 $x_i'y_ly_l'x_j'$, $x_i'y_lx_jx_j'$ 或 $x_i'x_iy_lx_j'$. 第一种情形时，如都为 3- 路边， A_l 有至少 4 边. 肯定的有 $e(S_x, Y_l) \geq 3$, 余下的其他 A_j 只能含 2 边，类似于一个分支的论证情形，可得到矛盾. 后 2 情形是对称的，此时，有 $e(S_x, Y_l) \geq 3$, 余下的其他 A_j 只能含 2 边，类似于一个分支的论证情形，可得到矛盾. 当最短路通过两个不同的 S_y 的分支时，最短路的形式为 $x_i'y_sy_lx_j'$, 边 y_sy_l 属于 A, 但不属于 A^* 中. 在此情形， y_s', y_l' 关联 2- 路边，即使只考虑 5 个分支，也能找到 y_s' 与 y_l 的距离大于等于 4, 注意由于边数的限制，分支数增加不会使之距离变化. 所以，都有 $|A| \geq d + d + 2h$, 与 G 为不可上嵌入的矛盾.

(8) $G - A$ 的分支数 c 小于等于 7.

设 $G[S_x]$ 分支数为 k, $k \geq 3$, X_1, X_2, $\cdots$, X_k 分别属于 $G[S_x]$ 的不同的分支. 在 $G[F \cup S_x]$ 中， x_i' 和 x_j' 间的距离为 4, 所以 x_i' 和 x_j' 间的最短路一定过 S_y 的点. 若 x_i' 和 x_j' 间的距离在 G 中都为 2, $G[S_x \cup S_y]$ 有 1 个星形结构，则 $|A| \geq d + d - k + (k+1) + 2(h-1)$. 若不等号成立，与 G 为不可上嵌入的矛盾，若等号成立，余下的 $|A_l|$ 都等于 2, 类似于 (7) 的证明，可得到矛盾. $G[S_x \cup S_y]$ 有 s $(s > 1)$ 个星形结构，则 $|A| \geq d + d - k + (l_1 + 1) + (l_2 + 1) + \cdots + (l_s + 1) + 2(h - s)$, 其中 $l_j + 1 = e(S_x, Y_r)$, Y_r 为星形结构的中心. 这与 G 为不可上嵌入的矛盾.

x_i' 和 x_j' 间的距离在 G 中都为 2 或 3, 且 x_i' 和 x_j' 间的最短路过一个 S_y 的点 y_l, 则 $e(S_x, Y_l) \geq 3$, $|A| \geq d + d - k + 3h$. 由 $2c - |A| - 1 \geq 2$ 和 $c = 1 + d + h$, 有 $h \leq k - 1 \leq d - 1$. 所以， $c \leq 1 + d + d - 1 = 2d$, 可取 $d = 3$, $c \leq 6$.

若存在 x_i' 和 x_j' 间的距离在 G 中为 3, 且 x_i' 和 x_j' 间的最短路过两个 S_y 的点 y_l 和 y_s, A 中的边 y_sy_l 不在 A^* 中. 设有 h_1 个 S_y 中的点为上述情形，余下的在 $G[S_y]$ 应当

连通否则与直径条件矛盾．所以， $|A| \geq d+d-k+3h_1+2(h-h_1)+(h-h_1-1)$. 由 $2c-|A|-1 \geq 2$ 和 $c=1+d+h$, 有 $h \leq k \leq d$. 所以， $c \leq 1+d+d=2d+1$, 可取 $d=3$, $c \leq 7$.

(9) $G-A$ 的分支数 c 等于 6.

分析 G_A, 由于 G_A 是 3- 边连通简单图．已知 $c=|G_A|$, $|A|=e(G_A)$, $2c-|A|-1 \leq 2$. 当 $c=4$, G_A 为 4 阶完全图，不成立．当 $c=5$, 不可能 5 个点都是 3 度点， G_A 为最大度为 4 的轮图，或 5 阶完全图或 5 阶完全图去一边，都不成立．当 $c=7$, 同样，不可能 7 个点都是 3 度点．当含有至少 2 个 4- 点或 1 个大于等于 5 度的点时， $2c-|A|-1 \leq 2$ 不可能成立．所以， G_A 一个 4- 点其余的为 3- 点．设 f 的度为 4, 邻点为 x_1, x_2, x_3, x_4, 余下的点为 y_1, y_2. 若 y_1, y_2 相邻，又 y_1, y_2 没有公共邻点时，设 y_1 的邻点为 x_1, x_2, y_2 的邻点为 x_3, x_4. 余下的 2 边有 3 种连法， (i) x_1x_2, x_3x_4, (ii) x_1x_3, x_2x_4, (iii) x_1x_4, x_3x_2. 每一连法对应一个图 G_A. 但 x_1, x_2, x_3, x_4 中存在一点的邻点导出子图最多 2 个分支，用之为 F 与 (7) 矛盾．若 y_1, y_2 相邻，又 y_1, y_2 有公共邻点时，只有 1 个，设 y_1 的邻点为 x_1, x_2, y_2 的邻点为 x_2, x_4. 余下的 2 边为 x_1x_3, x_3x_4. 但 x_1, x_2, x_3, x_4 中存在一点的邻点导出子图有最多 2 个分支，用之为 F 与 (7) 矛盾.

若 y_1, y_2 不相邻， y_1, y_2 有公共邻点且只会有 2 个，设 y_1 的邻点为 x_1, x_2, x_3, y_2 的邻点为 x_2, x_3, x_4. 余下的 1 边为 x_1x_4. 但 x_1 的邻点导出子图有 2 个分支，用之为 F 与 (7) 矛盾.

(10) G_A 等于 $K_{3,3}$.

由于 G_A 是 3- 边连通简单图． $c=6$, $2c-|A|-1 \leq 2$, 所以 G_A 为 3- 正则图．这样的图有 2 个一个是 $K_{3,3}$, 另一个是 $C_3 \times P_2$. 具体的后一个是取 2 个三角形 (u_1, u_2, u_3) 和 (v_1, v_2, v_3), 再连 3 边 u_iv_i 所得．这个图中存在一点的邻点导出子图有最多 2 个分支，用之为 F 与 (7) 矛盾.

(11) G 等于 N.

由于 G_A 确定了， $e(S_x)=e(S_y)=0$, $e(Y_1, S_x)=e(Y_2, S_x)=3$. 下面确定 G, 先假设 F 的 f 点与 x_1, x_2 相邻， f' 点与 x_3 相邻.

若 x_1', x_2' 且 x_1', x_3' 间的距离在 G 中为 2, 则 x_2', x_3' 间的距离在 G 中为 4. 若 $d(x_1', x_2')=2$ 且 $d(x_1', x_3')=3$, x_1', x_3' 间的最短路过一个 S_y 的点 y_l, x_3' 与 x_j 或 $x_j'(j \neq l)$ 间的最短路长为 4. 若 $d(x_1', x_2')=3$ 且 $d(x_1', x_3')=3$, 设 x_1', x_2' 间的最短路为 $x_1'rsx_2'$, x_1', x_3' 间的最短路为 $x_1'mnx_3'$. 若 $r=y_1$, $s=y_1'$, $m=y_2$, $n=y_2'$, 有 $d(x_1, x_3')=4$. 若 $m=x_1$, $n=y_2$, 有 $d(y_1', y_2)=4$ 或 $d(x_2, x_3')=4$. 若 $r=x_1$, $s=y_1$, $m=y_2$, $n=y_2'$, 有 $d(x_1, x_3')=4$ 或 $d(x_1', x_3)=4$. 若 $r=x_1$, $s=y_1$, $m=y_2$, $n=x_3$, 有 $d(y_1', y_2')=4$ 或 $d(x_2, x_3')=4$. 所以，只需要再验证 $d(x_1', x_2')=3$ 且 $d(x_1', x_3')=2$ 的情形,

设 x_1', x_2' 间的最短路为 $x_1'rsx_2'$, x_1', x_3' 间的最短路为 $x_1'y_2x_3'$. 若 $r=x_1$, $s=y_1$, 有 $d(x_2', x_3')=4$ 或 $d(x_2', x_3)=4$. 若 $r=y_1$, $s=y_1'$, Y_1 的 y_1 与 2 条 A 中的边关联时，有 $d(x_2', x_3')=4$, Y_1 的 y_1' 与 2 条 A 中的边关联时，找到了一个直径为 3 的图．我们列出它的 9 条 A 边为 $\{fx_1, fx_2, f'x_3, x_2y_2, x_3y_1, x_1'y_1', x_1'y_2', x_2'y_1, x_3'y_2'\}$.

把 G 中的 2- 圈换为 3- 圈，直径大于 3, 所以 G 的点数不能再多了．每个 2- 圈上还可加偶数条边，但亏数不变． G 确为定理所描述的图类.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Chen J, Archdeacon D, Gross J L. Maximum Genus and Connectivity. *Discr Math.*, 1996, 146: 19–29

[2] Fu H, Tsai M. The Maximum Genus of Diameter Three Graphs. *J. Austr. Combin.*, 1996, 14: 187–197

[3] Gross J L, Tucker T W. Topological Graph Theory. New York: Wiley-Interscience, 1987

[4] Huang Yuanqiu, Liu Yanpei. The Maximum Genus of Graphs with Diameter Three. *Discr Math.*, 1999, 194: 139–149

[5] Li Deming, Liu Yanpei. Maximum Genus, Girth and Connectivity. *European Journal of Combinatorics*, 2000, 21: 651–657

[6] Nebesky L. A Characterization of the Maximum Genus af a Graph. *Czechoslovak Math J.*, 1981, 31(106): 604–613

[7] Skoviera M. The Maximum Genus of Graphs of Diameter Two. *Discr Math.*, 1991, 87: 175–180

[8] Xuong N. Upper Embeddable Graphs and Related Topics. *J. Combin. Theory* (Series B), 1979, 26: 226–232

Non-upper Embeddable Graphs with Diameter Three

LI Deming

(*School of Mathematics, Capital Normal University, Beijing* 100048)

LIANG Zhiyu

(*Department of Mathematics, Hebei Institute of Architecture and Civil Engineering, Zhangjiakou* 075000)

YANG Haizhen

(*Department of Mathematics, Zhangjiakou Educational College, Zhangjiakou* 075000)

LIU Mingju

(*LMIB and Department of Mathematics, Beihang University, Beijing* 100083)

Abstract It is showed that there is exact one class of 3-edge connected graphs of twelve vertices with diameter three which is not upper embeddable.

Key words diameter; upper embeddable; edge connectivity
MR(2000) Subject Classification O5C10
Chinese Library Classification O157.5