

三棱镜实验中入射点问题的讨论

钱惠国^{1,2}, 陆静珠², 顾菊观²

(1. 浙江师范大学 数理学院 浙江 金华市 321004; 2. 浙江省湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州市 313000)

摘要: 利用几何光学原理和计算机进行模拟, 对棱镜出射光线与入射点的关系进行了研究, 并由 MATLAB 得到了入射点与棱镜顶角、材料折射率及棱镜底面边长关系的曲线图。实验结果表明, 在测量三棱镜折射率及使用棱镜光谱仪时, 对入射光线的入射点是有一定要求的。

关键词: 入射点; 折射率; 棱镜; 顶角

中图分类号: TB851-34

文献标识码: A

Discussion About the Problems in the Experiment of the Incidence point of Prism

QIAN Hui-guo^{1,2}, LU Jing-zhu², GU Ju-guan²

(1. Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China

2. Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)

Abstract: In this paper, the relationship between the emergent light ray angle and incidence point is investigated according to the principle of the geometric optics and the computer simulation experiment so as to obtain the dependence of the incidence point on the vertex angle of the prism, refraction index and the basal-plane length of the prism from MATLAB. The experimental result shows that a certain incident point of the incident light is required for the measurement of reflection index of a prism and the application of a spectroscopic instrument.

Keywords: incident point; reflection index; prism; vertex angle

引言

实验中, 入射点 O 如果距棱镜底边 B 点太近, AB 面上的折射光线有可能会入射到 BC 面上而发生全反射, 再经 AC 面折射出去 (此时的出射光线已不属所要研究的光线), 从而导致在 AC 面一侧找不到出射光线, 得不到棱镜的偏向角和最小偏向角 (如图 1 所示)。那么, O 点到 B 点的距离具体有何要求呢? 下面对此作以详细介绍。

1 定性分析

假设在三棱镜 ABC 的 AB 面上 M 处光线以入射角 $i_1 = 90^\circ$ 入射, 折射光线恰好通过 C 点 (如图 2 所示)。在 M 点处, 若 $i_1 < 90^\circ$, 则折射光线必然入射到

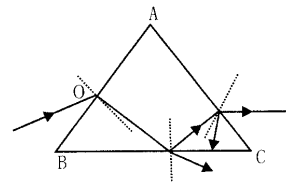


图 1 入射光线和出射光线的关系

Fig. 1 The relationship between incident ray and emergent ray BC 面上 (i_1 越小, 折射角 r_1 也越小), 不能直接到达 AC 面, 找不到所需的出射光线, 故不符合实验要求。如果 O 点比 M 点更靠近 B 点, 则无论 i_1 取何值, 折射光线总入射到 BC 面上, 均不符合实验要求。所以, M 点是一个临界点。 O 点在 MB 内时折射光线必定入射到 BC 面上, 始终找不到需要的出射光

线。

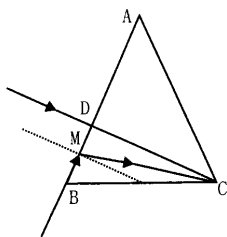


图2 临界点

Fig. 2 The critical point

下面再找一个临界点,即 C 在 AB 面上的垂足为 D 点,如图2所示。在 D 处,若光线以 $i_1=0^\circ$ 入射,则折射光线恰好到达 C 点;若 $i_1>0^\circ$,则折射光线入射到 AC 面,符合实验要求。若 O 点在 AD 段内时,此时无论 i_1 取何值,折射光线总能到达 AC 面,符合实验要求。所以, D 点也是一个临界点。若 O 点在 AD 段内,我们定能找到所要求的出射光线。那么,在 DM 内呢? 若以 $i_1=90^\circ$ 入射,折射光线可直接到达 AC 面;若以 $i_1=0^\circ$ 入射,则折射光线入射到 BC 面上。因此,在 DM 段内,有可能符合要求,也有可能不符合实验要求,这要视 i_1 的大小而定。为了能得到所需要的出射光线, i_1 应尽量大些。

综上所述,在 AD 段内可找到所需的出射光线;在 DM 段内有可能找到,但要求 i_1 应尽量大些;在 MB 内肯定找不到。

2 定量分析

M 点和 D 点的确定。假定 ABC 是等腰棱镜(如图3所示),顶角为 A ,底面边长为 a ,折射率为 n 。

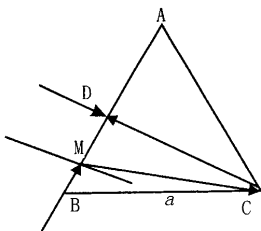


图3 临界点的确定

Fig. 3 The determination of the critical point

2.1 D 点的确定

由几何关系知:

$$\text{底角 } \angle B = \frac{\pi - A}{2}$$

$$BD = a \cos B = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = a \sin \frac{A}{2} \quad (1)$$

2.2 M 点的确定

由折射定律得:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin r} = n \Rightarrow \sin r = \frac{1}{n} \Rightarrow r = \arcsin \frac{1}{n} \quad (2)$$

则

$$\angle BMC = \frac{\pi}{2} + r = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \angle BCM &= \pi - \angle B - \angle BMC \\ &= \frac{A}{2} - \arcsin \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (5)$$

由正弦定理得:

$$\frac{\sin \angle BMC}{a} = \frac{\sin \angle BCM}{BM} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} BM &= a \frac{\sin \angle BCM}{\sin \angle BMC} = a \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - \arcsin \frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{n}\right)} \\ &= a \frac{\sin \frac{A}{2} \cos\left(\arcsin \frac{1}{n}\right) - \cos \frac{A}{2} \sin\left(\arcsin \frac{1}{n}\right)}{\sin \frac{\pi}{2} \cos\left(\arcsin \frac{1}{n}\right) + \cos \frac{\pi}{2} \sin\left(\arcsin \frac{1}{n}\right)} \\ &= a \frac{\sin \frac{A}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} \cos \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{a \left(\sin \frac{A}{2} \sqrt{n^2 - 1} - \cos \frac{A}{2} \right)}{\sqrt{n^2 - 1}} \end{aligned} \quad (7)$$

由(1)和(6)式便可确定 D 和 M 点到 B 点的距离。例如,实验室有 $A=60^\circ$ 的三棱镜, $a=4$ cm $n=1.64750$, 则 $BD=2$ cm, $BM=-0.6458$ cm。‘-’表示 M 点在 BM 的反向延长线上,即此时 M 点在棱镜外面,这说明该棱镜只要选择适当的入射角 i_1 都会找到实验要求的出射光线,不存在找不到出射光线的情况。

由(6)式可作出 BM 与角 A 的关系曲线,如图4所示($n=1.64750$)。由图4可以看出, BM 随角 A 的增大而增大。在该折射率下和在 A 的大部分范围内, BM 为负值,即 M 点在棱镜外面。只有当 $A>74.7424^\circ$ 时, M 点才在棱镜上。由(6)式可作 BM 与 n 的关系曲线,如图5所示($A=60^\circ$)。由图5可见, n 越大, BM 也越大。由(6)式亦可作出 BM 与 a 的关系曲线(如图6所示),由图6可见, a 越大, BM 反而越小。

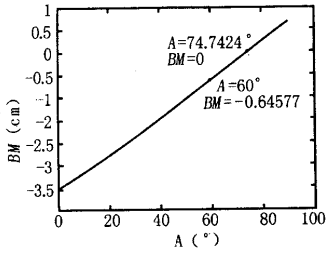


图4 BM与角A的关系

Fig. 4 The relation between BM and A

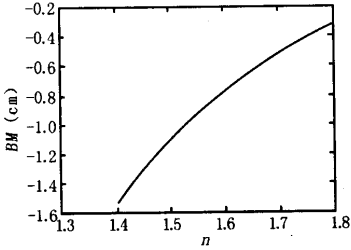


图5 BM与角n的关系

Fig. 4 The relation between BM and n

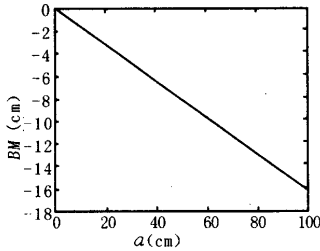


图6 BM与角A的关系

Fig. 4 The relation between BM and a

2.3 在DM内,对*i*₁的要求

假设光线以入射角*i*₀入射到DM段内的O点(O点到B点的距离为*d*,棱镜仍为上面的等腰棱镜),光线恰好通过C点,折射角为*r*,则有

$$\frac{\sin i_0}{\sin r} = n \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i_0}{n}$$

$$\Rightarrow r = \arcsin\left(\frac{\sin i_0}{n}\right) \tag{7}$$

$$\angle BOC = \frac{\pi}{2} + r = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\sin i_0}{n}\right) \tag{8}$$

$$\angle BCO = \pi - \angle B - \angle BOC$$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + r\right)$$

$$= \frac{A}{2} - r \tag{9}$$

于是,

$$\frac{\sin \angle BOC}{a} = \frac{\sin \angle BCO}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\sin i_0}{n}\right)\right]}{a}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - r\right)}{d} \tag{10}$$

对(7)~(10)式化简得:

$$\left[\cos^2 \frac{A}{2} + \left(\sin \frac{A}{2} - d\right)^2\right] \sin^2 i_0$$

$$= n^2 \left(\sin \frac{A}{2} - d\right)^2 \tag{11}$$

即

$$i_0 = \sqrt{\frac{n^2 \left(\sin \frac{A}{2} - d\right)^2}{\cos^2 \frac{A}{2} + \left(\sin \frac{A}{2} - d\right)^2}} \tag{12}$$

如果入射角*i*₁>*i*₀折射光线可以入射到AC面上;如果*i*₁<*i*₀,则折射光线入射到BC面上,不符合实验要求。

3 结论

综上所述,要找到符合要求的出射光线,首先∠A必须满足一定的要求。如果A>A_m,则无论如何都找不到所需的出射光线(已另文讨论);其次入射点还要满足一定的要求,使光线能入射到AC面上;最后还必须使入射角满足*i*₁>*i*_m(*i*_m是折射光线在AC面上发生全反射时的入射角)的要求,否则光线入射到AC面上将发生全反射,仍找不到所需的出射光线^[6]。只有同时满足3个条件,才能找到符合要求的出射光线。所以,在做棱镜最小偏向角的实验时,应注意这3个问题。

参考文献:

[1] 赵凯华. 光学[M]. 北京:北京大学出版社,1984.

[2] M 玻恩,E 沃耳夫. 光学原理[M]. 北京:北京科学出版社,1984.

[3] R W 狄区本. 光学[M]. 北京:高等教育出版社,1988.

[4] 杨述武,王定兴. 普通物理实验·光学[M]. 北京:高等教育出版社,1998.

[5] 张志涌,徐彦琴. MATLAB 教程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1998.

[6] 顾菊观,钱惠国,陆静珠. 三棱镜最小入射角的理论和实验研究[J]. 应用光学,2003,24(6):9-10,26.