

# 谐振腔法测量复介电常数 样品的精确变分分析\*

梁昌洪 谢拥军

(西安电子科技大学, 西安 710071)

**摘要** 本文应用广义变分原理导出了 Lindell 公式, 结合低损耗情况的 Rayleigh-Ritz 法对测量复介电常数样品作出了精确的变分分析. 从一般情况引入了复频率  $\tilde{\omega}$  概念, 讨论了解的稳定性, 并与现有微扰解做了详细的比较. 结果表明, 当前常用的微扰法算法误差值得重视.

**关键词** 广义变分原理; Lindell 公式; 复介电常数; 微扰法

## 一、引言

谐振腔法测量媒质样品的复介电常数, 是被广泛应用并确定为国家标准的一种方法<sup>[1]</sup>. 其简化模型如图 1 所示. 它表示  $TE_{10n}$  模式的矩形腔内插有截面面积均为  $A$  的细杆介质样品.

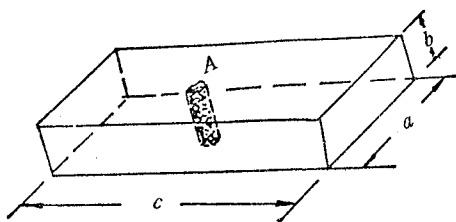


图 1 带有细杆样品的矩形腔

基本方法是, 测量未插入介质样品时腔的谐振频率  $f_0$  和品质因数  $Q_0$ ; 以及插入样品后对应参数  $f$  和  $Q$ . 而对所研究问题的提法是, 已知谐振腔的几何尺寸和工作模式, 以及插于腔中心位置的介质细杆形状和大小, 如何根据中心频率  $f_0$ , 频偏  $\Delta f = f - f_0$  和品质因数  $Q$  的下降  $\delta(1/Q)$  反演出所要求的复介电常数  $\tilde{\epsilon}_r$ .

目前普遍采用的分析方法的基础是微扰理论<sup>[2]</sup>. 复介电常数  $\tilde{\epsilon}_r$  的反演公式是

1991.08.12 收到, 1992.01.13 定稿.

\* 国家教委博士点基金资助课题.

梁昌洪 男, 1943 年出生, 教授, 博士生导师, 从事电磁场与微波技术的教学和科研工作.

谢拥军 男, 1968 年出生, 硕士研究生, 现从事有耗变分理论及应用等课题的研究工作.

$$\epsilon'_r = 1 - (V\Delta f)/(2V_r f_0) \quad (1)$$

$$\epsilon''_r = (1/4)(V/V_r)\delta(1/Q) \quad (2)$$

和

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r \quad (3)$$

其中,  $V$  和  $V_r$  分别表示谐振腔体积和介质细杆体积,  $\delta(1/Q) = 1/Q - 1/Q_0$ . 在上述公式推导过程中, 已假定  $V_r \ll V$ , 且  $\tilde{\epsilon}_r$  不能过大.

然而, 近年来有耗变分理论的发展重新唤起很多研究者对于介质样品测量反演理论的兴趣. 我们已对无耗媒质样品的情况作了详细研究. 结果表明, 一直不被人们注意的微扰法的理论方法误差不容忽视<sup>[3]</sup>.

本文将从一般情况引入复频率概念出发, 由广义变分原理导出有耗情况的 Lindell 公式, 并深入研究谐振腔法测量复介电常数样品  $\tilde{\epsilon}_r$  的反演理论. 文中还给出了数字实例.

## 二、复频率 $\tilde{\omega}$

现有文献的复频率引入是基于微扰理论<sup>[4]</sup>. 本文将从一般情况出发进行讨论.

研究一任意有耗谐振腔. 这时腔内场将随时间衰减. 为了在形式上与无耗情况统一, 可引入复频率  $\tilde{\omega}$ , 且电场表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp(j\tilde{\omega}t) \quad (4)$$

其中  $\tilde{\omega} = \omega(1 + j\xi)$ ,  $\omega$  为实频率. 将这一关系代入(4)式, 有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \exp(-\omega\xi t) \exp(j\omega t) \quad (5)$$

考虑到储能  $W$  与场强平方成正比, 则对应时间关系可写出

$$W = W_m \exp(-2\omega\xi t) \quad (6)$$

另一方面, 若  $P_L$  表示损耗功率, 则又有

$$dW = -P_L dt = -(\omega W/Q) dt \quad (7)$$

上式中, 已计及  $Q$  的定义式, 即  $Q = \omega W/P_L$ . 微分方程(7)式的解为

$$W = W_m \exp(-\omega t/Q) \quad (8)$$

比较(6)和(8)式可知

$$\xi = 1/(2Q) \quad (9)$$

于是, 复频率  $\tilde{\omega}$  的一般表示式为

$$\tilde{\omega} = \omega\{1 + j[1/(2Q)]\} \quad (10)$$

## 三、广义变分原理和 Lindell 公式

在所研究的电磁问题中, 泛函  $\Pi$  和对应的边界约束条件  $B_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  结合起来, 采用 Lagrange 乘子  $\lambda_i$  建立起无约束泛函

$$\Pi^* = \Pi + \sum_{i=1}^n \lambda_i B_i \quad (11)$$

且取变分  $\delta\Pi^* = 0$  识别  $\lambda_i$ , 此即广义变分泛函, 并称为广义变分原理<sup>[5]</sup>.

对于有耗谐振腔具体问题,有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \tilde{\kappa}^2 \tilde{\epsilon}_r(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

其中  $\tilde{\kappa}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ . 在边界上满足

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0 \quad (13)$$

上式中,  $\hat{\mathbf{n}}$  为边界面单位法向矢量. 令  $V_r$  内复介电常数为  $\tilde{\epsilon}_r$ , 且在(12)式左右同时点乘  $\mathbf{E}$ , 且在域内积分, 有

$$\Pi = \int_{V_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dV - \tilde{\kappa}^2 \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV - \tilde{\kappa}^2 (\tilde{\epsilon}_r - 1) \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV \quad (14)$$

若进一步把边界条件  $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0$  强制到(14)式中, 则还可建立新的泛函  $\Pi^*$

$$\begin{aligned} \Pi^* = & \int_{V_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dV - \tilde{\kappa}^2 \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV - \tilde{\kappa}^2 (\tilde{\epsilon}_r - 1) \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV \\ & + \oint_{\lambda} \lambda \times \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (15)$$

由  $\delta \Pi^* = 0$ , 可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \tilde{\kappa}^2 \tilde{\epsilon}_r(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

$$\lambda \times \hat{\mathbf{n}} = 2(\nabla \times \mathbf{E}) \quad (18)$$

其中  $\mathbf{r} \in V$  且  $\hat{\mathbf{n}}$  在边界上法向. 可见, 泛函  $\Pi^*$  的极值函数满足(16)、(17)式, 且可由(18)式决定.

在文献[6]中已经证明了上述方程任一标量参数和泛函同时稳定的理论. 于是可得稳定的变分公式:

$$\tilde{\epsilon}_r - 1 = \frac{\int_{V_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) dV - \tilde{\kappa}^2 \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + 2 \oint_{\lambda} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}}{\tilde{\kappa}^2 \int_{V_r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV} \quad (19)$$

这就是 Lindell 公式<sup>[6]</sup>. 然而, 应该指出, (19)式(即文献[6]中的(49)式)并不能从文献[6]的一般表示  $C$  算子为 1 的情况导出. (19)式是变分稳定的上限公式. 不难证明, 在复数情况下其实部和虚部分别都是稳定的上限.

#### 四、复介电常数 $\tilde{\epsilon}_r$ 反演方法

为求解(19)式, 我们选取满足边界条件(13)式的场试探函数

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(\pi x/a) \sin\{[9 + 2(i-1)]\pi z/c\} \quad (20)$$

在上式中, 已假定  $a$  边为  $x$  方向,  $b$  边为  $y$  方向而  $c$  边为  $z$  方向. 把(20)式代入(19)式, 有

$$\tilde{\epsilon}_r - 1 = \sum_{i=1}^n M_i \alpha_i^2 / \left[ B \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \right] \quad (21)$$

其中  $M_i = ac\{(\pi/a)^2 + [(9 + 2(i - 1))\pi/c]^2 - \bar{k}^2\}$  和  $B = 4A\bar{k}^2$

由 Rayleigh-Ritz 思想,取  $\partial\bar{\epsilon}_r/\partial\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} 2M_1\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n M_i\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) &= 0 \\ 2M_2\alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n M_i\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ 2M_n\alpha_n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n M_i\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

由(22)式可知

$$M_i/M_k = \alpha_k/\alpha_i \quad (23)$$

所以

$$\bar{\epsilon}_r = 1 + ac \left/ \left( 4A \sum_{i=1}^n \frac{\bar{k}^2}{M_i} \right) \right. \quad (24)$$

作为例子, 我们研究了在 X 波段的一个数字实例. 为了使微扰法和变分理论结果易于比较, 在未插入介质细杆时, 假定腔的品质因数  $Q_0 \rightarrow \infty$ . 这种做法并不失一般性. 具体数据列于表 1. 从表 1 可以看出, 微扰法的结果小于变分理论  $n = 1$  的对应值, 这是

表 1 微扰法和变分理论处理谐振腔测量复介电常数  $\bar{\epsilon}_r$  的结果比较

矩形腔  $a = 22.86\text{mm}$ ,  $f_0 = 9.4137\text{GHz}$ ,  $Q_0 \rightarrow \infty$   
 $b = 10.16\text{mm}$ ,  $f = 9.3766\text{GHz}$ ,  $Q = 2000$   
 $c = 200\text{mm}$   
 介质样品  $A = 1\text{mm}^2$ ,  $\bar{\epsilon}_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r$

微 扰 法		试 探 函 数	变 分 理 论	
$\epsilon'_r$	$\epsilon''_r$		$\epsilon'_r$	$\epsilon''_r$
10	0.5715	n		
		1	10.0588	0.5716
		10	9.4434	0.4969
		20	9.3688	0.4879
		40	9.3209	0.4825
		50	9.3109	0.4813

表 2 品质因数  $Q$  不同时  $\epsilon'_r$  和  $\epsilon''_r$  的两种处理的结果比较

Q	$\epsilon'_r$			$\epsilon''_r$		
	微扰法	变分理论	相对误差	微扰法	变分理论	相对误差
1000	10	9.3183	7.32%	1.1430	0.9626	18.7%
2000	10	9.3109	7.40%	0.5172	0.4813	18.7%
9000	10	9.3086	7.43%	0.1270	0.1070	18.7%

因为微扰解中已假定介质样品内与外场有较大变化, 而变分理论中  $n = 1$  的解却未计及这一特点。

对于不同品质因数  $Q$  的结果比较示于表 2。令人感兴趣的是  $\epsilon'_i$  与  $\epsilon''_i$  的相对误差始终保持稳定, 值得进一步研究。

### 参 考 文 献

- [1] 中华人民共和国国家标准 GB5597-85, 固体电介质微波复介电常数的标准测试方法(2)。
- [2] M. Wind, Rapaport, Handbook of Microwave Measurements, Polytechnic Institute of Brooklyn, (1958), Ch. 10.
- [3] 梁昌洪, 谢拥军, 谐振腔法测量介质参数的精确变分分析, 1991 年全国微波会议, 西安, 第 587—591 页。
- [4] R. F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Co., New York (1961), Ch. 7.
- [5] 钱伟长, 格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用, 上海科学技术出版社, 上海, 1989 年, 第二、三章。
- [6] I. V. Lindell, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-30**(1982)8, 1194—1204.

## AN ACCURATE VARIATIONAL ANALYSIS FOR MEASUREMENT OF THE COMPLEX DIELECTRIC CONSTANT OF A SAMPLE ROD INSERTED IN A RESONANT CAVITY

Liang Changhong · Xie Yongjun

(Xidian University, Xi'an 710071)

**Abstract** The Lindell formulation based on the generalized variational principle is derived, and an accurate variational analytical result of the measurement of the complex dielectric constant by the Rayleigh-Ritz method is obtained when the loss is small. The concept of the complex frequency  $\tilde{\omega}$  is introduced in a common case, and also touched on the stationarity of the solution, then compared the results with the perturbational result. It is demonstrated with these results that it is necessary to pay attention to the theoretical error of perturbational method.

**Key words** The generalized variational principle; Lindell formulation; Complex dielectric constant; Perturbational method