第15卷 第6期　　电子科学学刊　　Vol. 15, No. 6
1993年11月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　Nov., 1993

弱散射条件下半空间有耗媒质的近似重建公式*

崔铁军　　梁昌洪
(西安电子科技大学,西安 710071)

摘要　对于半空间弱有耗媒质，本文导出了用反射系数重建媒质相对介电常数和电导率剖面的近似反演公式,它们以解析闭式给出.

关键词　逆散射;有耗媒质;弱散射条件;重建

1. 引言

在一维媒质的逆散射中，J. Hirsch[1] 导出了一个适用于无耗媒质层的近似重建公式. 它给出反射系数的 Fourier 变换与媒质介电常数的近似解析关系. 1991 年 D.B.Ge 和 Lu-Jun Chen[2] 又获得了半空间纯导电媒质中电导率的近似重建公式. 但是,实际问题的模型大都是有耗媒质,对于介电常数和电导率同时存在的半空间有耗媒质,其近似重建公式还未见报道,现有文献[3]只考虑了有限厚度介质片的近似反演，不能推广到半空间情况. 本文从 Maxwell 方程出发,导出了半空间弱有耗媒质中介电常数和电导率的近似重建公式,它们以解析闭式给出,同时需要两个方向上的反射系数.

2. 弱散射条件下半空间有耗媒质的近似重建公式

考虑一半空间有耗媒质，$x>0$ 为媒质区域，其相对介电常数和电导率分别用 $\varepsilon(x)$ 和 $\sigma(x)$ 表示; $x<0$ 是自由空间，TE 极化的平面波由左至右以角度 θ 入射,如图 1 所示.

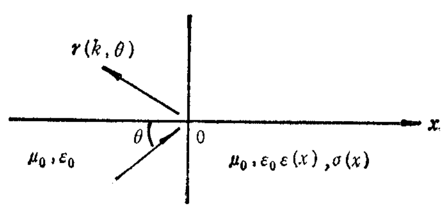

图 1　TE 波以角度 θ 入射一半空间有耗媒质

根据 Maxwell 方程和分离变量法,容易导出入射场和媒质内场所满足的方程为

$$\frac{d^2E^i}{dx^2}+k^2\cos^2\theta E^i=0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2E}{dx^2}+k^2[\varepsilon(x)-\sin^2\theta]E-jk\eta_0\sigma(x)E=0 \tag{2}$$

1992.02.17 收到,1993.05.20 定稿.
* 国家教委博士点基金和国防预研基金资助课题.

崔铁军　男,1965 年生,博士研究生,近年来研究方向为电磁格点理论、微波网络、数据处理、电磁散射与逆散射等领域.
梁昌洪　男,1943 年生,教授、博士生导师,中国电子学会会士，研究方向为计算场论、计算微波、微波网络理论、近代数据处理、电磁散射与逆散射,电磁孤立子、电磁导弹等领域.

其中 $k=2\pi/\lambda$, $\eta_0=120\pi\Omega$ 分别是自由空间中的波数和波阻抗。

根据入射场 E^i,内场 E,散射场 E^s 的关系: $E^s=E-E^i$, 由(1),(2)式容易导出散射场 E^s 满足方程

$$\frac{d^2E^s}{dx^2}+k^2\cos^2\theta E^s=-k^2[\varepsilon(x)-1]E+jk\eta_0\sigma(x)E \tag{3}$$

考虑到一维问题的 Green 函数: $G(x,x')=j\exp(-jk|x-x'|\cos\theta)/(2k\cos\theta)$, (3)式的解可写为

$$E^s(x,k)=-\frac{jk}{2\cos\theta}\int_0^{+\infty}[\varepsilon(x')-1]E(x',k)\exp(-jk|x-x'|\cos\theta)dx'$$
$$-\frac{\eta_0}{2\cos\theta}\int_0^{+\infty}\sigma(x')E(x',k)\exp(-jk|x-x'|\cos\theta)dx' \tag{4}$$

计及(1)式的解: $E^i(x,k)=\exp(-jkx\cos\theta)$, 以及 $x<0$ 时 $|x-x'|=x'-x$, 易得 $x<0$ 区域的总场

$$E(x,k)=\exp(-jkx\cos\theta)+r(k,\theta)\exp(jkx\cos\theta) \tag{5}$$

其中 $r(k,\theta)$ 是反射系数,具体为

$$r(k,\theta)=-\frac{jk\cos\theta}{2\cos^2\theta}\int_0^{+\infty}[\varepsilon(x')-1]E(x',k)\exp(-jkx'\cos\theta)dx'$$
$$-\frac{\eta_0}{2\cos\theta}\int_0^{+\infty}\sigma(x')E(x',k)\exp(-jkx'\cos\theta)dx' \tag{6}$$

作尺度变换:

$$\tilde{k}=k\cos\theta \tag{7}$$

则(6)式可写为

$$r(\tilde{k},\theta)=-\frac{j\tilde{k}}{2\cos^2\theta}\int_0^{+\infty}[\varepsilon(x')-1]E(x',\tilde{k})\exp(-j\tilde{k}x')dx'$$
$$-\frac{\eta_0}{2\cos\theta}\int_0^{+\infty}\sigma(x')E(x',\tilde{k})\exp(-j\tilde{k}x')dx' \tag{8}$$

对(8)式两边作 Fourier 变换,则有

$$R(t,\theta)=-\frac{1}{2\cos^2\theta}\int_0^{+\infty}[\varepsilon(x')-1]\frac{\partial\mathscr{E}(x',\ t-x')}{\partial t}dx'$$
$$-\frac{\eta_0}{2\cos\theta}\int_0^{+\infty}\sigma(x')\mathscr{E}(x',t-x')dx' \tag{9}$$

其中 $R(t,\theta)$,$\mathscr{E}(x,t)$ 分别是 $r(\tilde{k},\theta)$,$E(x,\tilde{k})$ 的 Fourier 变换。

当所关心的媒质为弱有耗媒质时,根据 Born 近似,(9)式中的内场 $\mathscr{E}(x,t)$ 可用入射场 $\mathscr{E}^i(x,t)$ 近似代替。考虑到尺度变换后的入射场为 $E^i(x,\tilde{k})=\exp(-j\tilde{k}x)$,故

$$\mathscr{E}(x,t)\approx\mathscr{E}^i(x,t)=\delta(t-x) \tag{10}$$

根据 Dirac-δ 函数的性质,有

$$\mathscr{E}(x',t-x')\approx\delta(t-2x')=\delta(x'-t/2)/2 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}(x', t-x')}{\partial t} \approx -\delta'(x'-t/2)/4 \tag{12}$$

计及 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$，(9)式可以近似写成

$$R(t,\theta) \approx -\frac{1}{4\cos^2\theta}\frac{d}{dt}\left[\varepsilon\left(\frac{t}{2}\right)-1\right] - \frac{\eta_0}{4\cos\theta}\sigma(t/2) \tag{13}$$

式中，$t=2x$。当 $\theta=0^0$ 时，$\tilde{k}=k$，同样有

$$R(t) \approx -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}[\varepsilon(t/2)-1] - \frac{\eta_0}{4}\sigma(t/2) \tag{14}$$

解方程组(13)，(14)式，容易求得

$$\sigma(t/2) = 4[R(t,\theta)\cos^2\theta - R(t)]/[\eta_0(1-\cos\theta)] \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}[\varepsilon(t/2)-1] = 4\cos\theta[R(t)-R(t,\theta)\cos\theta]/(1-\cos\theta) \tag{16}$$

因此

$$\eta_0\sigma(x) = 4[R(2x,\theta)\cos^2\theta - R(2x)]/(1-\cos\theta) \tag{17}$$

$$\varepsilon(x) = 1 + \frac{4\cos\theta}{1-\cos\theta}\int_0^{2x}[R(t)-R(t,\theta)\cos\theta]dt \tag{18}$$

(17)，(18)式即为半空间弱有耗媒质电导率和介电常数的近似重建公式。

3. 重建实例

为验证近似重建公式(17)，(18)式的正确性，考虑一数值实例。图 2 所示的反射系数是由一段均匀媒质($x \leqslant 1$ 时 $\varepsilon(x)=1.4$，$\eta_0\sigma(x)=0.2$；$x>1$ 时 $\varepsilon(x)=1$，$\sigma(x)=0$)模拟产生的。利用 $\theta=0^0$ 和 $\theta=45^0$ 时的反射信息，将其进行快速 Fourier 变换(FFT)，即得时域反射系数 $R(t)$ 和 $R(t,\theta)$。将 $R(t)$，$R(t,\theta)$ 代入(17)，(18)式，即可近似重建出媒质的相对介电常数剖面和电导率剖面。近似重建结果和与精确剖面的比较如图 3 所示。由图 3 可见，当 x 较小时，二者偏差较小；当 x 增大时，重建误差逐渐增大。

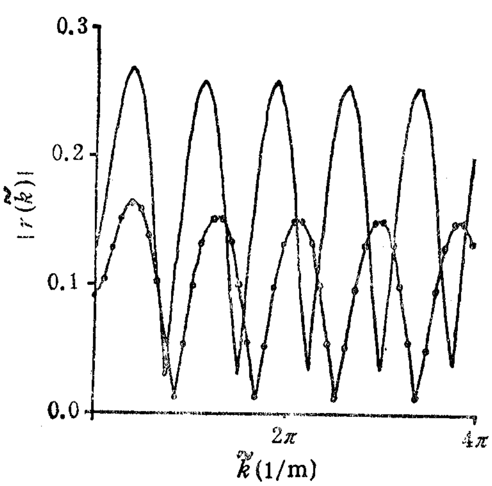

图 2　待重建媒质的反射系数

(—●—●— $\theta=0^0$；—— $\theta=45^\circ$)

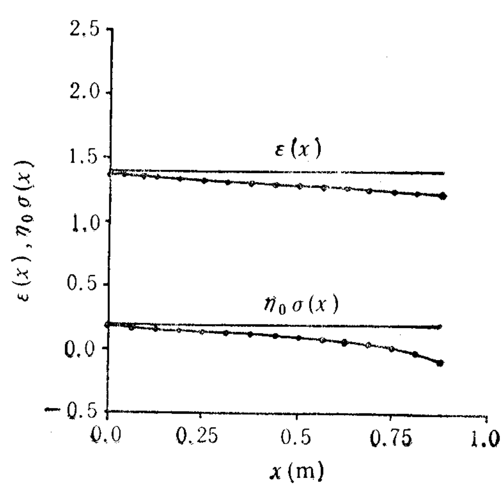

图 3　相对介电常数和电导率的重建结果与精确值比较

(—●—●—重建值；——精确值)

4. 结论

本文在弱散射条件下导出了重建半空间有耗媒质介电常数和电导率的近似解析闭式．实际上，本文公式即为有耗媒质的 Born 近似．Born 近似的成立范围是在近层内（即 $x\in[0,d_e]$）可给出媒质剖面的较精确近似．当 $\varepsilon(x)$，$\sigma(x)$ 较小时，d_e 较大；当 $\varepsilon(x)$，$\sigma(x)$ 较大时，d_e 较小．

参考文献

[1] J. Hirsch, *Optica Acta*, **26**(1979)10,1273—1279.
[2] D.B. Ge, Lu-lun Chen, *IEEE Trans. on AP*, **AP-39**(1991)7,907—909.
[3] A.G.Tijhuis, *Wave Motion*, **11**(1989)2,151—173.

AN APPROXIMATE PROFILE INVERSION FOR HALF-SPACE LOSSY MEDIUM UNDER WEAK-SCATTERING CONDITION

Cui Tiejun　Liang Changhong
(Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract　A simple scheme of a profile inversion from the reflection coefficients is obtained for a half-space weakly lossy medium. Two approximations for reconstructing the permittivity and conductivity profiles are developed, both of which have closed-forms.

Key words　Inverse scattering; Lossy medium; Weak-scatterng condition; Reconstruction