

介质片上的金属条带交指型 电容的三维分析

马西奎

(西安交通大学电气工程系,西安 710049)

摘要 本文运用矩量法计算介质片上的金属条带交指型电容的电容量,给出了理论公式。这一分析可以很好地考虑指线末端的边缘效应和介质片厚度的影响。实际计算表明,本文的方法是正确和有效的。

关键词 交指型电容器;三维分析;矩量法

一、引言

由于制作工艺简单,可与微带电路一次制成等优点,微带交指型电容作为集中参数元件在微波集成电路中得到广泛的应用。关于其电容量的计算,目前已提出了数种方法^[1-3]。这些方法虽然取得了一定的成功,但都对实际的微带交指型电容做了较大的近似:(1)把有限厚度介质片看作是无限厚度;(2)忽略指线末端对整个电容量的贡献(即忽略末端的边缘效应),将一个三维问题化为二维问题,求得的是单位长度指线电容量。这样,就限制了它们的适用范围,只有当上述两个假设条件成立时,计算结果才与实际接近。在更一般情况下,它们是很难满足实际需要,所以迫切需要更严格的计算方法。

为了对采用集总元件的微波电路进行机助设计,必须全面、准确地表征集总元件的特性,这就要求人们建立综合的数学模型,同时考虑到邻近效应、边缘场等等。本文将运用矩量法对介质片上的金属条带交指型电容进行一般分析。该分析未对指线长度和介质基片厚度做任何限制,因此有着更广泛的适用性。

二、基本原理和公式

介质片上的金属条带交指型电容的结构示于图1。取直角坐标系,使 XOY 平面与带面相重合,而 Z 轴与介质片平面相垂直。指线的宽度、长度和间隔分别为 W 、 L 和 D ,介质片厚度是 h 。设1号指线金属条带的电位是 $\varphi_1 = V(V)$,2号指线金属条带的电位是 $\varphi_2 = V - 1(V)$,则它们间的电压是 $1V$ 。

1992.06.08 收到,1992.02.22 定稿

马西奎 男,1958年生,教授,近年来从事电磁场与微波技术的教学和科研工作。

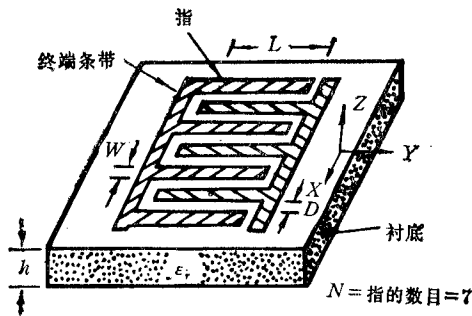


图1 微带交指型电容结构

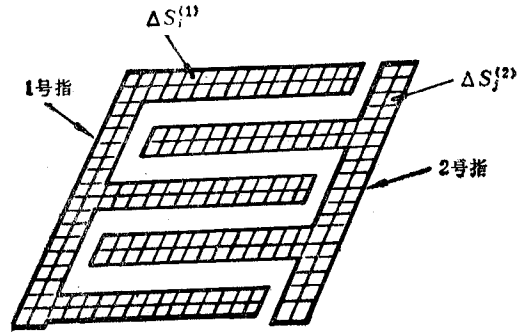


图2 单元剖分

1. 基本原理概述

微带交指型电容的金属条带表面上的面电荷密度 σ 与条带电位 φ 可以通过如下积分方程联系起来:

$$\int_S G(x, y, x', y') \sigma dS' = \varphi(x, y) \quad (1)$$

式中 $S = \bigcup_{n=1}^2 S_n$, $\varphi(x, y) = \varphi_n$, $(x, y) \in S_n$, $n = 1, 2$, φ_n 是第 n 号指线金属条带的电位. $G(x, y, x', y')$ 是介质片表面上 (x', y') 处的单位点电荷在同一平面上点 (x, y) 处的电位, 即格林函数. 它的具体形式将在后面给出.

这是一个由两个导体构成的静电独立系统, 故电荷密度必须同时满足下列约束条件:

$$\int_S \sigma dS = 0 \quad (2)$$

用解析方法求解积分方程(1)和(2)式一般是不可能的. 现在, 我们运用矩量法近似求它们的解. 首先, 把金属条带 S_n 分割成 N_n 个矩形单元 $\Delta S_1^{(n)}, \Delta S_2^{(n)}, \Delta S_3^{(n)}, \dots, \Delta S_{N_n}^{(n)}$, 如图2所示. 近似认为各矩形单元上的电荷密度 $\sigma_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, \dots, N_n$) 为常数. 这样, 如果采用点匹配技术, 且取剖分单元 $\Delta S_i^{(n)}$ 的中点为匹配点, 则积分方程(1)和(2)式分别可离散化为

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_{ij}^{(m,n)} \sigma_j^{(n)} = \varphi(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}), \quad (m = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N_m) \quad (3)$$

和

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^{N_n} \sigma_j^{(n)} \Delta S_j^{(n)} = 0 \quad (4)$$

式中 $\alpha_{ij}^{(m,n)}$ 是 n 号指线上的 j 单元电荷 $\sigma_j^{(n)}$ 在 m 号指线上的 i 单元中点产生的电位, 有

$$\alpha_{ij}^{(m,n)} = \int_{\Delta S_j^{(n)}} G(x_i^{(m)}, y_i^{(m)}, x', y') dS' \quad (5)$$

最后, 求解由(3)和(4)式构成的矩阵方程, 就可得出各单元上的面电荷密度 $\sigma_j^{(n)}$. 进而求得 1 号指线金属条带表面的总电荷

$$Q = \sum_{i=1}^{N_1} \sigma_i^{(1)} \Delta S_i^{(1)} \quad (6)$$

由此得微带交指型电容的电容量为

$$C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2) = \sum_{j=1}^{N_1} \sigma_j^{(1)} \Delta S_j^{(1)} \tag{7}$$

至此,剩下的问题就是格林函数 G 的确定和(5)式积分的计算.

2. 格林函数 G 的导出

假定点电荷 q 在坐标原点,而 $z = a$ 和 $z = b$ ($b - a = h$) 是包围介质片的平面(见图 3),介质片的介电常数为 $\epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0$.

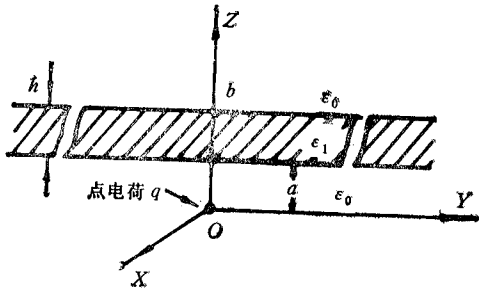


图 3 介质板前方的点电荷

现在,需求出电位函数

$$\varphi(\rho, z) = \begin{cases} \varphi_1(\rho, z), & (-\infty < z < a) \\ \varphi_2(\rho, z), & (a < z < b) \\ \varphi_3(\rho, z), & (b < z < \infty) \end{cases} \tag{8}$$

它除了在点 $\rho = 0, z = 0$ 之外,处处调和,即

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

在这里, φ_1 有形如 $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ 的奇性,且当 $z = a$ 和 $z = b$ 时应满足介质分界面条件

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_0 \partial \varphi_1 / \partial z = \epsilon_1 \partial \varphi_2 / \partial z, \quad (z = a) \tag{10}$$

$$\varphi_2 = \varphi_3, \quad \epsilon_1 \partial \varphi_2 / \partial z = \epsilon_0 \partial \varphi_3 / \partial z, \quad (z = b) \tag{11}$$

不难证明, $J_0(\lambda\rho)\exp(-\lambda z)$ 和 $J_0(\lambda\rho)\exp(\lambda z)$ (λ 是分离参量,或称为本征值,它是由问题的边界条件决定)是方程(9)式的解,这些解称为基本解函数. 基本解函数的线性组合也必定是拉普拉斯方程的解,所以对分离参量的可能选择求和就能构成更一般的解函数^[4]. 考虑到现在问题的区域是无界的,因此,分离参量(本征值) λ 不是离散的,而是连续变化的,即有连续谱. 这样,对 λ 值上的积分便构成现在问题的解,即解可假设成如下积分形式^[4]

$$\varphi_1(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\exp(-\lambda|z|)d\lambda + \int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda\rho)\exp(\lambda z)d\lambda \right] \tag{12a}$$

$$\varphi_2(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_0^\infty B(\lambda)J_0(\lambda\rho)\exp(-\lambda z)d\lambda + \int_0^\infty C(\lambda)J_0(\lambda\rho)\exp(\lambda z)d\lambda \right] \tag{12b}$$

$$\varphi_3(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty D(\lambda)J_0(\lambda\rho)\exp(-\lambda z)d\lambda \tag{12c}$$

式中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是场点 (x, y) 到点电荷 q 的距离,所有这些积分,除第 1 个以外,当 $\rho \rightarrow 0$, 和 $z \rightarrow 0$ 时都应保持是有限的,再者

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_1 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_3 = 0 \tag{13}$$

当 $z = a$ 和 $z = b$ 时,分界面条件给出

$$A(\lambda) = (1 - K)C(\lambda) + K\exp(-2a\lambda) \tag{14a}$$

$$B(\lambda) = -[1 + K + KC(\lambda)\exp(2a\lambda)] \tag{14b}$$

$$C(\lambda) = KD(\lambda)\exp(-2b\lambda)/(K - 1) \tag{14c}$$

$$D(\lambda) = (1 - K^2)/(1 - K^2\exp(-2h\lambda)) \tag{14d}$$

式中 $K = (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)/(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$.

于是,把 $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 代入(12)式中并积分就可得出 φ_1, φ_2 和 φ_3 . 例如,对于 φ_3 的积分,为了计算这个积分,我们依 $K^2 \exp(-2h\lambda)$ 的乘幂把 $[1 - K^2 \exp(-2h\lambda)]^{-1}$ 展开成级数,有

$$\varphi_3 = \frac{(1 - K^2)q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda z) d\lambda + K^2 \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \exp[-\lambda(z + 2h)] d\lambda + \dots \right] \quad (15)$$

由此,利用如下公式

$$1/\sqrt{\rho^2 + z^2} = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \exp(-\lambda|z|) d\lambda \quad (16)$$

就得 φ_3 如下级数形式的结果

$$\varphi_3(\rho, z) = \frac{(1 - K^2)q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{2n}}{\sqrt{(z + 2nh)^2 + \rho^2}}, \quad (z \geq b) \quad (17a)$$

同理,得出 φ_1 和 φ_2 如下级数形式的结果

$$\varphi_1(\rho, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + \rho^2}} + \frac{Kq}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(z - 2a)^2 + \rho^2}} + \frac{(1 - K^2)q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-K^{2n-1}}{\sqrt{(z - 2nh - 2a)^2 + \rho^2}}, \quad (z \leq a) \quad (17b)$$

$$\varphi_2(\rho, z) = \frac{-(1 - K)q}{4\pi\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{2n-1}}{\sqrt{(z - 2nh - 2a)^2 + \rho^2}} + \frac{(1 - K)q}{4\pi\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^{2n}}{\sqrt{(z + 2nh)^2 + \rho^2}}, \quad (a \leq z \leq b) \quad (17c)$$

最后,若取 $a = 0$ (即点电荷 q 位于介质片表面上)和 $z = 0$ 时,由(17b)式或(17c)式求得点电荷 q 所在介质面上任意点的电位为

$$\varphi(\rho) = \frac{(1 + K)q}{4\pi\varepsilon_0 \rho} + \frac{(1 - K^2)q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-K^{2n-1}}{\sqrt{(2nh)^2 + \rho^2}} \quad (18)$$

分析(18)式看出,它是由位于 $Z(z \geq 0)$ 轴上不同位置、电量不同的一串点电荷在介质表面 ($z = 0$) 处产生的电位. 这一串点电荷当然包含了实际点电荷 q , 其余点电荷则反映了介质极化的影响,也就是说介质的影响可以用一串等效的电荷镜象来代表,每个电荷镜象的大小是由边界条件来确定,这一点从物理概念上是不难理解的. 实际上,直接应用镜象法做无限次镜象也可以得到这一结果.

如果点电荷 q 位于点 (x', y') 而非坐标原点,这仅需取(18)式中的

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

这就是介质表面上点 (x', y') 处的点电荷 q 在同平面内点 (x, y) 处产生的电位计算公式. 因此,格林函数 $G(x, y, x', y')$ 是

$$G(x, y, x', y') = \frac{(1 + K)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

$$+ \frac{(1-K^2)}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-K^{2n-1}}{\sqrt{(2nh)^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (19)$$

3. $\alpha_{ij}^{(m,n)}$ 的计算公式

设剖分单元的中点坐标为 $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$, 它沿 X 和 Y 方向的边长分别是 $a_j^{(n)}$ 和 $b_j^{(n)}$. (5) 式的 $\alpha_{ij}^{(m,n)}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(m,n)} = & \frac{(1+K)}{4\pi\epsilon_0} \int_{y_j^{(n)}-b_j^{(n)}/2}^{y_j^{(n)}+b_j^{(n)}/2} \int_{x_j^{(n)}-a_j^{(n)}/2}^{x_j^{(n)}+a_j^{(n)}/2} \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x_i^{(m)}-x')^2 + (y_j^{(n)}-y')^2}} \\ & + \frac{(K^2-1)}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} K^{2k-1} \int_{y_j^{(n)}-b_j^{(n)}/2}^{y_j^{(n)}+b_j^{(n)}/2} \int_{x_j^{(n)}-a_j^{(n)}/2}^{x_j^{(n)}+a_j^{(n)}/2} \\ & \cdot \frac{dx'dy'}{\sqrt{(2kh)^2 + (x_i^{(m)}-x')^2 + (y_j^{(n)}-y')^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

完成上式中的积分(详细过程略去), 我们得到

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(m,n)} = & \frac{(1+K)}{4\pi\epsilon_0} F_0(a_1, a_2, b_1, b_2) \\ & + \frac{K^2-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{\infty} K^{2k-1} [F_k(\alpha_{2k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}) - F_k(\alpha_{1k}, \beta_{1k}, \beta_{2k})] \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} a_1 = & -a_j^{(n)}/2 - (x_i^{(m)} - x_j^{(n)}), \quad a_2 = a_j^{(n)}/2 - (x_i^{(m)} - x_j^{(n)}) \\ b_1 = & -b_j^{(n)}/2 - (y_j^{(n)} - y_i^{(m)}), \quad b_2 = b_j^{(n)}/2 - (y_j^{(n)} - y_i^{(m)}) \\ \alpha_{1k} = & a_1/(2kh), \quad \alpha_{2k} = a_2/(2kh); \quad \beta_{1k} = b_1/(2kh), \quad \beta_{2k} = b_2/(2kh) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} F_0(a_1, a_2, b_1, b_2) = & b_2 \ln \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2}} + b_1 \ln \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_2 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2}} \\ & + a_2 \ln \frac{b_2 + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{b_1 + \sqrt{a_2^2 + b_1^2}} + a_1 \ln \frac{b_1 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{b_2 + \sqrt{a_1^2 + b_2^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

$$F_k(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) = F_{k1}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) + F_{k2}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) + F_{k3}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{k1}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) = & 2kh \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\alpha(\beta_{1k} \sqrt{1+\alpha^2+\beta_{2k}^2} - \beta_{2k} \sqrt{1+\alpha^2+\beta_{1k}^2})}{\alpha^2 \beta_{1k} \beta_{2k} + \sqrt{(1+\alpha^2+\beta_{1k}^2)(1+\alpha^2+\beta_{2k}^2)}} \right] \\ F_{k2}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) = & 2kh \alpha \ln \frac{\sqrt{1+\alpha^2+\beta_{1k}^2} - \beta_{1k}}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta_{2k}^2} - \beta_{2k}} \\ F_{k3}(\alpha, \beta_{1k}, \beta_{2k}) = & 2kh \beta_{2k} \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta_{2k}^2}} \right] - 2kh \beta_{1k} \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta_{1k}^2}} \right] \end{aligned}$$

三、数值结果和结论

首先, 为验证方法的正确性, 我们将计算值与实测值作了比较, 见表 1. 从表中可看

出,计算值与实测值基本一致,说明这一方法可以满意地计算介质基片上金属条带交指型电容器的电容,能得到满足工程精确度要求的解。

表 1 计算与实测结果对比
($W = D = 5\text{mm}$, $h = 20\text{mm}$, $\epsilon_r = 9.6$, $N = 20$)

$L(\text{mm})$ $C(\text{pF})$	10	15	20	25	50
计算值	19.31	26.91	31.97	35.87	56.11
实测值	20.50	28.23	33.40	38.03	58.12

表 2 微带交指型电容计算结果
($W = D = 5\text{mm}$, $N = 20$, C 的单位是: pF)

$L(\text{mm})$		10	15	20	25	50	100	200	
h (mm)	本文	20	19.31	26.91	31.97	35.87	56.11	99.11	190.15
		45	24.11	32.27	38.37	42.97	66.72	115.96	206.01
		75	26.02	34.48	41.32	46.22	70.28	129.98	217.08
		100	27.12	35.72	42.82	47.90	71.94	131.08	219.88
	文献[3]	∞	9.10	13.64	18.19	22.74	45.97	90.96	181.92

表 2 中给出了微带交指型电容的计算结果。在计算时,取 $\epsilon_r = 9.6$, $N = 20$ 。从表中可以看出:(1)介质片的厚度 h 对电容 C 值是有一定影响的,当 h 接近于 70mm 时,将 h 看作是无限大才不致给计算结果带来较大的误差。(2)指线末端的边缘效应对整个电容量的影响是比较大的,特别是当指线长度 L 较小时这种影响更趋显著。例如,当 $L = 10\text{mm}$ 和 15mm 时,本文计算值约是文献[3]值的 2—3 倍,因为这时指线两末端间的相互影响非常强烈,而文献[3]并没有计及指线末端的贡献。(3)电容量 C 与指线金属条带的长度 L 并不成简单的正比关系,这是由于考虑了指线末端对整个电容量的贡献。当 L 接近 50mm 时,电容 C 的增量才近似地与指线长度 L 的增量成正比。它可解释为,当 L 满足一定尺寸时,指线中间一段上的电容用二维已能很好地近似,亦即与这一段的长度近似成正比,这一部分电容加上指线末端部分的电容(近似不变,这时指线两末端间的相互影响已很微弱)就是总电容值。(4)文献[3]将无限厚介质片上的金属条带交指型电容分为内单元和外单元两种情况,简单地认为所有内单元的电场结构都与中央单元相同,即电场结构都对称;另外,在处理外单元时没能很好地考虑条带边的边缘效应。这些都会使文献[3]的电容计算值比真实值小许多,这正是文献[3]计算值小于本文计算值的又一个重要原因。

总之,当指线长度 L 不够长时,用二维近似得到的计算结果误差甚大;另外,在一定范围内,把有限厚度的介质片看作是无限厚也会给电容的计算造成较大的误差。基于这些,本文应用矩量法分析微带交指型电容,给出了相应的理论公式,特别是导得了有限厚度介质片表面上的矩形均匀面电荷 σ 的电位严格计算公式(21)式,这一计算公式不存在数

值奇异性。在分析中,未对指线长度 L 和介质片厚度 h 做任何限制,可以很好地考虑介质片厚度 h 和指线末端边缘效应对整个电容量的贡献。

本文的分析仅限于介质片下方没有接地板的微带交指型电容。但将这一分析推广至介质片下方衬有接地导板这一情况并不困难。这时, $\alpha_{ij}^{(m,n)}$ 的计算公式需作一些修改,且需同时考虑奇模电容和偶模电容。就是说,数学模型比本文稍复杂些。另外,这一分析也可推广至考虑指线金属条带厚度的影响。限于篇幅,我们将另撰文阐明有关的详细步骤。

参 考 文 献

- [1] L. Yong et al., *Advance in Microwave*, Vol. 8, Academic Press, New York, (1974), pp 165—172.
- [2] G. D. Alley, *IEEE Trans. on MTT*, **MTT-18** (1970) 12, 1028—1033.
- [3] 秦廷楷,通信学报, 7(1986)1,60—67.
- [4] R. F. 哈林登著,孟佩译,正弦电磁场,上海科学技术出版社,1964年1月第一版,第156—167页.

ANALYSIS OF CONDUCTING STRIP INTERDIGITAL CAPACITANCE ON A DIELECTRIC SUBSTRATE WITH MOMENT METHOD

Ma Xikui

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract The conducting strip interdigital capacitance on a dielectric substrate is analyzed with the moment method. The theoretical formulas are given. A number of illustrative examples are numerically calculated, which show the correctness and the effectiveness of the method presented here.

Key words Interdigital capacitor; 3D analysis; Moment method