

建立放大器单向化模型的一条新途径

吴 康

(安徽大学电子工程与信息科学系,合肥 230039)

摘要 本文提出一条建立放大器单向化模型的新途径,由该单向化模型可以非常容易地获得放大器的传递函数。与传统的确定放大器传递函数的密勒效应近似法和时间常数法相比,本文的方法不仅十分简单,而且精确度也较高。

关键词 放大器;单向化模型;密勒效应;传递函数

1. 前言

在设计双极型晶体管 (BJT) 和场效应管 (FET) 高频放大电路时,一个精确而又简捷的传递函数表达式将是设计的重要依据。由该表达式不仅可获得放大器的频响曲线,还可确定其零、极点位置,稳定性和稳定裕度。传统的分析方法是用密勒 (Miller) 效应来获得单向近似模型,但当频率较高时,该模型精度变差^[1,2]。对于多级放大器,由于每级负载为纯电阻性的假设无法满足,这种模型的精度变得更差。另一种确定传递函数的方法是时间常数法^[3]。它需计算大量的开路、短路时间常数,其工作量很大,且易出错。如果直接根据放大器原始的等效电路求传递函数,这个传递函数当然是十分精确的,但它将是极其庞大而又繁杂的表达式,得到它是十分困难的。一个有希望的途径看来是如何建立较为精确的单向化模型,已有学者给出了单级放大器的这种模型^[4],但该模型仍要假设负载为纯电阻性的。

本文将探讨负载为电阻与电容并联情况下较为精确的单向化模型的建立问题。这样的模型将可应用于多级放大器。此外,为使该模型更具一般性,我们还考虑了射极含有电阻 R_E 的情况 ($R_E = 0$ 则是该模型的特例)。依据本文的方法很容易获得多级放大器的

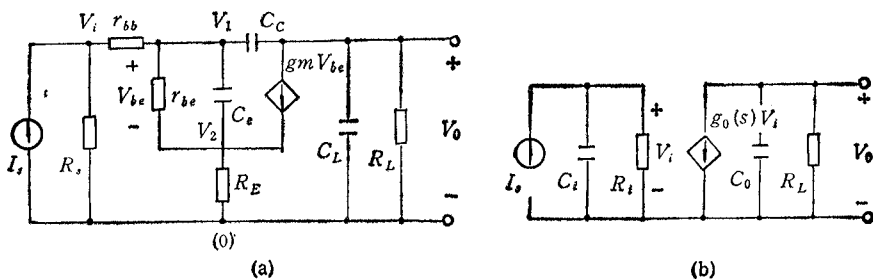


图 1

1991.11.19 收到,1992.04.21 定稿。

吴 康 男,1951 年出生,讲师,目前的专业方向为: 电路 CAD, 电路模拟和计算机辅助建模。

传递函数。该传递函数是精确传递函数的一个非常好的近似。本文仅讨论 BJT 放大器，但分析方法同样适用于 FET 放大器。

2. 单向化模型的建立

首先,让我们从图 1(a) 所示的单级放大器入手。对图 1(a), 在 s 域中可写出如下的节点方程:

$$\left. \begin{aligned} (1/R_i + 1/r_{bb})V_i - 1/r_{bb}V_1 &= I_s \\ -V_i/r_{bb} + (1/r_{bb} + 1/r_{be} + sC_c + sC_e)V_1 - (1/r_{be} + sC_e)V_2 - sC_cV_0 &= 0 \\ -(1/r_{be} + sC_e)V_1 + (1/R_E + 1/r_{be} + sC_e)V_2 - g_m(V_1 - V_2) &= 0 \\ -sC_cV_1 + (1/R_L + sC_L + sC_e)V_0 + g_m(V_1 - V_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

解此方程组,我们得到源互阻增益

$$K_{r_s}(s) = V_0(s)/I_s = -K_{r_s o}(a_2s^2 + a_1s + 1)/(b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + 1) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{r_s o} &= R_i r_{be} g_m R_L / R_x, \quad a_1 = -C_c(1 + g_m R_E) / g_m, \quad a_2 = -R_E C_e C_c / g_m \\ b_1 &= r_{bc} C_c (R_i + r_{bb} + R_E) / [R_x (1 + g_m R_E)] + R_y C_c (1 + g_m R_E) (1 + g_m R_L) \\ &\quad + R_L (C_L + C_e) \\ b_2 &= R_y [R_L C_L C_e (1 + g_m R_E) + R_L C_e (C_L + C_e) + R_E C_e C_c \\ &\quad + R_E R_L C_e (C_L + C_e) / (R_i + r_{bb})] \\ b_3 &= R_E R_L C_e C_c C_L / R_x, \quad R_x = r_{bc} + R_i + r_{bb}, \quad R_y = r_{be} \parallel (R_i + r_{bb}) \end{aligned}$$

现在我们试图用图 1(b) 所示的单向化模型来近似等效图 1(a) 的电路, 且希望两者诸元素之间的关系尽可能的简单。为此我们写出图 1(b) 所示电路的源互阻增益表达式为

$$\begin{aligned} K_{r_s}^{UM}(s) = V_0(s)/I_s &= - \left[\frac{R_L}{1 + sC_0 R_L} g_0(s) V_i \right] / I_s = - \left[\frac{R_L g_0(s)}{1 + sC_0 R_L} \cdot \frac{R_i}{1 + sC_i R_i} I_s \right] / I_s \\ &= - \frac{R_i R_L g_0(s)}{R_i C_i R_L C_0 s^2 + (R_i C_i + R_L C_0) s + 1} \end{aligned} \quad (3)$$

比较(2), (3)两式, 可看出两者相差甚远。若选择 $g_0(s)$ 具有 $g_0(s) = K(\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1)/(\beta_1 s + 1)$ 的形式, 虽然可使(3)式具有与(2)式相同的零、极点个数, 但这样就无法找出图 1(a), 1(b) 两电路诸元素之间的关系。为了找出这种关系, 很自然的想法是对(2)式进行近似。

考察(2)式, 可看出, 若 $C_L = 0$ 或 $R_E = 0$, 则 $b_3 = 0$, 同时若 $R_E = 0$, 还有 $a_2 = 0$ 。不论 $C_L = 0$ 还是 $R_E = 0$, (2) 式只有两个极点, 同时若 $R_E = 0$, 零点个数也减少一个。因此我们只考虑 $C_L \neq 0$ 和 $R_E \neq 0$ 的情况。注意到通常情况下具有最大幅度的极点近似位于 $s = -p_{\max} = -b_2/b_3$ 处这一事实, 我们可得到 p_{\max} 的近似表达式为

$$p_{\max} = \frac{1 + g_m R_E}{R_E C_e} + \frac{C_c + C_L}{R_E C_e C_L} + \frac{1}{R_L C_L} + \frac{C_c + C_L}{(R_i + r_{bb}) C_e C_L} \quad (4)$$

类似地, 具有最大幅度的零点 $s = -z_{\max} = -a_1/a_2$ 近似为

$$z_{\max} = (1 + g_m R_E) / (R_E C_e) \quad (5)$$

显然,如果满足关系式

$$\frac{1 + g_m R_E}{R_E C_c} \gg \frac{C_c + C_L}{R_E C_c C_L} + \frac{1}{R_L C_L} + \frac{C_c + C_L}{(R_i + r_{bb}) C_c C_L} \quad (6)$$

则 p_{\max} 和 z_{\max} 对高频响应的影响可互相抵消. 一般只要 g_m 较大, (6)式是容易得到满足的, 即使不能满足, 由于 $(1 + g_m R_E)/(R_E C_c)$ 之值相当大 (一般可达 10^{10} 以上), p_{\max} 之值更大些, 因此可忽略 p_{\max} 和 z_{\max} 的影响. 这样, 我们就有理由将(2)式近似为只有两个极点和一个零点的表达式, 它既要较精确地反映主导极点的作用又要便于确定图 1(a), 1(b) 诸元素之间的关系. 为此, 我们直接令(2)式中的 $a_2 = 0$ 和 $b_3 = 0$ 得

$$K_{r,s}(s) = V_o(s)/I_i \approx -K_{r,s}(a_1 s + 1)/(b_2 s^2 + b_1 s + 1) \quad (7)$$

为说明在所考虑的频率范围内这样的近似误差并不大, 我们取(7)式与(2)式之比, 并令 $s = j\omega$, 得

$$L(j\omega) = \sqrt{\frac{[a_1 b_3 \omega^4 - (a_1 b_1 + b_2) \omega^2 + 1]^2 + [(a_1 + b_1) \omega - (a_1 b_2 + b_3) \omega^3]^2}{[a_2 b_2 \omega^4 - (a_1 b_1 + a_2 + b_2) \omega^2 + 1]^2 + [(a_1 + b_1) \omega - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \omega^3]^2}} \cdot \exp j \left[\arctg \frac{(a_1 + b_1) \omega - (a_1 b_2 + b_3) \omega^3}{a_1 b_3 \omega^4 - (a_1 b_1 + b_2) \omega^2 + 1} - \arctg \frac{(a_1 + b_1) \omega - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \omega^3}{a_2 b_2 \omega^4 - (a_1 b_1 + a_2 + b_2) \omega^2 + 1} \right] \quad (8)$$

对于(8)式的模, 显然有 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| = 1$ 和 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = a_1 b_3 / (a_2 b_2)$. 而对于一般典型的元件参数值来说, a_1, a_2, b_1, b_2 和 b_3 的数值分别为 $10^{-10}, 10^{-20}, 10^{-6}, 10^{-15}$ 和 10^{-32} 这样一些数量级, 故 $a_1 b_3 / (a_2 b_2)$ 是 10^{-7} 数量级. 进一步考察(8)式, 不难看出, 当 ω 取值为 $0 \sim 10^8 \text{ rad/s}$ 时, 抛弃 $|L(j\omega)|$ 中的 ω^4 项和 ω^3 项所带来的误差是微乎其微的. 进一步, 分母中 ω^2 项的 a_2 与 $a_1 b_1$ 和 b_2 相比也完全可忽略, 这样 $|L(j\omega)|$ 的分子、分母完全相同, 即 $|L(j\omega)| = 1$. 将上述的典型数量级值代入(8)式, 可算出当 $\omega = 10^8$ 时, $|L(j\omega)| = 0.999800505$. 当 $\omega > 10^8$ 数量级, ω^4 项和 ω^3 项的作用开始明显, 由于 $|L(j\omega)|$ 分子、分母中这两项系数的差异, 误差开始逐渐增大. 分别取 $\omega = 10^9$ 和 $\omega = 10^{10}$ 可算出 $|L(j\omega)|$ 分别为 0.990195602 和 0.63245532. 对(8)式的相位可作类似的讨论, 限于篇幅, 这里不再赘述.

现在我们来确定图 1(a), 1(b) 各元素间的关系. 若要图 1(a) 与图 1(b) 等效, 则(7)式与(3)式右边应相等, 即

$$R_i R_L g_0(s) = K_{r,s}(a_1 s + 1), \quad R_i C_i R_L C_0 = b_2, \quad R_i C_i + R_L C_0 = b_1 \quad (9)$$

显然由(9)式三个方程无法解出 R_i, C_i, C_0 和 $g_0(s)$ 这四个未知量, 还需再写出一个方程, 这可由图 1(a), 1(b) 两电路输入阻抗表达式近似相等而获得. 按前述类似的近似方法(最大幅值零点抵消), 由(1)式可得到输入阻抗的近似表达式为

$$Z_{in}(s) = V_i(s)/I_i = R_{i,0}(d_1 s + 1)/(b_2 s^2 + b_1 s + 1) \quad (10)$$

其中 $d_1 = R_L(C_L + C_c)$, $R_{i,0} = (1 + g_m R_E) R_y$, R_y, b_1 和 b_2 与(2)式中的定义相同.

而由图 1(b) 所得到的输入阻抗表达式为

$$Z_{in}^{UM}(s) = V_i(s)/I_i = R_i / (s C_i R_i + 1) \quad (11)$$

比较(10)式与(11)式,我们知还应对(10)式再作近似. 由前面的讨论知 b_1 和 b_2 的典型值满足 $b_1^2 \gg 4b_2$, 我们可将(10)式的两个极点分别近似为

$$p_1 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2b_2} = \frac{b_1^2 - b_1^2 + 4b_2}{2b_2(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2})} \approx \frac{1}{b_1}$$

$$p_2 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2b_2} \approx \frac{b_1 + b_1}{2b_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (12)$$

显然 $-p_1$ 成为主导极点. 此外, (10)式有一个零点 $s = -z = -1/[R_L(C_L + C_o)]$, 其典型值与极点 $-b_1/b_2$ 的值相差不太大, 该零点与极点 $-p_2$ 的影响近似抵消, (10)式可近似为

$$Z_{in}(s) = V_i(s)/I_s \approx R_{i0}/(b_1s + 1) \quad (13)$$

比较(11)式与(13)式,可得

$$R_i = R_{i0} = (1 + g_m R_E)R_s = (1 + g_m R_E)[r_{be} \parallel (R_s + r_{bb})] \quad (14)$$

将(14)式与(2)式中的 $K_{r,s}$ 和 a_1 代入(9)式,可求得

$$g_0(s) = \frac{R_s}{R_s + r_{bb}} \left(\frac{g_m}{1 + g_m R_E} - sC_c \right) \quad (15)$$

$$C_i = (b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2})/(2R_i) \quad (16)$$

$$C_o = b_2/(R_L R_i C_i) \quad (17)$$

在 $b_1^2 \gg 4b_2$ 情况下, (16)式和(17)式可简化为 $C_i = b_1/R_i$ 和 $C_o = b_2/(b_1 R_L)$.

至此,我们找出了图 1(a), 1(b) 各元素之间的全部关系. 只要图 1(a) 中各元件的值给定,由(14), (15), (16)和(17)式可方便地计算出图 1(b) 中的 $R_i, g_0(s), C_i$ 和 C_o .

对于多级放大器,应从最后一级开始单向化,逐级向前,直到第一级. 例如,对于图 2(a) 的电路,第二级单向化后得 $C_o, g_0(s), R_i$ 和 C_{i2} , 再将第一级单向化,得 $C_i, g_i(s)$,

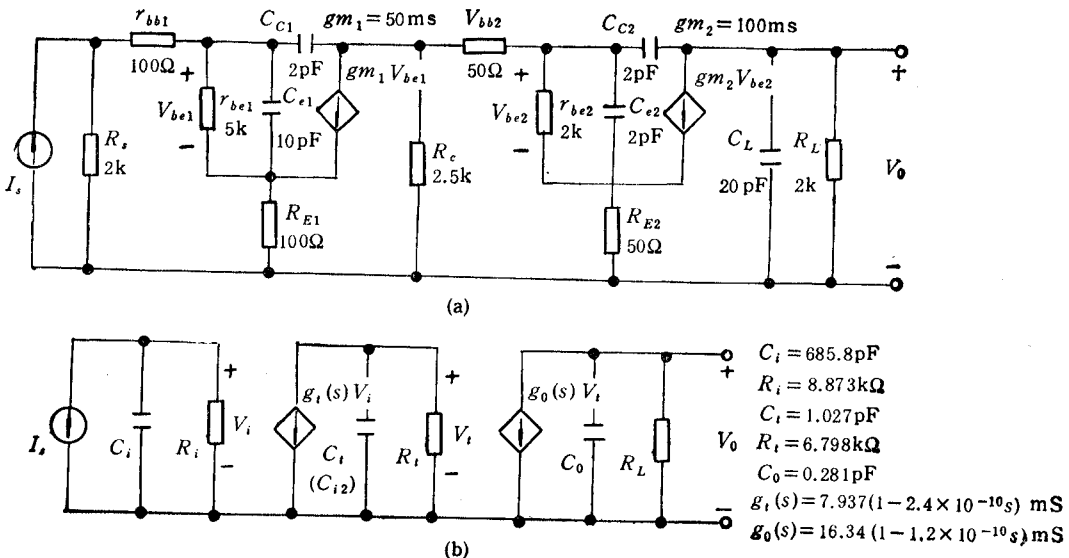


图 2

R_i 和 C_i , 最终得到图 2(b) 的单向化模型。由图 2(b), 用观察法即可写出

$$\begin{aligned}
 K_{rs}^{UM}(s) &= \frac{V_o(s)}{I_s} = \frac{\frac{R_L}{1+sC_0R_L} g_0(s) V_t(s)}{I_s} = \frac{\frac{R_L g_0(s)}{1+sC_0R_L} \frac{R_i}{1+sC_iR_i} g_i(s) V_i(s)}{I_s} \\
 &= \frac{\frac{R_L R_i g_0(s) g_i(s)}{(1+sC_0R_L)(1+sC_iR_i)} \frac{R_i}{(1+sC_iR_i)} I_s}{I_s} \\
 &= \frac{R_L R_i R_i g_0(s) g_i(s)}{(1+sC_0R_L)(1+sC_iR_i)(1+sC_iR_i)} \quad (18)
 \end{aligned}$$

3. 应用举例

让我们以图 2(a) 的电路作为一个实例。按图 2(a) 的元件值, 由(14)~(17)式可求出图 2(b) 的各参数值(标于图 2(b))。我们来考虑图 2(a) 电路的源电压增益 $K_{us}(s) = K_{rs}(s)/R_s$ 和图 2(b) 的源电压增益 $K_{us}^{UM}(s) = K_{rs}^{UM}(s)/R_s$, 代入具体值, 得

$$K_{us}^{UM}(s) = \frac{7.823 \times 10^3 (1 - 1.2 \times 10^{-10}s)(1 - 2.4 \times 10^{-10}s)}{(1 + 5.612 \times 10^{-10}s)(1 + 6.980 \times 10^{-9}s)(1 + 6.085 \times 10^{-6}s)} \quad (19)$$

由上式易看出主极点位于 $-\eta/6.085 \times 10^{-6} = -1.643 \times 10^5 \text{rad/s}$, 故 3dB 带宽为 26.15kHz。两个非主极点分别为 $-1.432 \times 10^8 \text{rad/s}$ 和 $-1.782 \times 10^9 \text{rad/s}$ 。而由传统的密勒效应近似法所得到的前两个极点分别为 $-3.015 \times 10^5 \text{rad/s}$ 和 $-2.617 \times 10^7 \text{rad/s}$, 两者相差甚远。为验证本文方法的正确性, 我们将图 2(a), 2(b) 两电路的源电压增益频响求出。图 2(b) 的频响是根据(19)式由手工用计算器算出; 而图 2(a) 频响的求取法是先列出该图的 7 个节点方程并代入具体参数值, 然后取不同频率用计算机求解该线性方程组, 所得结果见表 1。从表中可看出两者数据吻合得非常好。

表 1 图 2(a) 和图 2(b) 频响的计算值

频率 (Hz)	幅度 (dB)		相位 (°)	
	图 2(b)	图 2(a)	图 2(b)	图 2(a)
10^4	77.60	77.54	-20.92	-21.01
10^5	65.94	65.91	-75.80	-75.74
10^6	46.23	46.19	-91.00	-91.05
10^7	25.34	25.34	-113.65	-113.60
10^8	-7.47	-7.056	165.02	167.3

参 考 文 献

- [1] M. S. 高西著, 刘宝谕译, 电子线路——器件、模型、功能分析和设计, 人民教育出版社, 北京, 1980 年, 第 151—170 页。
- [2] 冯民昌, 模拟集成电路基础, 中国铁道出版社, 北京, 1991 年, 第 122—131 页。
- [3] A. M. Davis, E. A. Moustakas, *IEEE Trans. on CAS*, CAS-27(1980)5, 417—419.
- [4] D. N. Green, *IEEE Trans. on E*, E-28(1985)2, 125—130.

A NEW APPROACH TO GET UNILATERAL MODELS FOR THE AMPLIFIERS

Wu Kang

(Anhui University, Hefei 230039)

Abstract A new approach to get unilateral models for amplifiers is given. The transfer functions of such amplifiers are easily obtained by using the models. Compared with the traditional methods for determining transfer functions of amplifiers, such as the approximate method based on the Miller effect and the time constant method, the method presented in this paper is not only simple but also highly accurate.

Key words Amplifier; Unilateral model; Miller effect; Transfer function