第14卷 第6期　　电子科学学刊　　Vol. 14, No. 6
1992 年 11 月　　OURNAL OF ELECTRONICS　　Nov., 1992

回转器和理想变压器的群特性

熊元新　　马成长
(湖北工学院,武汉 430068)

摘要　本文用群论的方法研究了所有理想变压器和所有回转器构成的集合 $GIT(2)$. 结果表明 $GIT(2)$ 构成群,且为 $GL(2)$ 群的子群. $GIT(2)$ 的结构反映了回转器与理想变压器之间的内在联系. 最后考察了理想变压器的直积网络的性质.

关键词　回转器;理想变压器;群;子群;直积网络

1. 引言

群论作为一种抽象的数学工具在物理学和化学等领域中有广泛的应用. 近年来，有人试图将群论引入到电路学中,得到了一些结果[1].

目前普遍认为,电路的基本元件有 5 个,其中电阻器、电容器、电感器是二端元件，回转器和理想变压器是双口元件[2]. 用各种手段研究这些基本元件的内在联系无疑十分重要. 理想变压器集合与回转器集合及其内在关系就是这方面的课题之一. 本文以群论为工具探讨了这一问题,得到了一些有意义的结果.

2. $SL(2)$ 群和理想变压器

如果一个集合 S 满足"乘法"运算下的 4 条公理,即可称其为该运算下的一个群[3], 这是群的定义. 例如,集合

$$GL(2) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| \det A \neq 0, a_{ij} \in R \right\} \tag{1}$$

在矩阵乘法下即为群,称为一般线性群,而

$$SL(2) = \left\{ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \middle| \det B = 1, b_{ij} \in R \right\} \tag{2}$$

在矩阵乘法下也构成群，称为特殊线性群. 又由于 $SL(2) \subset GL(2)$, 故 $SL(2)$ 为 $GL(2)$ 的子群[3].

理想变压器的传输特性用矩阵表示为

$$T_n = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}, n \neq 0 \tag{3}$$

将 T_{n_1} 变压器输出和 T_{n_2} 的输入联接,仍得到变压器,其传输特性由矩阵 $T_{n_2}T_{n_1}$ 表示.即该联接操作与矩阵乘法相对应. 将所有理想变压器构成的集合记为 $IT(2)$(ideal transf

1991.06.15 收到,1992.04.27 定稿.

ormer)，则 $IT(2)$ 在矩阵乘法下满足4条群公理,从而构成群. 证明如下:

(1) 封闭性　对 $\forall T_{n_1}, T_{n_2} \in IT(2)$,有

$$T_{n_1} \cdot T_{n_2} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & 1/n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_2 & 0 \\ 0 & 1/n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 n_2 & 0 \\ 0 & 1/(n_1 n_2) \end{bmatrix} = T_{n_1 n_2} \in IT(2) \tag{4}$$

(2) 结合律　对 $\forall T_{n_1}, T_{n_2}, T_{n_3} \in IT(2)$,因

$$(T_{n_1} \cdot T_{n_2}) \cdot T_{n_3} = T_{n_1 n_2} \cdot T_{n_3} = T_{n_1 n_2 n_3} \in IT(2)$$

$$T_{n_1} \cdot (T_{n_2} \cdot T_{n_3}) = T_{n_1} \cdot T_{n_2 n_3} = T_{n_1 n_2 n_3} \in IT(2)$$

故

$$(T_{n_1} \cdot T_{n_2}) \cdot T_{n_3} = T_{n_1} \cdot (T_{n_2} \cdot T_{n_3}) \tag{5}$$

(3) 单位元的存在性　$T_1 \in IT(2)$ 即单位矩阵就是单位元,它对应着理想隔离变压器.

(4) 逆元的存在性　对 $\forall T_n \in IT(2)$，$\exists T_{1/n} \in IT(2)$，有

$$T_n \cdot T_{1/n} = T_{n \cdot 1/n} = T_1 \tag{6}$$

即 $T_n, T_{1/n}$ 互为逆元,分别为升压器和降压器.

因此 $IT(2)$ 构成群. 且 $\det T_n = 1$，故 $IT(2)$ 是 $SL(2)$ 群的一个单参数子群. 又

$$T_{n_1} \cdot T_{n_2} = T_{n_2} \cdot T_{n_1} = T_{n_1 n_2} \tag{7}$$

所以 $IT(2)$ 是一个可交换群,即 Abel 群.

3. 回转器和理想变压器构成 $GIT(2)$ 群

$$G_g = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix}, \quad \det G_g = -1 \tag{8}$$

为回转器的传输特性矩阵. 因

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/g_1 \\ g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/g_2 \\ g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2/g_1 & 0 \\ 0 & g_1/g_2 \end{bmatrix}$$

故

$$G_{g_1} \cdot G_{g_2} = T_{g_2/g_1} \in IT(2) \tag{9}$$

由(9)式可看出,回转器集合 $G(2)$(gyrator) 在矩阵乘法运算下不满足封闭性,故不构成群. 但所有回转器和理想变压器的集合 $GIT(2)$(gyrator and ideal transformer)，就满足封闭性. 下面证明在矩阵乘法下 $GIT(2)$ 满足4条群公理,故构成群.

(1) 封闭性　对 $\forall T_n \in GIT(2), G_g \in GIT(2)$，因

$$T_n G_g = \begin{bmatrix} 0 & n/g \\ g/n & 0 \end{bmatrix} = G_{g/n} \in GIT(2) \tag{10}$$

$$G_g T_n = \begin{bmatrix} 0 & 1/gn \\ gn & 0 \end{bmatrix} = G_{gn} \in GIT(2) \tag{11}$$

又由(4),(9)式知,对 $\forall G_{g_1}, G_{g_2} \in GIT(2), T_{n_1}, T_{n_2} \in GIT(2)$,

$$T_{n_1} \cdot T_{n_2} = T_{n_1 n_2} \in GIT(2) \tag{12}$$

$$G_{g_1} \cdot G_{g_2} = T_{g_2/g_1} \in GIT(2) \tag{13}$$

故封闭性成立.

(2) 结合律　(1)式中 $GL(2)$ 为群，其元素满足结合律．而 G_g、T_n 也是 $GL(2)$ 的元素，当然也满足结合律．

(3) 单位元的存在性　很显然，理想隔离变压器 T_1 仍然作为单位元而存在于 $GIT(2)$ 中．

(4) 逆元的存在性　由(6)式知 T_n 的逆元为 $T_{1/n}$．又因

$$G_g \cdot G_g = \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/g \\ g & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1 \tag{14}$$

故 G_g 的逆元就是它自己

综上所述，集合 $GIT(2)$ 构成群．根据(8)式，$GIT(2)$ 群含有行列式为 -1 的矩阵G_g，因此不是 $SL(2)$ 的子群，而是 $GL(2)$ 的子群．比较(10)、(11)式，

$$T_n G_g \neq G_g T_n \tag{15}$$

即 $GIT(2)$ 群不满足乘法的交换律，是一个非 Abel 群，而 $IT(2)$ 则是 $GIT(2)$ 群的一个 Abel 子群．

根据陪集的概念[3]，对 $\forall A \in GIT(2), A \cdot IT(2)$ 均为 $IT(2)$ 子群的陪集．根据(4)、(11)式，因

$$T_{n_0} T_n = T_{n_0 n} \in IT(2)$$

$$G_{g_0} T_n = G_{g_0 n} \in G(2)$$

故 $IT(2), G(2)$ 均为 $IT(2)$ 的陪集．又因

$$GIT(2) = IT(2) \cup G(2) \tag{16}$$

故 $IT(2), G(2)$ 在 $GIT(2)$ 群中也是 $IT(2)$ 子群的仅有的两个陪集．过去人们称变压器 $IT(2)$ 与回转器 $G(2)$ 为“姐妹关系”，以此表示二者之间关系密切．利用群论的语言，就可以将这种形象化的说法明确化，即所谓的“姐妹关系”，实际上就是子群与陪集的关系．

4. 理想变压器的直积网络

从群论中的直积运算[3]出发，人们引入了直积网络的概念[1]．对二端口网络 A，其直积网络的传输矩阵为 $A \otimes A$．文献[1]中研究了相似变换 S 下的直积网络 $S^{-1}(A \otimes A)S$，其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A = 1 \tag{17}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

S 及 S^{-1} 矩阵由网络可以实现．取输入为 V，输出为 V'，则

$$V' = S^{-1}(A \otimes A)S \tag{19}$$

文献[1]在仅证明 $v_1' = v_1$ 的情况下断定 $S^{-1}(A \otimes A)S$ 网络具有信号在其内部传递不相互影响的性质．实际上只有证明了 $v_1' = f_1(v_1), \cdots, v_4' = f_4(v_4)$ 才能下此结论．而对(19)式计算，结果为

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{11} & 2a_{11}a_{12} & a_{12}a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{21}a_{22} \\ 0 & a_{21}a_{21} & 2a_{21}a_{22} & a_{22}a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

如果要求 $v_i' = f_i(v_i)$，则因 $\det A = 1$，故有

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1 \tag{21}$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{12} = 0 \\ a_{12}a_{12} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}a_{21} = 0 \\ a_{12}a_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{21}a_{21} = 0 \\ a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

由(21),(22)式可以确定

$$a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1/a_{11} \neq 0 \tag{23}$$

所以只有 A 为理想变压器时，网络 $S^{-1}(A\otimes A)S$ 才具有文献[1]所提出的性质，从而表明了文献[1]的结果没有一般性。

5. 结论

理想变压器和回转器集合构成 $GIT(2)$ 群 其内部结构表明，理想变压器与回转器的"姐妹关系"就是子群与陪集的关系。仅当二端口网络 A 取理想变压器时，相似变换下的直积网络 $S^{-1}(A\otimes A)S$ 才具有信号在其内部传递不相互影响的性质。

参 考 文 献

[1] 戴旦前，华中理工学院学报，1984 年，第 3 期，第 99—104 页.

[2] 辻井重男，佐川雅彦合著，黄如星译，现代电路分析法，国防工业出版社，北京，1983 年，第 2—6 页.

[3] 韩其智，孙洪洲编著，群论，北京大学出版社，北京，1987 年，第 1—27 页.

THE GROUP CHARACTERS OF GYRATORS AND IDEAL TRANSFORMERS

Xiong Yuanxin Ma Chengzhang

(Hubei Institute of Technology, Wuhan 430068)

Abstract The set GIT (2) of all gyrators and ideal transformers is studied by the method of group theory in this paper. The results show that the set GIT (2) forms a group, and it is a subgroup of GL(2). The inner structure of GIT (2), which shows the relations between gyrators and ideal transformers, is also studied. Finally, the properties of the direct product network of two-port network is analysed.

Key words Gyrator; Ideal transformer; Group; Subgroup; Direct product network