

三参数 binary 细分法

段建伟,彭国华,胡玫瑰

(西北工业大学 理学院,西安 710072)

(duanjianwei@yeah.net)

摘要:通过在曲线细分过程中引入三个参数,给出一种新的细分曲线构造的算法,并利用生成多项式等方法对细分法的一致收敛性、 C^k 连续性进行了分析。在给定初始控制数据的条件下,可以通过对形状参数的适当选择来实现对细分极限曲线形状的调控。该方法可以生成 C^k 连续的细分曲线,增加了曲线造型的灵活性。数值试验表明这种算法是有效的。

关键词:细分法;极限曲线;一致收敛性; C^k 连续性

中图分类号:TP391.41 **文献标志码:**A

Binary subdivision scheme with three parameters

DUAN Jian-wei, PENG Guo-hua, HU Mei-gui

(College of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: A new scheme was presented to design subdivision curves by introducing three control parameters in the subdivision process. The sufficient conditions of the uniform convergence and C^k continuity of this subdivision scheme were analyzed. Given the condition of the initial data, the curve shape can be adjusted and controlled through selecting appropriate parameters. The scheme could produce subdivision curve of C^k continuity of limit curve, and the curve modeling was flexible. Some examples of the curve design were given to demonstrate the efficiency of the scheme.

Key words: subdivision scheme; limit curve; uniform convergence; C^k continuity

细分法是一种离散化造型方法,其处理过程简单,对数据的计算、生成和显示的速度快,因此越来越受到计算机辅助几何设计开发工作人员的重视并在几何造型及计算机图形学领域得到广泛应用。为了提高计算机显示曲线的速度,1987年 N. Dyn 等人^[1]提出了经典四点细分法,是一种单参数插值细分法,生成的曲线达到 C^1 连续。从理论上对 binary 细分法及其极限曲线的存在性和光滑性进行研究。曹沅等人^[2]研究了四点插值细分法的连续性,得到了一个极限函数具有二阶导函数的充分必要条件及二阶导函数的解析表达式并将结果推广到曲面的情形。M. F. Hassan 等人^[3]提出 ternary 四点插值细分法,极限曲线达到 C^2 连续。郑红婵等人^[4-5]提出了双参数 binary 细分法和双参数 C^2 插值细分法。Z. J. CAI 等人^[6]也对细分算法进行了研究并取得了一定的成果。但仍存在极限曲线的形状控制不够灵活等不足。为了增加极限曲线的可控性,解决目前细分方法单一、细分不够灵活等问题,本文在经典 binary 四点插值细分法的基础上提出了新的细分算法。并利用生成多项式等方法,对细分法的收敛性和连续性进行了分析。算法中引进三个参数,可通过对参数的适当调节较容易的控制极限曲线的形状。

1 预备知识

由于本文应用到 N. Dyn^[7]提出和 M. F. Hassan 等人^[3]推广的基于生成函数的分析技术,下面对这一理论进行简要介绍。

定义1 如果对任何初始数据 $f^0 = \{f_i; i \in \mathbf{Z}\}$,存在一个连续函数 f ,对于任意的闭区间 $I \subset \mathbf{R}$,满足: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f$

$\sup_{i \in 2^k \mathbf{Z}} |f_i^k - f(2^{-k}i)| = 0$,那么细分法 S 一致收敛。

显然, $f = S^\infty f^0$,对于掩模为 α 的任意细分法 $S, \alpha(z)$ 定义为 $\alpha(z) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \alpha_i z^i$ 。

引理1^[3,7] 若掩模为 α 的细分法 S 是一致收敛的,则

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \alpha_{2j} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \alpha_{2j+1} = 1 \quad (1)$$

根据引理1,一个收敛的细分法 S 满足: $\alpha(-1) = 0$,

$\alpha(1) = 2$, Laurent 多项式为 $\alpha_1(z) = \frac{2z}{1+z} \alpha(z)$ 。

引理2^[3,7] 设细分法 S 的 $\alpha(z)$ 满足式(1),则存在细分法 S_1 及性质 $df^k = S_1 df^{k-1}$,这里 $f^k = S^k f^0, df^k = \{(df^k)_i = 2^k(f_{i+1}^k - f_i^k); i \in \mathbf{Z}\}$ 。

引理3^[3,7] 细分法 S 一致收敛当且仅当 $\frac{1}{2}S_1$ 对任何初始数据 f^0 均一致收敛于0函数,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}S_1)^k f^0 = 0$ 。

进而可以采用下面的方法来证明细分法 S 的收敛性:先计算 $\frac{1}{2}S_1$ 的掩模,然后计算 $\|(\frac{1}{2}S_1)^i\|_\infty, i = 1, 2, \dots$,如果存在 $L \in \mathbf{Z}^+$ 满足 $\|(\frac{1}{2}S_1)^L\|_\infty < 1$,则细分模式 S 一致收敛。其中:

$$\|(\frac{1}{2}S_1)^L\|_\infty = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\alpha_{2j}^L|, \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\alpha_{2j+1}^L| \right\}$$

引理4^[3,7] 若细分模式 $S_{k+1}/2$ 对任何初始数据 f^0 一致收敛于0,则 $S^\infty f^0 \in C^k(\mathbf{R})$ 即 $S^\infty f^0$ 具有 C^k 连续。

收稿日期:2009-04-07;修回日期:2009-05-20。 基金项目:国家自然科学基金资助项目(60672135)。

作者简介:段建伟(1978-),男,陕西汉中,人,硕士研究生,主要研究方向:计算机图形学、计算机辅助几何设计; 彭国华(1962-),男,湖北黄冈人,教授,博士生导师,主要研究方向:计算机图形学、计算机辅助几何设计、计算机图像处理; 胡玫瑰(1983-),女,陕西西安人,硕士研究生,主要研究方向:计算机图形学、计算机辅助几何设计。

2 三参数 binary 细分法及连续性分析

为了增加生成曲线的可控性,在 Dyn 提出的四点插值细分法的基础上引入三个参数来调节极限曲线的形状,新的细分法定义如下。

定义 2 给定初始控制顶点集 $P^0 = \{P_j^0 \in \mathbf{R}^d\}_{j=-2}^{n+2}$, 设 $P^k = \{P_j^k\}_{j=-2}^{2^{k+1}n+2}$ 为第 k 次细分后的控制顶点集, 递归地定义 $\{P_j^{k+1}\}_{j=-2}^{2^{k+1}n+2}$ 的三参数 binary 细分法的生成规则为:

$$R: \begin{cases} P_{2i}^{k+1} = \lambda P_{i-2}^k + \mu P_{i-1}^k + (1-2\mu-2\lambda)P_i^k + \mu P_{i+1}^k + \lambda P_{i+2}^k, & 0 \leq i \leq 2^k n \\ P_{2i+1}^{k+1} = \omega P_{i-1}^k + (\frac{1}{2}-\omega)P_i^k + (\frac{1}{2}-\omega)P_{i+1}^k + \omega P_{i+2}^k, & -1 \leq i \leq 2^k n \end{cases} \quad (2)$$

其中 $-1/64 < \lambda < 3/64$ 。

为了解释细分参数的几何意义,将细分规则式(2)的前两项改写为:

$$\begin{cases} P_{2i}^{k+1} = P_i^k + 2\mu(\frac{P_{i-1}^k + P_{i+1}^k}{2} - P_i^k) + 2\lambda(\frac{P_{i-2}^k + P_{i+2}^k}{2} - P_i^k), & 0 \leq i \leq 2^k n \\ P_{2i+1}^{k+1} = \frac{P_i^k + P_{i+1}^k}{2} + 2\omega(\frac{P_{i-1}^k + P_{i+2}^k}{2} - \frac{P_i^k + P_{i+1}^k}{2}), & -1 \leq i \leq 2^k n \end{cases}$$

张力参数 ω 表示第 $k+1$ 层的新点 P_{2i+1}^{k+1} 远离由第 k 层的两点 P_i^k, P_{i+1}^k 构成的边的中点的程度,即新点 P_{2i+1}^{k+1} 靠近 P_i^k, P_{i+1}^k 的程度。

λ, μ, ω 的几何意义如图 1 所示, $e = \frac{P_{i-1}^k + P_{i+2}^k}{2} - \frac{P_i^k + P_{i+1}^k}{2}$, $e_1 = \frac{P_{i-1}^k + P_{i+1}^k}{2} - P_i^k$, $e_2 = \frac{P_{i-2}^k + P_{i+2}^k}{2} - P_i^k$, 其中实心圆点表示新点。

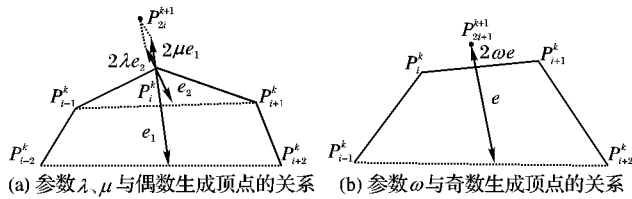


图 1 三参数的几何意义

从式(2)可知,当 $\lambda = \mu = 0$ 且 ω 为 $-\omega$ 时,三参数 binary 细分法成为经典四点细分法。

由三参数细分法的细分规则知, $\alpha_{-4} = \lambda, \alpha_{-3} = \omega, \alpha_{-2} = \mu, \alpha_{-1} = \frac{1}{2} - \omega, \alpha_0 = 1 - 2\mu - 2\lambda, \alpha_1 = \frac{1}{2} - \omega, \alpha_2 = \mu, \alpha_3 = \omega, \alpha_4 = \lambda$; 故细分法的生成多项式及 mask 分别为:

$$\alpha(z) = \lambda z^{-4} + \omega z^{-3} + \mu z^{-2} + (\frac{1}{2} - \omega)z^{-1} + (1 - 2\mu - 2\lambda) + (\frac{1}{2} - \omega)z + \mu z^2 + \omega z^3 + \lambda z^4$$

$$\alpha = \{\alpha_j\} = [\dots, 0, \lambda, \omega, \mu, \frac{1}{2} - \omega, 1 - 2\mu - 2\lambda, \frac{1}{2} - \omega, \mu, \omega, \lambda, 0, \dots]$$

显然 mask 满足式(1),将三参数 binary 细分法记为 $S(R; \lambda, \mu, \omega)$, 简记为 S 。关于细分法 S 的一致收敛性和连续性,有如下结论。

定理 1 对于任意的控制多边形,基于三参数 binary 细

分法生成的极限曲线满足 $|\lambda| + |\mu - \omega + \lambda| + |-\mu - \lambda + \frac{1}{2}| + |\omega - \lambda| < 1$ 时一致收敛,即存在唯一紧支集连续函数 $S^\infty P^0 \in C^0[0, n]$ 为其极限函数。

证明 细分法 S 的一阶差分细分法 $\frac{1}{2}S_1$ 的生成多项式可表示为:

$$\alpha^{(1)}(z) = \frac{2z}{1+z}\alpha(z) = 2[\lambda z^{-3} + (-\lambda + \omega)z^{-2} + (\mu - \omega + \lambda)z^{-1} + (-\mu - \lambda + \frac{1}{2}) + (-\mu - \lambda + \frac{1}{2})z + (\mu - \omega + \lambda)z^2 + (-\lambda + \omega)z^3 + \lambda z^4]$$

$$\alpha^{(1)} = \{\alpha_j^{(1)}\} = 2[\dots, 0, \lambda, -\lambda + \omega, \mu - \omega + \lambda, -\mu - \lambda + \frac{1}{2}, -\mu - \lambda + \frac{1}{2}, \mu - \omega + \lambda, -\lambda + \omega, \lambda, 0, \dots]$$

因此,当 $\|\frac{1}{2}S_1\|_\infty = \frac{1}{2}\max\{\sum_j |\alpha_j^{(1)}|, \sum_j |\alpha_{j+1}^{(1)}|\} = \max\{|\lambda| + |\mu - \omega + \lambda| + |-\mu - \lambda + \frac{1}{2}| + |\omega - \lambda|, |\lambda| + |\mu - \omega + \lambda| + |-\mu - \lambda + \frac{1}{2}| + |\omega - \lambda|\} = |\lambda| + |\mu - \omega + \lambda| + |-\mu - \lambda + \frac{1}{2}| + |\omega - \lambda| < 1$ 时,根据引理 4 有,细分法 S 是一致收敛的即 $S^\infty P^0 \in C^0[0, n]$ 。

定理 2 对于任意的控制多边形,基于三参数 binary 细分法生成的极限曲线满足 $\max\{2|\lambda| + 2|3\lambda - 2\omega + \mu|, 2|-2\lambda + \omega| + |-4\lambda + 2\omega - 2\mu + \frac{1}{2}|\} < \frac{1}{2}$ 时, $S^\infty P^0 \in C^1[0, n]$ 即细分极限曲线至少是 C^1 连续的。

证明 易验证 $\alpha, \alpha^{(1)}$ 满足式(1),且

$$\alpha^{(2)}(z) = \frac{2z}{1+z}\alpha^{(1)}(z) = 2^2[\lambda z^{-2} + (-2\lambda + \omega)z^{-1} + (3\lambda - 2\omega + \mu) + (-4\lambda + 2\omega - 2\mu + \frac{1}{2})z + (3\lambda - 2\omega + \mu)z^2 + (-2\lambda + \omega)z^3 + \lambda z^4]$$

$$\alpha^{(2)} = \{\alpha_j^{(2)}\} = 2^2[\dots, 0, \lambda, -2\lambda + \omega, 3\lambda - 2\omega + \mu, -4\lambda + 2\omega - 2\mu + \frac{1}{2}, 3\lambda - 2\omega + \mu, -2\lambda + \omega, \lambda, 0, \dots]$$

因此,当细分法 $\frac{1}{2}S_2$ 的模 $\|\frac{1}{2}S_2\|_\infty = \frac{1}{2} \times 2^2 \max\{\sum_j |\alpha_j^{(2)}|, \sum_j |\alpha_{j+1}^{(2)}|\} = 2 \max\{2|\lambda| + 2|3\lambda - 2\omega + \mu|, 2|-2\lambda + \omega| + |-4\lambda + 2\omega - 2\mu + \frac{1}{2}|\} < 1$ 时,根据引理 4 有,细分极限曲线至少是 C^1 连续的。

定理 3 当参数 λ, μ 及 ω 满足 $4\lambda - 2\omega + \mu = \frac{1}{8}$:

1) 对于任意的控制多边形,基于三参数 binary 细分法生成的极限曲线满足 $|\lambda| + |2\lambda - \omega + \frac{1}{8}| + |-3\lambda + \omega| < \frac{1}{4}$ 时, $S^\infty P^0 \in C^2[0, n]$ 即细分极限曲线至少是 C^2 连续的;

2) 对于任意的控制多边形,基于三参数 binary 细分法生成的极限曲线满足 $\max\{|\lambda| + |10\lambda - 4\omega + \mu| + |33\lambda - 16\omega + 8\mu - 1|, |-4\lambda + \omega| + |-20\lambda + 9\omega - 4\mu + \frac{1}{2}|\} < \frac{1}{8}$ 时, $S^\infty P^0 \in C^3[0, n]$ 即细分极限曲线至少是 C^3 连续的。

证明 1) 当 $4\lambda - 2\omega + \mu = \frac{1}{8}$ 时, 易知 $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ 满足式(1), 且

$$\alpha^{(3)}(z) = \frac{2z}{1+z} \alpha^{(2)}(z) = 2^3 [\lambda z^{-1} + (-3\lambda + \omega) + (6\lambda - 3\omega + \mu)z + (-10\lambda + 5\omega - 3\mu + \frac{1}{2})z^2 + (13\lambda - 7\omega + 4\mu - \frac{1}{2})z^3 + (-15\lambda + 8\omega - 4\mu + \frac{1}{2})z^4]$$

$$\alpha^{(3)} = \{\alpha_j^{(3)}\} = 2^3 [\dots, 0, \lambda, -3\lambda + \omega, 6\lambda - 3\omega + \mu, -10\lambda + 5\omega - 3\mu + \frac{1}{2}, 13\lambda - 7\omega + 4\mu - \frac{1}{2}, -15\lambda + 8\omega - 4\mu + \frac{1}{2}, 0, \dots]$$

因此, 当

$$\| \frac{1}{2} S_3 \|_\infty = \frac{1}{2} \times 2^3 \max \left\{ \sum_j |\alpha_j^{(3)}|, \sum_j |\alpha_{j+1}^{(3)}| \right\} = 2^2 \max \left\{ |\lambda| + |6\lambda - 3\omega + \mu| + |13\lambda - 7\omega + 4\mu - \frac{1}{2}|, | -3\lambda + \omega | + | -10\lambda + 5\omega - 3\mu + \frac{1}{2} | + | -15\lambda + 8\omega - 4\mu + \frac{1}{2} | \right\} = 4(|\lambda| + |2\lambda - \omega + \frac{1}{8}| + | -3\lambda + \omega |) < 1$$

时, 根据引理 4 有, 细分极限曲线至少是 C^2 连续的。

2) 当 $4\lambda - 2\omega + \mu = \frac{1}{8}$ 时, 显然 $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ 满足式(1), 且

$$\alpha^{(4)}(z) = \frac{2z}{1+z} \alpha^{(3)}(z) = 2^4 [\lambda + (-4\lambda + \omega)z + (10\lambda - 4\omega + \mu)z^2 + (-20\lambda + 9\omega - 4\mu + \frac{1}{2})z^3 + (33\lambda - 16\omega + 8\mu - 1)z^4]$$

$$\alpha^{(4)} = \{\alpha_j^{(4)}\} = 2^4 [\dots, 0, \lambda, -4\lambda + \omega, 10\lambda - 4\omega + \mu, -20\lambda + 9\omega - 4\mu + \frac{1}{2}, 33\lambda - 16\omega + 8\mu - 1, 0, \dots]$$

因而, 当

$$\| \frac{1}{2} S_4 \|_\infty = \frac{1}{2} \times 2^4 \max \left\{ \sum_j |\alpha_j^{(4)}|, \sum_j |\alpha_{j+1}^{(4)}| \right\} = 8 \max \left\{ |\lambda| + |10\lambda - 4\omega + \mu| + |33\lambda - 16\omega + 8\mu - 1|, | -4\lambda + \omega | + | -20\lambda + 9\omega - 4\mu + \frac{1}{2} | \right\} < 1$$

时, 由引理 4 知, 细分极限曲线是 C^3 连续的。

定理 4 当 $\omega = 4\lambda + \frac{1}{32}, \mu = 4\lambda + \frac{3}{16}$ 时, 对满足 $-1/64 < \lambda < 3/64$ 的所有 λ , 细分极限曲线是 C^4 连续的即 $S^\infty P^0 \in C^4[0, n]$ 。

证明 当 $\omega = 4\lambda + \frac{1}{32}, \mu = 4\lambda + \frac{3}{16}$ 时, 易知 $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}$ 满足式(1), 且

$$\alpha^{(5)}(z) = \frac{2z}{1+z} \alpha^{(4)}(z) = 2^5 [\lambda z + (-5\lambda + \omega)z^2 + (15\lambda - 5\omega + \mu)z^3 + (-35\lambda + 14\omega - 5\mu + \frac{1}{2})z^4]$$

$$\alpha^{(5)} = \{\alpha_j^{(5)}\} = 2^5 [\dots, 0, \lambda, -5\lambda + \omega, 15\lambda - 5\omega + \mu, -35\lambda + 14\omega - 5\mu + \frac{1}{2}, 0, \dots]$$

$$\omega, 15\lambda - 5\omega + \mu, -35\lambda + 14\omega - 5\mu + \frac{1}{2}, 0, \dots]$$

因而, 当

$$\| \frac{1}{2} S_5 \|_\infty = \frac{1}{2} \times 2^5 \max \left\{ \sum_j |\alpha_j^{(5)}|, \sum_j |\alpha_{j+1}^{(5)}| \right\} = 16 \max \left\{ |\lambda| + |15\lambda - 5\omega + \mu|, | -5\lambda + \omega | + | -35\lambda + 14\omega - 5\mu + \frac{1}{2} | \right\} = 16(|\lambda| + | \lambda - \frac{1}{32} |) < 1$$

时, 由引理 4 知, $S^\infty P^0 \in C^4[0, n]$ 即细分极限曲线 C^4 连续。

3 数值算例

图 2 所示为采用本文方法, 经过四次细分, 所得到的 $C^1 \sim C^4$ 连续细分曲线的图形。其中, 细、粗实线分别表示初始控制多边形和极限曲线。在给定初始控制多边形后, 三参数 binary 细分法中取不同的参数值可以使极限曲线达到不同的光滑性, 从而可以根据对参数的适当选取来生成满足一定光滑度的曲线。

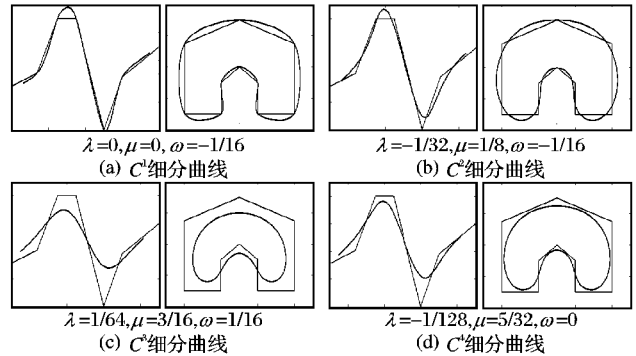


图 2 三参数 binary 细分法的算例

可以看出, 令 $\lambda = \mu = 0$ 并适当选择张力参数 ω , 可造型光滑插值曲线, 当参数 ω 在一定范围内从小到大渐增取值时, 细分极限曲线先是“向外插值”, 再“向内插值”, 如图 3(a) 所示; 令 λ, μ 不同时为 0 并适当选择 λ, μ, ω , 可造型光滑逼近曲线。从图 2(b) ~ (d) 中可以看出, 随着参数 λ, μ 和 ω 的增大, 细分极限曲线逐渐偏离初始控制多边形, 同时向内微缩。图 3(b) 说明了形状参数 λ 的取值对细分曲线形状的影响。给定参数 μ 和 ω , 当 λ 在一定范围内取值且逐渐减小时, 细分极限曲线逐渐逼近初始控制多边形。形状参数 μ, ω 的取值对细分曲线的形状也有类似的影响。

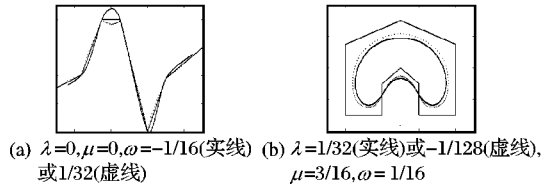


图 3 三参数对细分曲线形状的影响

4 结语

本文讨论了生成曲线的三参数 binary 细分法, 算法中引入了三个控制参数, 增加了曲线造型的灵活性, 通过调整参数值, 可以得到不同程度地接近控制多边形的曲线, 同时仍然能保证极限曲线有较高的光滑度, 可达到 C^4 连续。由于增加了对极限曲线的可控性, 从而满足了曲线曲面设计的需求。数值试验表明我们提出的细分方法是有效的。

(下转第 2595 页)

机视觉领域一个重要研究问题。本文介绍当前主要的空间直线定位算法,分析了它们的优缺点。并在已有算法的基础上,

提出了基于“主像点/非主像点定位”的空间水平直线定位算法,实验结果表明该算法具有较高的精度和实际可用性。

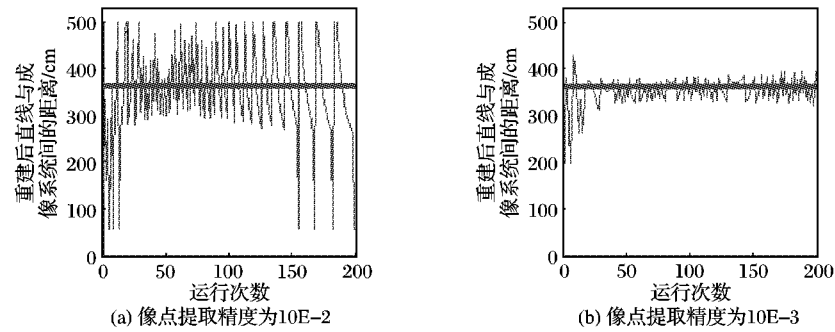


图3 同一直线不同像点提取精度下的实验结果

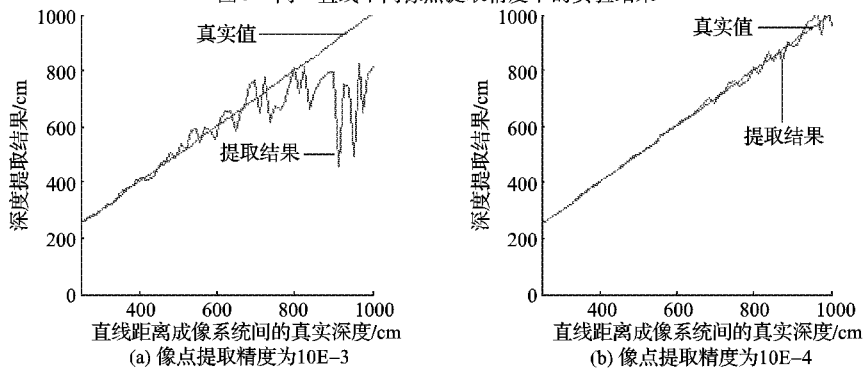


图4 不同直线相同像点提取精度下的实验结果

参考文献:

- [1] KIM J C, LEE K M, CHOI B T, *et al.* A dense stereo matching using two-pass dynamic programming with generalized ground control points [C]// Proceedings of the 2005 International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2005: 1075 - 1082.
- [2] KOLMOGOROV V, ZABIN R. What energy functions can be minimized via graph cuts? [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 147 - 159.
- [3] KLAUS A, SORMANN M, KARNER K. Segment-based stereo matching using belief propagation and a self-adapting dissimilarity measure [C]// Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2006: 15 - 18.
- [4] LANMAN D, WACHS M, TAUBIN G, *et al.* Reconstructing a 3D line from a single catadioptric image [C]// Proceedings of the 3rd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization, and Transmission. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2006: 89 - 96.
- [5] CAGLIOTI V, GASPARINI S, TADDEI P. Methods for space line localization from single catadioptric images new proposals and comparison [C]// Proceedings of 2007 International Conference on Computer Vision. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2007: 1 - 6.
- [6] CAGLIOTI V, GASPARINI S. On the localization of straight lines in 3D space from single 2D images [C]// Proceedings of 2005 International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington, DC: IEEE Computer Society, 2005: 1129 - 1134.
- [7] PINCIROLI C, BONARINI A, MATTEUCCI M. Robust detection of 3D scene horizontal and vertical lines in conical catadioptric sensors [EB/OL]. [2009 - 01 - 11]. <http://iridia.ulb.ac.be/~cpinciroli/pdf/pinciroli05Robust.pdf>.
- [8] BAKER S, NAYAR S K. A theory of single-viewpoint catadioptric image formation [J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 35(2): 175 - 196.
- [9] 曾吉勇. 折反射全景立体成像[D]. 成都: 四川大学, 2003.
- [10] FIALA M, BASU A. Panoramic stereo reconstruction using non-SVP optics [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2005, 8(3): 363 - 397.
- [11] FIALA M, BASU A. Hough transform for feature detection in panoramic images [J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(14): 1863 - 1874.

(上接第 2577 页)

参考文献:

- [1] DYN N, LEVIN D, GREGORY J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 257 - 268.
- [2] 曹沅. 四点插值细分算法极限曲线曲面 C^2 连续的充分必要条件 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学报, 2003, 15(8): 961 - 966.
- [3] HASSAN M F, IVRISIMITZIS I P, DODFSON N A, *et al.* An interpolation 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 1 - 18.
- [4] 郑红婵, 叶正麟, 赵红星. 双参数四点细分法及其性质 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学报, 2004, 16(8): 1140 - 1145.
- [5] 郑红婵, 叶正麟, 赵红星. 双参数 C^2 插值细分法 [J]. 西北工业大学学报, 2004, 22(3): 329 - 332.
- [6] CAI ZHI-JIE. Convergence, error estimation and some properties for four-point interpolation subdivision scheme [J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(5): 459 - 468.
- [7] DYN N. Subdivision schemes in computer aided geometric design [M]// LIGHT W. Advances in Numerical Analysis. Oxford: Clarendon Press, 1992: 36 - 104.
- [8] 张丽梅, 罗钟铤. 一类新的细分曲线方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2004, 26(2): 186 - 192.
- [9] 王国谨, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.