第 29 卷第 5 期　　系统工程理论与实践　　Vol.29, No.5
2009年 5 月　　Systems Engineering — Theory & Practice　　May, 2009

文章编号: 1000-6788(2009)05-0059-10

两状态变量风险投资项目的投资价值评估模型

周海林 [1], 汪寿阳 [2]

(1. 北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100191; 2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘　要　鉴于现有的项目价值评估模型都以总体价值作为评估对象, 它们不适合于以可转换证券为主要投资工具的风险投资项目的投资价值评估, 建立了一个以可转换债券为投资工具的、考虑了利率动态变化影响的两状态变量风险投资项目的投资价值评估模型, 并利用币值转换和时间转换方法对所建模型进行了求解. 比较静态分析结果表明：风险投资项目的投资价值随着创业企业价值的波动率的增大呈现先减小后增大的特点; 利率的波动率对投资价值的影响与投资期限有关; 投资价值随着转换比例、利率与创业企业价值的瞬时相关系数和投资期限的增大而增大.

关键词　风险投资; 价值评估; 两状态变量; 币值转换和时间转换; 比较静态分析

中图分类号　F830　　　**文献标志码**　A

Two state variables evaluating model of venture capital investments

ZHOU Hai-lin[1], WANG Shou-yang[2]

(1. School of Economics & Management, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract　This paper is to build an evaluating model of V.C. investment in which convertible bonds are chosen as the investment instruments. The model has two state variables to consider the influence of the dynamic change of interest rate and we solve the evaluating model by changes of numeraire and changes of time. The comparatively static analysis shows that the value of V.C. investment decreases firstly and then increases with the increase of the volatility of the value of venture business, the change of the value of V.C. investment caused by the change of the volatility of interest rate is affected by maturity to roll out, and the value of V.C. investment is positive correlation to some factors such as convertible ratio, maturity to roll out and the instantaneous correlation coefficient between interest rate and the value of venture business.

Keywords　venture capital; evaluation; two state variables; changes of numeraire and time; comparatively static analysis

1　引言

基于实践应用的重要性, 很多学者对如何合理地进行项目估价提出了很多有意义的方法, 如折现现金流方法、层次分析法、实物期权法等. 对折现现金流计算方法的研究在资本资产定价理论提出以后已趋于成熟, 而层次分析法则更适于对项目的定性分析, 所以, 目前对投资项目价值评估研究集中在如何利用实物期权法对投资项目进行估价的研究.

收稿日期: 2007-11-28

作者简介: 周海林 (1977–), 男, 北京航空航天大学经济管理学院博士研究生, 主要从事金融工程与风险投资研究; 汪寿阳 (1958–), 男, 中国科学院数学与系统科学研究院副院长, 研究员, 主要从事金融工程、知识管理与决策分析研究.

文献 [1] 首先指出了金融期权和实物期权之间的相似性, 该文认为, 一个公司权益与一个看涨期权有相似的特征, 在效果上股权持有者对公司的未来现金流具有或有要求权. 文献 [2–3] 把对某个项目的每一次投资机会都看成实物期权, 后面投资机会依赖于前面的投资机会, 进而通过把项目投资看作一个复合式期权建立了项目价值的评估模型. 文献 [4–5] 建立了放弃期权和等待期权投资的估价模型. 文献 [6] 对项目投资中的实物期权进行了较为全面的研究, 把实物期权分成六类, 企业面临着等待期权、分段投资期权、改变公司规模的期权、改变 (投入、产出、风险资产等) 的期权、成长性期权等, 实物期权之间可能会产生乘数作用, 即还存在乘数期权. 文献 [7] 建立了一个模型, 假设标的资产服从随机跳跃过程和一定的漂移成分, 成功地运用在电子业跨国公司 Philips 的 R&D 项目估价上. 文献 [8] 分析了利率风险对成长性期权价值的影响. 文献 [9–10] 研究了实物期权的执行价格具有不确定性条件下的项目估价问题. 文献 [11–12] 将市场结构内生于价值评估和决策模型中作为影响项目价值的一种不确定性因素, 研究了竞争环境下的实物期权估价问题.

这些研究的一个重要特点是仅对项目的总价值进行估算. 这些研究通常适合于以下几种情况: 1) 投资者独立对一个新建项目进行投资; 2) 多个投资者共同出资对一个新建项目在投资; 3) 投资者以股权投资的方式对他人经营的项目进行投资. 前者, 只需计算出项目总价值; 后两者, 在对项目总价值进行估算之后很容易得出是投资金额下将占有项目的股权比例.

显然, 风险投资不是以上三种情况中的任意一种. 风险投资是对他人正在经营的发展潜力大的创业企业进行投资. 基于风险投资项目的委托代理特点, 为了建立合理的契约, 投资方很少采用以普通股为主的方式进行投资. 文献 [13] 的实证研究表明, 在调查的 213 个风险投资项目中, 有 96.7%的项目以可转换证券作为主要投资工具. 由于可转换证券的收益特征与普通股相差很大, 所以现有文献中的以项目总价值为评估对象的方法不再适合风险投资项目的估价. 这些评估方法只能得到创业企业的总价值, 而风险资本家无法得出在既定收益分配方案下对既定项目投资应出资多少, 或者是无法得到在既定预算支出下对既定项目应该采取什么合理的收益分配方案.

为此, 本文建立了一个能够评估风险投资项目的投资价值的模型. 文章分为五个部分. 第二部分, 我们建立了一个考虑利率动态变化影响的风险投资项目的两状态变量投资价值评估模型; 第三部分, 我们对投资价值进行了比较静态分析, 得到了几个重要参数对投资价值的影响; 第四部分, 总结了本文研究得出的主要结果; 第五部分为附录, 在附录中我们给出了利用币值转换和时间转换方法求解模型的过程.

2 评估模型

为了行文的方便, 我们定义: 一个风险投资项目的投资价值就是该项目能够给风险资本家带来的收益. 于是, 一个风险投资项目的投资价值就是风险资本家能够从该项目中获得的收益. 风险资本家在进行风险投资时, 将资金和管理服务注入创业企业换取创业企业对自己私募发行的可转换证券, 风险资本家从该项目中获得的收益就表现为可转换证券的价值. 因此可以将风险投资项目的投资价值看作是投资者从创业企业投资中所获得的可转换证券价值.

2.1 模型的基本假设

1) 风险资本家以可转换债券作为投资工具对创业企业进行投资. 现实世界中, 风险资本家常用作投资工具的可转换证券有可转换优先股、可转换债券和附有认股权的债券三种, 由于三者的性质没有本质的差异, 这里选取可转换债券作为模型中投资工具进行分析.

2) 在投资期间, 创业企业对投资者分配的股利很少, 可以忽略. 我们假设风险资本是追求高收益, 不会为了获得较少的股利而放弃优先清偿权将可转换债券在到期日转换为股票. 所以, 这里的可转换债券是固定转换制度债券, 即债券持有人只有在到期时刻 T 才可以行使转换权利, T 同时也表示投资期限.

3) 创业企业股票价格为 $S(t)$, 共有 m 股, 创业企业仅有固定转换制度的可转债为公司负债, 可转换债券的价值为 $CB(t)$, 共有 n 份, 创业企业资产价值为 $A(t)$, 那么企业资产价值为:

$$A(t) = mS(t) + nCB(t) \tag{1}$$

4) 可转换债券在 T 时刻到期, 本金及利息之和为 K, 转股比例 α, 即 1 份可转换债券可转换为 α 股公

司的股票.

5) 投资市场受到两种不确定性来源的影响, 它们分别由两个在概率空间 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ p)$ 上相互独立的标准 Brown 运动 $(W_1(t), W_2(t),\ t\in[0,T])$ 来表示. 市场参与者获得的信息流由 σ-域流 $(\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T])$ 来表示. 这两个风险源来自利率和创业企业价值的随机特性. 把利率也作为一个风险源的原因来自文献 [8], 该文分析了利率风险对投资价值的影响, 但是没有建立一个考虑利率动态变化的评估模型, 本文将弥补这一缺陷.

6) 投资市场是完全的. 我们假设风险投资中运用的投资工具是可以被金融市场中的其它证券组合完全复制. 在无套利的情况下, 存在唯一的等价于历史概率 P 的概率测度 Q, 使得任何资产的连续贴现价格是一个 Q 鞅. 这一概率 Q 即所谓的 “风险中性” 概率.

7) 市场利率 $r(t)$ 服从 Vasicek 模型. 有多种描述利率动态变化模型, 如 Vasicek 模型、CIR 模型、Hull-White 模型、HJM 模型以及非参数模型等, 这些模型各有优劣. 本文假设利率服从 Vasicek 模型:

$$\mathrm{d}r(t)=\theta(\mu_r-r(t))\mathrm{d}t+\sigma_r\mathrm{d}W_1(t) \tag{2}$$

其中 θ、μ_r 和 σ_r 为常数; t 表示时间; $\mathrm{d}W_1(t)=\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}$($\varepsilon$ 表示从标准正态分布中取的一个随机值, 即 $W_1(t)$ 为服从标准布朗运动的随机变量). 利率以速率 θ 拉向水平 μ_r. 这个额外的 “拉力” 是服从正态分布的随机项 $\sigma_r\mathrm{d}W_1(t)$.

8) 创业企业资产价值 $A(t)$ 由如下几何布朗运动来描述:

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{A(t)}=\mu_A\mathrm{d}t+\sigma_A[\rho\mathrm{d}W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_2(t)] \tag{3}$$

其中, μ_A 和 σ_A 分别表示单位时间内创业企业资产收益率的收益率和标准差; $W_2(t)$ 为独立于 $W_1(t)$ 的另一个服从标准布朗运动; $\rho\mathrm{d}W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}W_2(t)$ 这一随机函数可以看作一个标准布朗运动, 它的均值为 0, 方差为 $\mathrm{d}t$; ρ 反映了创业企业资产价值 $A(t)$ 和随机利率 $r(t)$ 的瞬时相关系数, $|\rho|\le 1$.

2.2 模型的建立

考虑到创业企业有可能会破产清算, 出现资不抵债的情况, 即在 T 时刻公司资产可能少于债券的总本息和. 由于债券的清偿权优先于股票, 所以在到期日 T 时刻可转换债券的价值为: 当公司资产少于债券的总本息和, 一份可转债可以获得公司资产的 n 分之一; 当公司资产大于债券总本息和, 但可转债在转股后的权益价值又小于债券的本息和时, 风险资本家将选择继续持有债券, 转债的价值应该为本息和; 当转股后的权益价值大于债券的本息和时, 债券持有人才会实施转股权力, 将债券转换为股票. 即在 T 时刻创业企业的股权价值为:

$$mS(T)=\begin{cases}0, & 若A(T)<nK\\ A(T)-nK, & 若nK\le A(T)\le\dfrac{m+n\alpha}{\alpha}K\\ A(T)-A(T)\dfrac{n\alpha}{m+n\alpha}, & 若A(T)>\dfrac{m+n\alpha}{\alpha}K\end{cases} \tag{4}$$

根据以上三种情况, 可以把创业企业在 T 时刻的股权价值分拆为两部分价值之和, 如表 1 所示.

表 1

两部分股权的价值	若 $A(T)<nK$	若 $nK\le A(T)\le\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K$	若 $A(T)>\frac{m+n\alpha}{\alpha}K$
第一部分	0	$A(T)-nK$	$A(T)-nK$
第二部分	0	0	$-\frac{n\alpha}{m+n\alpha}[A(T)-\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K]$

由表 1, 在 T 时刻第一部分股权价值可以表示为 $\max[A(T)-nK,0]$, 所以这部分价值可以看作是一个以创业企业价值为标的物、以 nK 为执行价格的欧式看涨期权的多头; 在 T 时刻第二部分股权价值可以表示为 $-\frac{n\alpha}{m+n\alpha}\max[A(T)-\frac{m+n\alpha}{\alpha}K,0]$, 所以这部分价值可以看作是一个 $\frac{n\alpha}{m+n\alpha}$ 份以创业企业价值为标的物、以 $\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K$ 为执行价格的欧式看涨期权的空头, 因此有股权价值:

$$mS(t)=c[A(t),nK,T-t]-\frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot c\left[A(t),\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K,T-t\right] \tag{5}$$

其中, $c[A(t), nK, T-t]$ 是以创业企业价值为标的物、以 nK 为执行价格的欧式看涨期权多头的价值; $c[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T-t]$ 是以创业企业价值为标的物、以 $\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K$ 为执行价格的欧式看涨期权多头的价值.

由 (1) 式和 (5) 式可得, 可转换债券的总价值为:

$$\begin{aligned} nCB(t) &= A(t) - mS(t) \\ &= A(t) - c[A(t), nK, T-t] + \frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot c\left[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T-t\right] \\ &= -p[A(t), nK, T-t] + nK\cdot P(t,T) + \frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot c\left[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T-t\right] \end{aligned} \tag{6}$$

上式中最后一步变换用到了欧式期权的平价公式, $-p[A(t), nK, T-t]$ 表示以创业企业价值为标的物、以 nK 为执行价格的欧式看跌期权空头的价值; $P(t,T)$ 表示在时刻 T 到期的面值为 1 的无风险零息票债券在 t 时刻的价值; $nK\cdot P(t,T)$ 表示执行价格 nK 在时刻 t 的现值.

对于风险资本家来说, 风险投资的投资价值 $V(t)$ 就是从所持有的可转换债券获得的收益, 即可转换债券的价值. 于是风险投资在时刻 t 的投资价值:

$$V(t) = -p[A(t), nK, T-t] + nK\cdot P(t,T) + \frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot c\left[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T-t\right] \tag{7}$$

由于投资者主要关心在项目投资初始即 $t=0$ 时的投资价值 $V(0)$, 而 $t>0$ 时刻的价值则需要根据新的信息重新赋予参数值, 所以我们只需计算 $V(0)$,

$$V(0) = -p[A(0), nK, T] + nK\cdot P(0,T) + \frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot c\left[A(0), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T\right] \tag{8}$$

求解式 (8)(求解过程见附录), 我们就可以得到在项目投资初始即 $t=0$ 时的投资价值:

$$V(0) = A(0)\left[\frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot N(d_1) + N(d_3)\right] - P(0,T)\cdot nK\cdot[N(d_2)+N(d_4)-1] \tag{9}$$

其中,

$$\begin{aligned} &N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\ &d_1 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}K\cdot P(0,T)}\right] + \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}}, d_2 = d_1 - \sqrt{\varphi(T)} \\ &d_3 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{nK\cdot P(0,T)}\right] + \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}}, d_4 = d_3 - \sqrt{\varphi(T)} \\ &\varphi(T) = \int_0^T [\sigma_A^2 + \sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_A\sigma_P(u,T)]\mathrm{d}u, \sigma_P(t,T) = \sigma_r\left[\frac{1-\exp(-\theta(T-t))}{\theta}\right] \\ &P(0,T) = U(0,T)\cdot\exp[-g(0,T)\cdot r(0)] \\ &U(0,T) = \exp\left[\frac{(g(0,T)-T)(\theta^2\mu_r - \frac{\sigma_r^2}{2})}{\theta^2} - \frac{\sigma_r^2(g(0,T))^2}{4\theta}\right], g(0,T) = \frac{1-\exp(-\theta T)}{\theta} \end{aligned}$$

3 比较静态分析

从表达式 (9) 可以看出, 模型不仅仅给出了一个简单的公式, 还给出了收益分配方案的各条款 (在模型中表现为参数) 对风险投资项目的投资价值的影响. 通过比较静态分析, 我们可以得到风险投资项目投资价值的源泉.

图 1 给出了在参数 $A(0)=100, r(0)=0.04, K=1, m=50, n=40, \alpha=1, \theta=0.2, \rho=0.3, \mu_r=0.06, \sigma_A=1.6$ 的条件下, 利率的波动率从 0 上升到 20%时, 投资价值随着投资期限的变化 (从 0.5 年到 7 年) 是如何变化的. 图 1 显示了投资价值具有如下性质: 1) 在既定条件下, 风险投资项目的投资价值随着投资期限的增大而增大; 更严格地讲, 在假定条件下, $T\in(0.5,7), \sigma_r\in(0,0.2)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial T}>0$; 2) 在既定条件下, 在投资期限较短时, 风险投资项目的投资价值随着利率的波动率的增大呈现出先减小后增大的趋势; 且随着投资期限的增加, 投资价值从减小到增大的转变会在更小的利率波动率处发生; 这我们给定的数据条件下, 反转

趋势在投资期限大约为 5.83 年时消失, 在期限大于 5.83 年时, 风险投资项目的投资价值随着利率的波动率的增大而增大. 更严格地讲, 在我们给定的数据条件下, 在 $0.5 < T < 5.83$ 时, $\sigma_r \in (0, 0.2)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial \sigma_r}$ 随着 σ_r 的增大逐渐由负值增大为正值; 在 $5.83 \le T \le 7$ 的情况下时, $\sigma_r \in (0, 0.2)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial \sigma_r} > 0$; 3) 投资价值随着利率波动率的增大以更小速度递减或以更快的速度增加. 更为严格讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \sigma_r \in (0, 0.2)$ 时, $\frac{\partial^2 V(0)}{\partial \sigma_r^2} > 0$; 4) 投资价值在利率波动率较大时, 随着投资期限的增大以更快的速度增加. 更严格地讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \sigma_r \in (0, 0.2)$ 时, $\frac{\partial^2 V(0)}{\partial T^2 \partial \sigma_r} > 0$, 且 $\frac{\partial^2 V(0)}{\partial T^2}$ 随着 σ_r 的增大从负值逐渐增加为正值. 性质 2)、4) 显示了利率的波动率和投资期限的交互作用. 当我们改变所控制的参数值时, 我们得到了类似的结论.

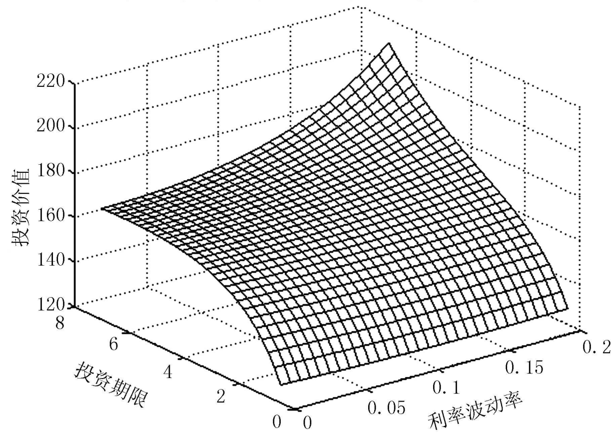

图 1　$A_0 = 100, r_0 = 0.04, k = 1, m = 50, n = 40, \alpha = 1, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu = 0.06, \sigma_A = 1.6$

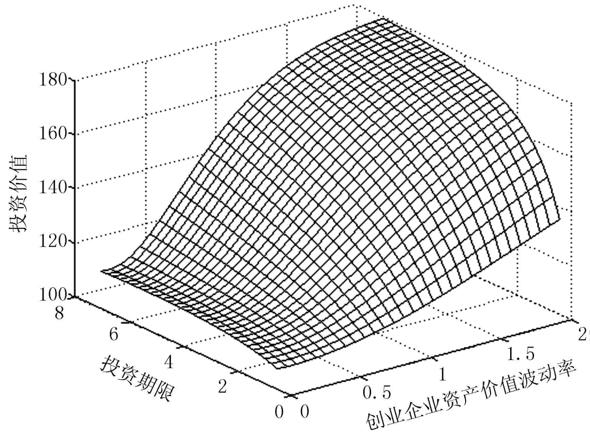

图 2　$A_0 = 100, r_0 = 0.04, k = 1, m = 50, n = 40, \alpha = 1, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu = 0.06, \sigma_r = 0.1$

图 2 给出了在参数 $A(0) = 100, r(0) = 0.04, K = 1, m = 50, n = 40, \alpha = 1, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu_r = 0.06, \sigma_r = 10\%$ 的条件下, 创业企业价值的波动率从 0 上升到 200%时, 投资价值是如何随着投资期限的变化 (从 0.5 年到 7 年) 变化的. 图 2 显示了投资价值具有如下性质: 1) 在既定条件下, 风险投资项目的投资价值随着创业企业价值的波动率增大呈现出先减小后增大的特点; 更严格地讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \sigma_A \in (0, 2)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial \sigma_A}$ 的值随着 σ_A 的增大逐渐由一个负值增大为正值; 2) 在既定条件下, 投资价值的增加速度随着创业企业价值的波动率增大呈现出递减的特点; 更为严格地讲, 在假定条件下, $\frac{\partial^2 V(0)}{\partial \sigma_A^2}$ 随着 σ_A 的增大从一个大于零的值逐渐减小到一个小于零值, 对于 $T \in (0.5, 7), \sigma_A \in (0, 2)$; 3) 创业企业价值的波动率和投资期限之间没有显示出明显的交互作用, 即创业企业价值的波动率对投资价值的贡献基本不受投资期限的影响. 当我们改变所控制的参数值时, 我们也得到了类似的结论.

图 3 给出了在参数 $A(0) = 100, r(0) = 0.04, K = 1, m = 50, n = 40, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu_r = 0.06, \sigma_r = 10\%, \sigma_A = 160\%$ 的条件下, 可转换证券的转换比例从 0.1 上升到 10 时, 投资价值是如何随着投资期限的变

化 (从 0.5 年到 7 年) 变化的. 图 3 显示了投资价值具有如下性质: 1) 在既定条件下, 风险投资项目的投资价值随着转换比例增大而增大; 更为严格地讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \alpha \in (0.1, 10)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial \alpha} > 0$; 2) 在既定条件下, 投资价值的增加速度随着转换比例的增加而减小; 更为严格地讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \alpha \in (0.1, 10)$ 时, $\frac{\partial^2 V(0)}{\partial \alpha^2} < 0$; 3) 可转换证券的转换比例和投资期限之间没有显示出明显的交互作用, 转换比例对投资价值的贡献基本不受投资期限的影响. 当我们改变所控制的参数值时, 我们也得到了类似的结论.

图 4 给出了在参数 $A(0) = 100, r(0) = 0.04, K = 1, m = 50, n = 40, \theta = 0.2, \alpha = 1, \mu_r = 0.06, \sigma_r = 10\%, \sigma_A = 160\%$ 的条件下, 创业企业资产价值 $A(t)$ 和随机利率 $r(t)$ 的瞬时相关系数 ρ 从 -1 变化到 1 时, 投资价值是如何随着投资期限的变化 (从 0.5 年到 7 年) 而变化的. 图 4 显示了投资价值具有如下性质: 1) 在既定条件下, 风险投资项目的投资价值随着瞬时相关系数增大而减小; 更为严格地讲, 在假定条件下, $T \in (0.5, 7), \rho \in (-1, 1)$ 时, $\frac{\partial V(0)}{\partial \rho} < 0$; 2) 在既定条件下, 瞬时相关系数对投资价值增加的速度影响不明显; 3) 瞬时相关系数和投资期限之间没有显示出明显的交互作用, 转换比例对投资价值的贡献基本不受投资期限的影响. 当我们改变所控制的参数值时, 我们同样得到了类似的结论.

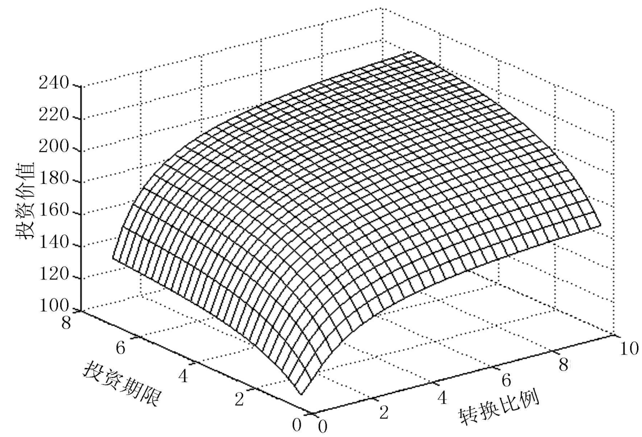

图 3 $A_0 = 100, r_0 = 0.04, k = 1, m = 50, n = 40, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu = 0.06, \sigma_r = 0.1, \sigma_A = 1.6$

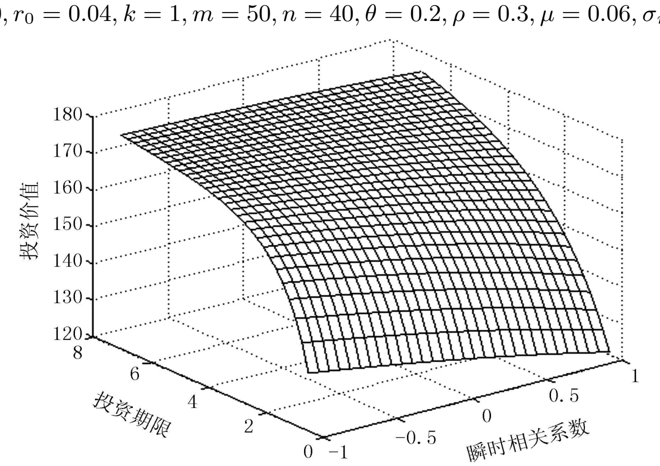

图 4 $A_0 = 100, r_0 = 0.04, k = 1, m = 50, n = 40, \theta = 0.2, \rho = 0.3, \mu = 0.06, \sigma_r = 0.1, \sigma_A = 1.6$

4 总结

鉴于现有的项目价值评估模型都以总体价值作为评估对象, 它们不适合于以可转换证券为主要投资工具的风险投资项目的投资价值评估, 我们建立了一个以可转换债券为投资工具的风险投资项目的投资价值评估模型. 我们假设利率服从 Vasicek 模型、创业企业的资产价值服从几何布朗运动, 在获得相关投资方案如股份数、可转换债券数量、转换比例等相关信息的条件下, 建立了一个风险投资项目的投资价值评估模型, 并利用币制转换的方法对所建模型进行了求解, 得到解析解.

进一步地, 我们对所建立的模型进行比较静态分析, 我们得到了主要结论如下: 1) 在既定条件下, 风险投资项目的投资价值随着投资期限的增大而增大; 在既定条件下, 在投资期限较短时, 风险投资项目的投资价值随着利率的波动率的增大呈现出先减小后增大的趋势; 且随着投资期限的增加, 投资价值从减小到增大的转变会在更小的利率波动率处发生; 投资价值随着利率波动率的增大以更小速度递减或以更快的速度增加; 投资价值在利率波动率较大时, 随着投资期限的增大以更快的速度增加; 2) 风险投资项目的投资价值随着创业企业价值的波动率呈现出先减小后增大的特点; 投资价值的增加速度随着创业企业价值的波动率增大呈现出递减的特点; 创业企业价值的波动率和投资期限之间没有显示出明显的交互作用; 3) 风险投资项目的投资价值随着转换比例增大而增大; 投资价值的增加速度随着转换比例的增加而减小; 可转换证券的转换比例和投资期限之间没有显示出明显的交互作用; 4) 风险投资项目的投资价值随着瞬时相关系数增大而减小; 瞬时相关系数对投资价值增加的速度影响不明显; 瞬时相关系数和投资期限之间没有显示出明显的交互作用.

附录

在这一部分, 我们将根据文献 [14] 提出的币制转换和时间转换的方法对式 (8) 进行求解. 由于市场是完全的, 没有套利机会, 所以任何资产 G 相对于 $B(t)$ 的价格是一个 Q 鞅. 市场的完全性意味着存在唯一的等价于历史概率 P 的测度 Q 鞅, 使得任何金融资产的价格比资本化因子 $B(t)$ 是 Q 下的一个鞅, 即任何金融资产关于币制 $B(t)$ 是 Q 鞅. 文献 [15] 指出, 其他不同于 $B(t)$ 的量也可以作为币制. 所以, 我们可以按如下步骤进行求解.

若要求解式 (8), 我们只需求出 $c[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha} \cdot K, T]$ 和 $p[A(t), nK, T]$ 的值.

第一步 我们把欧式未定权益资产定义为一个 F_T-可测的非负 L^2 随机变量. 如果这一资产的持有者拥有在时刻 $t=T$ 收到最终随机支付 $h(T)$ 的权利, 其中 $h(T)$ 是 F_T-可测的随机变量, 那么它在时刻 t 的价值 G_t 可以用下列风险中性概率 Q 下的条件期望来表述:

$$G_t = E^Q\left[\left.\frac{h(T)}{B(T)}\right| F_t\right] \tag{10}$$

其中, $E^Q[\cdot]$ 是概率 Q 下关于 σ-域 F 的条件期望算子.

在 $t=0$ 时刻, 该资产的价值

$$G_0 = E^Q\left[\frac{h(T)}{B(T)}\right] \tag{11}$$

根据文献 [14] 提出的币制替换方法, 存在如下结论:

对于任意一种不分红的资产, 其在 t 时刻价值表示为 $X(t)$, $X(t)$ 在 $t \in (0,T)$ 时间上几乎必然为正, 则存在一个的概率测度 Q^X 满足如下关系:

$$\frac{\mathrm{d}Q^X}{\mathrm{d}Q} = \frac{X(T)}{X(0)} \cdot \frac{B(0)}{B(T)} \tag{12}$$

并使得任何资产相对于 $X(t)$ 的价值是一个 Q^X-鞅. $X(t)$ 被称为币制. 所以, 结合式 (11), 任何资产 G 在 $t=0$ 时刻的价值可以重新记为:

$$G_0 = E^Q\left[\frac{h(T)}{B(T)}\right] = X(0) \cdot E^{Q^X}\left[\frac{h(T)}{X(T)}\right] \tag{13}$$

第二步 我们将分别选择在时刻 T 到期的面值为的无风险零息票债券的价值 $P(t,T)$ 和创业企业价值 $A(t)$ 作为币制.

由文献 [16], 在时刻 T 到期的面值为 1 的无风险零息票债券在 t 时刻的价值 $P(t,T)$ 的动态过程满足在概率 Q 下, 对任何时刻 t 服从:

$$\frac{\mathrm{d}P(t,T)}{P(t,T)} = r(t)\mathrm{d}t - \sigma_P(t,T)\mathrm{d}W_1(t) \tag{14}$$

其中,

$$P(T,T)=1,\sigma_P(t,T)=\sigma_r\left[\frac{1-\exp(-\theta(T-t))}{\theta}\right],$$

$$P(t,T)=U(t,T)\cdot\exp[-g(t,T)\cdot r(t)],U(t,T)=\exp\left[\frac{(g(t,T)-T+t)(\theta^2\mu_r-\frac{\sigma_r^2}{2})}{\theta^2}-\frac{\sigma_r^2(g(t,T))^2}{4\theta}\right],$$

$$g(t,T)=\frac{1-\exp(-\theta(T-t))}{\theta},$$

现在我们选择在时刻 T 到期的面值为 1 的无风险零息票债券的价值 $P(t,T)$ 作为币制, 即令

$$X(t)=P(t,T) \tag{15}$$

由式 (13)、(15) 和 $P(T,T)=1$, 我们可以得到任何资产 G 在 $t=0$ 时刻的价值为:

$$\begin{aligned}G_0&=X(0)\cdot E^{Q^X}\left[\frac{h(T)}{X(T)}\right]\\&=P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[\frac{h(T)}{P(T,T)}\right]\\&=P(0,T)\cdot E^{Q^P}[h(T)]\end{aligned} \tag{16}$$

其中, Q^P 为新币制 $P(t,T)$ 替换下的新的概率测度.

按照前面的方法, 再选择以创业企业价值 $A(t)$ 进行另一个币制替换, 则存在一个的概率测度 Q^A 满足如下关系:

$$\frac{\mathrm{d}Q^A}{\mathrm{d}Q^P}=\frac{A(T)}{A(0)}\cdot\frac{P(0,T)}{P(T,T)} \tag{17}$$

由式 (13), 得到任何资产 G 在 $t=0$ 时刻的价值为

$$G_0=A(0)\cdot E^{Q^A}\left[\frac{h(T)}{A(T)}\right] \tag{18}$$

结合式 (17) 和式 (18), 我们可以得到:

$$\begin{aligned}G_0&=P(0,T)\cdot E^{Q^P}[h(T)]\\&=A(0)\cdot E^{Q^A}\left[\frac{h(T)}{A(T)}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

第三步 在以上的分析的基础上, 我们求出 $V(0)$. 先求 $c[A(t),\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K,T]$.

$$\begin{aligned}&c\left[A(t),\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K,T\right]=P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[\left(A(T)-\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K\right)\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]\\&=P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[A(T)\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]-P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[\frac{(m+n\alpha)K}{\alpha}\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]\\&=A(0)\cdot E^{Q^A}\left[\frac{A(T)}{A(T)}\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]-P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[\frac{(m+n\alpha)K}{\alpha}\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]\\&=A(0)\cdot E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)}\leq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]-P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[\frac{(m+n\alpha)K}{\alpha}\cdot 1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]\\&=A(0)\cdot E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)}\leq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]-P(0,T)\cdot\frac{(m+n\alpha)K}{\alpha}\cdot E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]\end{aligned} \tag{20}$$

在推导式 (20) 的倒数第三步中我们运用了式 (19) 的结论.

同理可得:

$$\begin{aligned}p[A(t),nK,T]&=P(0,T)\cdot E^{Q^P}\left[(nK-A(T))\cdot 1_{nK\geq A(T)}\right]\\&=-A(0)\cdot E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)}\leq nK}\right]+P(0,T)\cdot nK\cdot E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq nK}\right]\end{aligned} \tag{21}$$

根据式 (20) 和式 (21) 可知, 要求出 $c[A(t),\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K,T]$ 和 $p[A(t),nK,T]$, 只需求出 $E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)}\leq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]$, $E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K}\right]$, $E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)}\leq nK}\right]$ 和 $E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)}\geq nK}\right]$ 即可.

由上文分析可知, $A(t)/P(t,T)$ 和 $P(t,T)/A(t)$ 分别是 Q^P-鞅和 Q^A-鞅, 且满足:

$$\left\langle \ln \frac{A(t)}{P(t,T)} \right\rangle_t = \left\langle \ln \frac{P(t,T)}{A(t)} \right\rangle_t = \int_0^t [\sigma_A^2 + \sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_A\sigma_P(u,T)]\mathrm{d}u \tag{22}$$

令

$$\varphi(t) = \int_0^t [\sigma_A^2 + \sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_A\sigma_P(u,T)]\mathrm{d}u \tag{23}$$

则

$$\varphi(T) = \int_0^T [\sigma_A^2 + \sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_A\sigma_P(u,T)]\mathrm{d}u \tag{24}$$

根据文献 [17–18] 提出鞅时间转换理论, 存在两个标准 Brown 运动 B^P 和 B^A 分别在

Q^P-鞅和 Q^A-鞅下, 使得

$$\frac{A(t)}{P(t,T)} = \frac{A(0)}{P(0,T)} \cdot \exp\left[B^P_{\varphi(t)} - \frac{1}{2}\varphi(t)\right] \tag{25}$$

$$\frac{P(t,T)}{A(t)} = \frac{P(0,T)}{A(0)} \cdot \exp\left[B^A_{\varphi(t)} - \frac{1}{2}\varphi(t)\right] \tag{26}$$

结合式 (22)、(25)、(26), 可以得到:

$$E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)} \le \frac{m+n\alpha}{\alpha}K}\right] = E^{Q^A}\left[1_{B^A_{\varphi(T)} \le \ln \frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K\cdot P(0,T)} + \frac{1}{2}\varphi(T)}\right] = N(d_1) \tag{27}$$

其中

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, d_1 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}K\cdot P(0,T)}\right] + \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}}$$

$$E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)} \ge \frac{m+n\alpha}{\alpha}K}\right] = E^{Q^P}\left[1_{B^P_{\varphi(T)} \ge \ln \frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K\cdot P(0,T)} + \frac{1}{2}\varphi(T)}\right] = N(d_2) \tag{28}$$

其中

$$d_2 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}K\cdot P(0,T)}\right] - \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}} = d_1 - \sqrt{\varphi(T)}$$

$$E^{Q^A}\left[1_{\frac{P(T,T)}{A(T)} \le nK}\right] = E^{Q^A}\left[1_{B^A_{\varphi(T)} \le \ln \frac{A(0)}{nK\cdot P(0,T)} + \frac{1}{2}\varphi(T)}\right] = N(d_3) \tag{29}$$

其中

$$d_3 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{nK\cdot P(0,T)}\right] + \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}},$$

$$E^{Q^P}\left[1_{\frac{A(T)}{P(T,T)} \ge nK}\right] = E^{Q^P}\left[1_{B^P_{\varphi(T)} \ge \ln \frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K\cdot P(0,T)} + \frac{1}{2}\varphi(T)}\right] = N(d_4) \tag{30}$$

其中 $d_4 = \frac{\ln\left[\frac{A(0)}{nK\cdot P(0,T)}\right] - \frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}} = d_3 - \sqrt{\varphi(T)}$.

将式 (27)–(30) 代入式 (20) 和式 (21) 就可以得到:

$$c[A(t), \frac{m+n\alpha}{\alpha}\cdot K, T] = A(0)\cdot N(d_1) - P(0,T)\cdot\frac{(m+n\alpha)K}{\alpha}\cdot N(d_2) \tag{31}$$

$$p[A(t), nK, T] = -A(0)\cdot N(d_3) + P(0,T)\cdot nK\cdot N(d_4) \tag{32}$$

将式 (31)、(32) 代入式 (8) 可得, 在项目投资初始即 $t=0$ 时的投资价值:

$$V(0) = A(0)[\frac{n\alpha}{m+n\alpha}\cdot N(d_1) + N(d_3)] - P(0,T)\cdot nK\cdot[N(d_2) + N(d_4) - 1]$$

其中,

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$d_1=\frac{\ln\left[\frac{A(0)}{\frac{m+n\alpha}{\alpha}K\cdot P(0,T)}\right]+\frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}},d_2=d_1-\sqrt{\varphi(T)}$$

$$d_3=\frac{\ln\left[\frac{A(0)}{nK\cdot P(0,T)}\right]+\frac{1}{2}\varphi(T)}{\sqrt{\varphi(T)}},d_4=d_3-\sqrt{\varphi(T)}$$

$$\varphi(T)=\int_0^T[\sigma_A^2+\sigma_P^2(u,T)+2\rho\sigma_A\sigma_P(u,T)]\mathrm{d}u,\sigma_P(t,T)=\sigma_r\left[\frac{1-\exp(-\theta(T-t))}{\theta}\right]$$

$$P(0,T)=U(0,T)\cdot\exp[-g(0,T)\cdot r(0)]$$

$$U(0,T)=\exp\left[\frac{(g(0,T)-T)(\theta^2\mu_r-\frac{\sigma_r^2}{2})}{\theta^2}-\frac{\sigma_r^2(g(0,T))^2}{4\theta}\right],g(0,T)=\frac{1-\exp(-\theta T)}{\theta}$$

参考文献

[1] Myers S C. Determinants of corporate borrowing[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 147–175.

[2] Geske R. The valuation of corporate liabilities as compound options[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1977, 12: 541–552.

[3] Geske R. The valuation of compound options[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7: 63–81.

[4] McDonald R L, Siegel D R. Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down[J]. International Economic Review, 1985, 26(2): 331–349.

[5] McDonald R L, Siegel D R. The value of waiting to invest[J]. Quarterly Journal of Economics, 1986, 101: 707–727.

[6] Trigeorgis L. Real options and interactions with financial flexibility[J]. Financial Management, 1993, 22: 202–224.

[7] Pennings E, Lint O. The option value of advanced R&D[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 103: 83–94.

[8] Hevert K T, McLaughlin R M, Taggart R A. Interest rates, inflation and the value of growth options[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 1998, 38: 599–613.

[9] Pindyck R S. Investments of uncertain cost[J]. Journal of Financial Economics, 1993, 34: 53–76.

[10] Schwartz E, Moon M. Evaluating Research and Development Investments[M]//Brennan M, Trigeorgis L. Project Flexibility, Agency, and Product Market Competition: New Developments in the Theory and Application of Real Options Analysis. Oxford University Press, 2000.

[11] Kulatilaka N, Perotti E C. Strategic growth options[J]. Management Science, 1998, 44: 1021–1031.

[12] Reiss A. Investment in innovations and competition: An option pricing approach[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 1998, 38: 635–650.

[13] Kaplan S N, Stromberg P. Financial contracting theory meets the real world: An empirical analysis of venture capital contracts[J]. Review of Economic Studies, 2003, 70 (2): 281–315.

[14] Briys E, Bellalah M, Mai H M, et al. Options, Futures and Exotic Derivatives: Theory, Application and Practice[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1998.

[15] Geman H, El Karoui N, Rochet J. Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing[J]. Journal of Applied Probability, 1995, 32: 443–458.

[16] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177–188.

[17] Dambis K E. On the decomposition of continuous submartingales[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1965, 10: 401–410.

[18] Dubins L E, Schwartz G. On continuous martingales[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, National Acad Sciences, 1965, 53: 913–916.