

文章编号: 1000-6788(2009)06-0107-08

基于 PH 分布和 MAP 的备件 (s, S) 库存模型

陈 童, 黄 卓, 郭 波

(国防科技大学 信息系统与管理学院系统工程系, 长沙 410073)

摘 要 以包含多个相同部件的系统为研究对象, 采用 Phase-type(PH) 分布代替指数分布等经典分布作为备件寿命、换件维修时间以及库存补充时间的基本假设, 推导出该系统的备件需求过程为马尔可夫到达过程 (Markovian Arrival Process, MAP); 然后在此基础上, 研究了 (s, S) 库存模型, 给出了该库存模型首次订货时间、再订货周期、缺货时间的相关分布和参数, 最后通过一个算例说明了模型的有效性.

关键词 Phase-type 分布; 马尔可夫到达过程; 备件需求; 库存模型

中图分类号 F253.4

文献标志码 A

Spare parts (s, S) inventories system based on Phase-type distribution and Markovian arrival process

CHEN Tong, HUANG Zhuo, GUO Bo

(Systems Engineering Department, College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract This paper investigated the system that consists of several same items, and assumed the life time, replacement repair time of items and the replenishing time follow the continuous time Phase-type(PH) distribution, instead of the exponential distribution or others typical distributions. Then it was proven that the spare parts demand process is a Markovian arrival process(MAP). Based on this conclusion, this paper studied the (s, S) inventories model, and got the distributions and the parameters of the first order time, cycle time and stock out time about this inventories system. Finally, a numerical example was given to illustrate the effectiveness of the model.

Keywords Phase-type distribution; Markovian arrival process (MAP); spare parts demand; inventories system

1 引言

目前备件的需求和库存模型大多假设部件寿命和备件补充时间服从指数分布或针对几种典型备件寿命分布进行讨论. 这些模型为了求解方便, 或假设条件过于严格^[1-3], 其不合理性显而易见^[4]; 或只能采用仿真方法解决一般寿命分布^[5-6]. 同时, 这些方法本身具有一个很大的局限性, 就是对不同的分布必须建立不同的模型, 因此, 这些模型的通用性和灵活性就大打折扣了.

针对这些问题, 本文以包含多个相同部件的系统为研究对象, 以部件失效时间、换件维修时间以及补充时间均服从连续 PH 分布为基本假设, 代替指数分布及其它一些典型分布, 建立了一个通用性更好的备件需

求和库存模型. PH 分布的突出优点是: 任何分布总可以选择一个适当的 PH 分布把它拟合到任意精确的程度, 因此 PH 分布可以用来作为许多假设分布的一般表述. 在部件寿命和换件维修时间服从 PH 分布的基础上, 本文推导出系统的备件需求过程为马尔可夫到达过程 (Markovian Arrival Process, MAP). MAP 类在 $[0, +\infty)$ 的概率空间上, 对平稳点过程类是稠密的^[7]; 这使得其可以描述许多常用的点过程^[8], 如泊松过程、PH 更新过程等. 而且 MAP 本身构造的特点^[9], 使其能够在预测具有典型的间断性需求特点的备件需求时, 表现出比指数平滑法等预测方法更好的性能. 通过证明整个系统的备件需求过程是 MAP, 便可以在研究库存模型时, 直接采用 MAP 作为备件需求的基本假设, 这样的模型描述更具有普遍性, 同时也使得在此基础上进一步研究的补充时间服从 PH 分布的库存模型具有了更宽的适用范围.

本文按以下结构展开: 第 2 节介绍了相关基础知识; 在第 3 节给出了本文的模型假设; 在第 4 节根据 PH 分布和 MAP 性质, 推导出整个系统的备件需求是一个 MAP; 并在随后的第 5 节建立了备件需求过程为 MAP, 补充时间服从 PH 分布的 (s, S) 库存系统模型, 给出了库存模型的一些相关参数; 在文章最后给出了一个算例, 证实了本文模型的可行性.

2 预备知识

首先介绍 PH 分布和连续时间马尔可夫到达过程的有关概念.

定义 1^[4] $[0, +\infty)$ 上的概率分布函数 $F(\cdot)$ 称为 PH 分布, 当且仅当它是一个有限状态马尔科夫过程的吸收时间分布, 有分布函数

$$F(x) = 1 - \alpha \exp(\mathbf{T}x)e \quad (1)$$

其中 \mathbf{T} 为 m 阶方阵, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ 为其瞬态的初始概率向量, e 为元素均为 1 的 m 阶列向量, (α, \mathbf{T}) 称为该 PH 分布的 m 阶表示. PH 分布中的每一个瞬态称为相位.

定义 2^[10] 一个更新过程的间隔到达时间分布有 m 阶 PH 表示 (α, \mathbf{T}) , 称为 PH 更新过程 (Phase-Type Renewal Processes).

通常为了方便, 假设 PH 更新过程的 $\alpha_{m+1} = 0$, 即更新间隔不能为零.

定义 3^[11] 当一个连续时间马尔可夫过程的嵌入马尔可夫链为非常返的, 且具有状态转换矩阵 \mathbf{P} ; 则满足下式的向量称为该连续时间马尔可夫过程的稳态概率向量:

$$\pi \mathbf{P} = \pi \quad (2)$$

令该连续时间马尔可夫过程的无穷小生成元为 \mathbf{U} , 则有 $\pi \mathbf{U} = 0$, 且 π 的各个分量之和为 1.

定义 4^[9] 一个有限不可约马尔可夫链具有状态空间 $S = \{1, 2, \dots, m\}$, 设 \mathbf{D} 为该马尔可夫链的无穷小生成元. 在状态 i 的逗留时间服从参数为 λ_i 的指数分布, 在该状态即将结束时, 有下列两个事件之一发生:

- 1) 存在一个马尔可夫链, 使得从状态 i 到 $j(1 \leq i, j \leq m)$ 的转移中, 有一个事件到达的概率为 $p_{ij}(1)$;
- 2) 存在一个马尔可夫链, 使得从状态 i 到 $j(1 \leq i, j \leq m; i \neq j)$ 的转移中, 没有事件到达的概率为 $p_{ij}(0)$.

可以看到只有通过一次事件到达, 才能使得状态 i 返回到自身. 并且有:

$$\sum_{j=1}^m p_{ij}(1) + \sum_{j=1, j \neq i}^m p_{ij}(0) = 1, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3)$$

定义矩阵 $\mathbf{D}_0 = (q_{ij}^{(0)})$ 和 $\mathbf{D}_1 = (q_{ij}^{(1)})$, 其中: $q_{i,i}^{(0)} = -\lambda_i, 1 \leq i, j \leq m; q_{ij}^{(0)} = \lambda_i p_{ij}(0), 1 \leq i, j \leq m$ 且 $i \neq j; q_{ij}^{(1)} = \lambda_i p_{ij}(1), 1 \leq i, j \leq m$.

\mathbf{D}_0 和 \mathbf{D}_1 分别是控制没有事件到达和有单个事件到达的状态转换矩阵, 它们均为 m 阶子随机矩阵, 可以给出无穷小生成元 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$.

然后, 定义 $A(t)$ 为在 $(0, t]$ 内事件到达的次数; $J(t)$ 为在时刻 t 嵌入马尔可夫链所处的状态, 其状态空间为 $\{i : 1 \leq i \leq m\}$. 则 $\{A(t), J(t)\}$ 为一个两维马尔可夫过程, 其状态空间为 $\{(n, i) : n \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$. 而 $\{A(t), J(t)\}$ 被称为马尔可夫到达过程.

MAP 是半马氏过程的特例, 其状态转移概率矩阵为:

$$\int_0^x \exp(\mathbf{D}ot)dt \mathbf{D}_1 = [\mathbf{I} - \exp(\mathbf{D}ox)](-\mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

设 π 是无穷小生成元为 D 的稳态概率向量, 则有: $\pi D = 0$, $\pi e = 1$. 并且 $\pi D_1 e$ 表示在 MAP 进入稳态后, 单位时间内事件到达的期望个数.

下面给出 Kronecker 乘积和 Kronecker 和的定义, 这两者在后面的模型中被大量使用.

定义 5^[10] 如果 A 和 B 分别为 $m_1 \times m_2$ 和 $n_1 \times n_2$ 的矩阵, 它们的 Kronecker 乘积 $A \otimes B$ 则为 $m_1 n_1 \times m_2 n_2$ 的矩阵, 且:

$$A \otimes B = (A_{ij} B) = \begin{bmatrix} A_{11} B & A_{12} B & \cdots & A_{1m_2} B \\ & & & \vdots \\ A_{m_1 1} B & A_{m_1 2} B & \cdots & A_{m_1 m_2} B \end{bmatrix} \quad (5)$$

定义 6^[10] 若 A 和 B 分别为 m 和 n 阶方阵, 定义 Kronecker 和为:

$$A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B \quad (6)$$

其中 I_m 和 I_n 分别为 m 和 n 阶单位矩阵.

3 问题描述

在现实生活中, 最基本和最常见的备件保障模式是一个使用单位拥有多台相同的设备, 这些设备的备件统一由该单位仓库保障. 例如, 在装备维修中, 一个备件仓库通常要为多台坦克或飞机提供备件. 因此本文提出如下假设:

- 1) 某使用单位有一个备件仓库和 K 个相同设备, 每个设备中包含某种部件 1 个. 第 i ($1 \leq i \leq K$) 个设备上的部件, 其失效时间服从 PH 分布, 表示为 $(\alpha(i), T(i))$, 阶数为 m_i ;
 - 2) 同一设备上的部件其失效时间独立同分布; 不同设备的部件其失效时间相互独立;
 - 3) 设备出现故障后, 采用换件维修, 故障部件直接报废; 换件维修时间服从 PH 分布, 表示为 (β, L) , 阶数为 n , 则平均换件维修时间为 $\beta(-L)^{-1}$;
 - 4) 部件失效时间和换件维修时间相互独立;
 - 5) 库存系统采用 (s, S) 订货策略: 该种部件的初始库存量为 S , 当仓库的库存水平达到 s 时, 下达订单, 订单数量为 $S - s$;
 - 6) 库存系统允许延迟交货; 当备件有库存时, 直接对故障部件进行更换, 否则需等待订货到达; 延迟交货量最大为 N ($0 \leq N \leq S - 2s - 1$), N 不超过 $S - 2s - 1$ 是为了避免同时存在多个订单;
 - 7) 订货再补充时间服从 PH 分布, 表示为 (φ, C) , 阶数为 r , 则再补充平均时间为 $\varphi(-C)^{-1}$;
- 其备件需求和供应流程如图 1 所示:

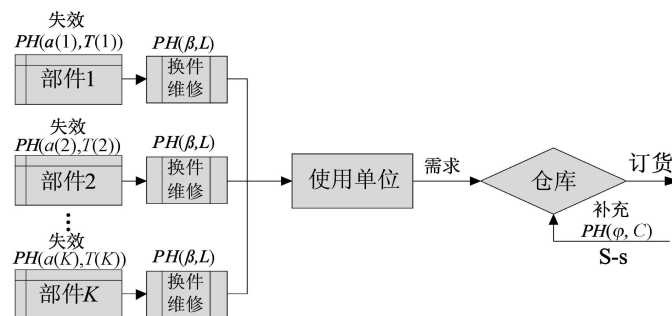


图 1 备件需求和供应示意图

4 需求规律分析

定理 1 设备 i 的备件需求过程是一个 PH 更新过程, 其备件需求间隔时间有 $m_i + n$ 阶 PH 表示 $(\gamma(i), V(i))$, 其中 $\gamma(i) = (\alpha(i), \alpha_{m_i+1}\beta)$, $V(i) = \begin{pmatrix} T(i) & T^0(i)\beta \\ 0 & L \end{pmatrix}$.

证明 设备 i 中部件的工作时间 $t_w(i)$ 和换件维修时间 t_r 均服从 PH 分布, 由假设条件和文献 [10] 中定理 1.4.1 知, 设备 i 的备件需求间隔时间 $t_n = t_w(i) + t_r$ 亦是 PH 分布, 表示为 $(\gamma(i), V(i))$, 其中

$\gamma(i) = (\alpha(i), \alpha_{m_i+1}\beta)$, $V(i) = \begin{pmatrix} T(i) & T^0(i)\beta \\ 0 & L \end{pmatrix}$, 阶数为 $m_i + n$. 可以认为设备 i 每发生一次备件需求, 便为一次更新, 因此设备 i 的备件需求过程为一个更新过程, 并且因为 t_n 服从 PH 分布, 由 PH 更新过程定义可知设备 i 的备件需求过程是一个 PH 更新过程. 定理得证.

由假设条件和图 2, 可知整个使用单位的备件需求过程是各设备备件需求过程的叠加.

定理 2 K 个设备的备件需求过程是一个 MAP 过程, 有 MAP 表示 (E_0, E_1) , 阶数 $x = \prod_{i=0}^K (m_i + n)$, 其中: $E_0 = V(1) \oplus \cdots \oplus V(K)$, $E_1 = V^0(1)\gamma(1) \oplus \cdots \oplus V^0(K)\gamma(K)$.

证明 因为 PH 更新过程是 MAP 的特例, 则单一设备的备件需求过程均可表述为 $\text{MAP}(D_0(i), D_1(i))$, 有 $D_0(i) = V(i)$, $D_1(i) = V^0(i)\gamma(i)$. 则由文献 [12] 知多个 MAP 的叠加仍是 MAP, 因此整个系统的备件需求过程亦是 MAP, 且有 $E_0 = V(1) \oplus \cdots \oplus V(K)$, $E_1 = V^0(1)\gamma(1) \oplus \cdots \oplus V^0(K)\gamma(K)$. 定理得证.

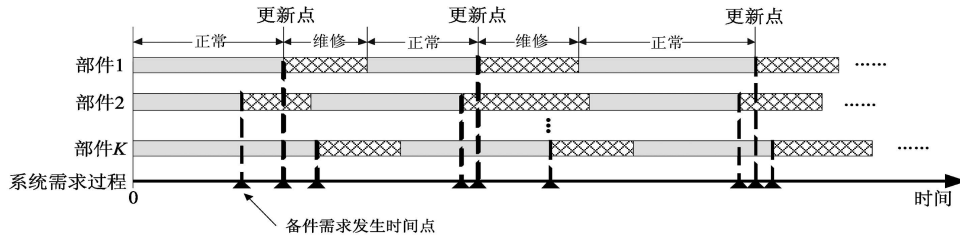


图 2 备件需求过程示意图

根据定理 1、2, 可以在建立库存模型时, 直接采用统计数据来对备件需求的 MAP 参数进行估计.

5 库存模型分析

5.1 库存系统稳态分析

令 $R(t)$, $I(t)$ 和 $J(t)$ 分别为在时刻 t 的库存量, 需求过程相位和再补充过程相位. 则 $\{R(t), I(t), J(t)\}$ 为连续时间马尔可夫链. 其状态空间 Ω 可以分为系统没有订货和有订货两个子集:

$$\Omega = h_1 \cup h_2$$

其中, $h_1 = \{(S-u, k) : 0 \leq u \leq S-s-1, 1 \leq k \leq x\}$ 表示系统内没有订货; $h_2 = \{(S-u, k, j) : S-s \leq u \leq S+N, 1 \leq k \leq x, 1 \leq j \leq r\}$ 表示系统内有订货.

通常称 $S-u$ 为状态空间的宏状态. 为了方便表述, 在此定义 $e_j(a)$ 为 a 维列向量, 其中的第 j 行为 1, 其余全为 0; e 为元素全为 1 的列向量; I 为单位矩阵. 下面对状态转移进行分析:

1) 状态空间 h_1 内部的转移

宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u$ 转移时, 没有需求到达, 只发生需求过程相位之间的转移, 因此可以用 E_0 来表示;

宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u-1$ 转移时, 有一个需求到达, 因此可以用 E_1 来表示;

系统不能从宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u+1$ 转移, 因此为 0 矩阵.

2) 状态空间 h_2 内部的转移

宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u$ 转移时, 由于需求过程相位与再订货过程相位不会同时发生变化, 所以该转移可用矩阵 $E_0 \oplus C$ 表示;

宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u-1$ 转移时, 有一个需求到达, 因此可以用 $E_1 \otimes I$ 来表示;

系统不能从宏状态 $S-u$ 向宏状态 $S-u+1$ 转移, 因此为 0 矩阵.

3) 状态空间 h_1 向状态空间 h_2 的转移

只有当 $u = S-s-1$ 时, 此时系统在状态子集 h_1 中, 在一个需求到达后, 存货水平为 s , 系统进入状态子集 h_2 , 产生一个订货, 因此转移矩阵为 $E_1 \otimes \varphi$;

4) 状态空间 h_2 向状态空间 h_1 的转移

系统只能从宏状态 $S - u$ 向宏状态 $2S - u - s$ 转移, 因此转移矩阵为 $\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^0$.

因此, 该马尔可夫链的无穷小生成元为:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_1 & e_{S-s}(S-s) \otimes e'_1(S-s) \otimes (\mathbf{E}_1 \otimes \varphi) \\ \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^0 & \tilde{\mathbf{Q}}_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

其中:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & & & \\ & \mathbf{E}_0 & \mathbf{E}_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{E}_0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} \\ & & & & (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \oplus \mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (9)$$

5.2 稳态概率向量

根据连续时间马尔可夫过程的稳态概率向量定义, 可知当整个库存系统进入稳态时, 无穷小生成元 \mathbf{Q} 中各个状态所对应的概率组成了稳态概率向量 $\pi^* = (\pi_1(S), \dots, \pi_1(s+1), \pi_2(s), \dots, \pi_2(0), \pi_3(1), \dots, \pi_3(N))$, 并且 π^* 满足以下条件:

$$\pi^* \mathbf{Q} = 0, \quad \pi^* e = 1 \quad (10)$$

将式 (10) 展开为稳态方程组:

$$\begin{aligned} \pi_1(S) \mathbf{E}_0 + \pi_2(s) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}) &= 0, \\ \pi_1(S-u+1) \mathbf{E}_1 + \pi_1(S-u) \mathbf{E}_0 + \pi_2(s-u) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}) &= 0, \quad (0 \leq u \leq s) \\ \pi_1(S-u+1) \mathbf{E}_1 + \pi_1(S-u) \mathbf{E}_0 + \pi_3(u-s) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}) &= 0, \quad (s+1 \leq u \leq S-s-1) \\ \pi_1(s+1) (\mathbf{E}_1 \otimes \varphi) + \pi_2(s) (\mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C}) &= 0, \\ \pi_2(S-u) (\mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C}) + \pi_2(S-u+1) (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I}) &= 0, \quad (S-s+1 \leq u \leq S) \\ \pi_3(1) (\mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C}) + \pi_2(0) (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I}) &= 0, \\ \pi_3(u-1) (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I}) + \pi_3(i) (\mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C}) &= 0, \quad (2 \leq u \leq N-1) \\ \pi_3(N-1) (\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I}) + \pi_3(N) [(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \oplus \mathbf{C}] &= 0 \end{aligned}$$

方程组中的矩阵 \mathbf{E}_0 , \mathbf{E}_1 由第 4 节定理 1、2 得出, 矩阵 \mathbf{I} 为第 5.1 节中设定的单位矩阵, 矩阵 \mathbf{C} 在第 3 节中给出了具体含义.

再将 $\pi_1 e + \pi_2 e + \pi_3 e = 1$ 加入方程组, 便可得出 π_1 , π_2 , π_3 的表达式. 在解决实际问题时, 可直接将矩阵实值代入, 求得各状态的稳态概率. 方程组的具体求解在此不再赘述.

5.3 首次订货时间点

令随机变量 W_0 表示系统首次订货时间点, 则 W_0 表示在 0 时刻从宏状态 S 出发至首次进入宏状态 s 的时间.

定理 3 随机变量 W_0 服从 PH 分布, 有 PH 表示 $(\eta_1, \tilde{\mathbf{Q}}_1)$, 其中 $\eta_1 = (\delta, \overbrace{0, \dots, 0}^{S-s-1 \text{个}})$; 阶数为 $(S-s)x$.

证明 由 W_0 的定义知, 系统从当 $R(t)$ 为 $s+1$ 时, 经过一次事件到达后, 存货量为 s , 此时系统下达首个订单; 则可以将状态空间 h_2 定义为第一次订货时间的一维吸收态. 由 PH 分布定义可知, 系统存货量第一次进入 s 的时间服从 PH 分布. $\eta_1 = (\delta, \overbrace{0, \dots, 0}^{S-s-1 \text{个}})$ 表示 0 时刻系统只能处于宏状态 S 的某一相位中; δ 为处于宏状态 S 时的初始概率向量. 定理得证.

5.4 再订货周期

定义再订货周期 W_1 是连续两次订货之间的时间间隔, 因此 W_1 就是系统存货量进入 s 的前后两次时间的间隔.

定理 4 随机变量 W_1 服从 PH 分布, 有阶数为 $(S-s)x + (N+s)xr$ 的 PH 表示 (η_2, \mathbf{R}_1) , 其中 $\eta_2 = (0, \dots, 0, [\pi_1(s+1)\mathbf{E}_1 e]^{-1}\pi_1(s+1)(\mathbf{E}_1 \otimes \varphi), 0, \dots, 0)$; 将宏状态为 $s+1$ 的行和宏状态为 s 的列去掉, 即为 \mathbf{R}_1 .

证明 由 W_1 的定义知, 只有当 $R(t)$ 从 $s+1$ 向 s 转移时, 系统下达一次订单; 因此可以将系统下达订单作为一个订货周期的开始. 由 PH 分布定义可知, 系统再订货周期服从 PH 分布, 且有: $\eta_2 = (0, \dots, 0, [\pi_1(s+1)\mathbf{E}_1 e]^{-1}\pi_1(s+1)(\mathbf{E}_1 \otimes \varphi), 0, \dots, 0)$, \mathbf{R}_1 为把 \mathbf{Q} 中宏状态为 $s+1$ 的行和宏状态为 s 的列去掉. 定理得证.

推论 1 平均再订货周期为 $\mu_{ct} = -\eta_2 \mathbf{R}_1^{-1} e = [\pi_1(s+1)\mathbf{E}_1 e]^{-1}$, 而 μ_{ct}^{-1} 表示再补充率.

5.5 缺货时间分布

定理 5 定义缺货时间 W_2 为库存量为 0 的时间. 则随机变量 W_2 服从 PH 分布, 有阶数为 $(N+1)xr$ 的 PH 表示 (η_3, \mathbf{R}_2) , 其中 $\eta_3 = e_1(N+1) \otimes [\pi_2(1)(e \otimes \mathbf{E}_1 e)]^{-1}[\pi_2(1)(\mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I})]$;

$$\mathbf{R}_2 = \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{E}_0 \oplus \mathbf{C} & \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{I} \\ & & & & (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \oplus \mathbf{C} \end{pmatrix}}^{N+1} \quad (11)$$

证明 由 W_2 的定义知, 当库存为 1 时, 发生一个需求到达, 则存货量将为 0, 可以认为库存量非 0 为缺货时间分布的吸收态, 因此缺货时间有 PH 表示 (η_3, \mathbf{R}_2) .

另外, 通过库存模型分析, 还可得到如下推论:

推论 2 系统平均库存量为 $\mu = \sum_{i=s+1}^S i\pi_1(i)e + \sum_{i=1}^s i\pi_2(i)e + \sum_{i=0}^N (-i)\pi_3(i)e$; 令 μ_+ 表示存货量为正值时的均值, 则 $\mu_+ = \sum_{i=s+1}^S i\pi_1(i)e + \sum_{i=1}^s i\pi_2(i)e$; 系统平均延迟交货量为 $\mu_- = \mu_+ - \mu$.

推论 3 系统平均缺货率为 $\lambda_q = \pi_3(N)\mathbf{E}_1 e$.

5.6 库存优化模型

根据上文的结论, 可以建立库存优化模型. 例如以总费用 c_{total} 最小为目标函数, 确定合适的 s 和 S . 令 c_1, c_2, c_3 和 c_4 分别为单位备件库存费用, 每次订货费用, 单位延迟交货费用和单位缺货费用, 因此目标函数为:

$$\min c_{total} = c_1\mu_+ + c_2\mu_{ct}^{-1} + c_3\mu_- + c_4\lambda_q \quad (12)$$

从上式可以看出: 当给定 S 时, 减小 s 的值时, μ_+, μ_{ct}^{-1} 和 λ_q 均会增加, 而 μ_- 则会降低. 因此可以通过调整 s 来获得模型的满意解. 而在本文中对同时优化 s 和 S 的启发式算法不做研究.

6 算例

下面假设有一个系统有两个设备, 其部件的失效时间分布均为 $\text{PH}(\alpha, \mathbf{T})$, 其中

$$\alpha = (1, 0, 0), \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -0.0027 & 0.0027 & 0 \\ 0 & -0.008 & 0.008 \\ 0 & 0 & -0.02878 \end{pmatrix}, \mathbf{T}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.02878 \end{bmatrix}$$

换件维修时间分布为 $\text{PH}(\beta, \mathbf{L})$, 其中

$$\beta = (0.8, 0.2), \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{L}^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

补充时间分布为 $\text{PH}(\varphi, \mathbf{C})$, 其中

$$\varphi = (1, 0, 0), \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & -0.08 & 0.07 \\ 0.005 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$

并假设 $S = 25, c_1 = 1, c_2 = 20, c_3 = 5, c_4 = 7$.

本文采用 Matlab 进行模型的计算. 通过选择不同 s 值, 可得再订货周期、平均库存量、平均正库存量以及平均缺货率与 s 的关系如图 3- 图 5 所示.

从图 3 可以看出, 在给定 S 的情况下, 当 $s = 14$ 时, 平均再订货周期最长. 当 $s = 8$ 或 9 时, 系统的平均库存量最低, 而系统平均正库存量则是一直随着 s 的增大而减小. 系统平均缺货率则是随着 s 增大不断的增大, 在 $s \leq 3$ 时, 系统不会出现缺货的情况.

然后根据第 5.6 节中给出的优化模型, 在给定 S 的情况下, 可以得到总费用与 s 的关系, 如图 6 所示, 可以看到此时, 费用曲线随着 s 的增大存在极小值点.

而选择不同的 c_1, c_2, c_3, c_4 的值, 会表现出不同的趋势, 例如当选择 $c_1 = 10, c_2 = 5, c_3 = 12, c_4 = 5$ 时, 费用曲线如图 7 所示. 选择 $c_1 = 20, c_2 = 5, c_3 = 4, c_4 = 5$ 时, 费用曲线则如图 8 所示. 可以看出两图总体趋势均是总费用会随着 s 增大而不断下降.

而对于同时优化 S 和 s 的启发式算法, 由于不是本文主要内容, 因此在算例中没有涉及.

7 结束语

本文分析了以往备件库存模型中存在的问题, 提出用 PH 分布作为备件寿命与换件维修时间分布的基本假设, 并在 PH 分布的基础上推导出具有多个相同部件的系统的备件需求过程是 MAP. 然后在此基础上对再补充时间服从 PH 分布的备件 (s, S) 库存系统进行建模, 给出了模型相关参数. 这个结论使得今后不需要再针对寿命、维修时间以及再补充时间的不同分布分别建立各自的模型, 大大减少了备件库存建模工作量. 在

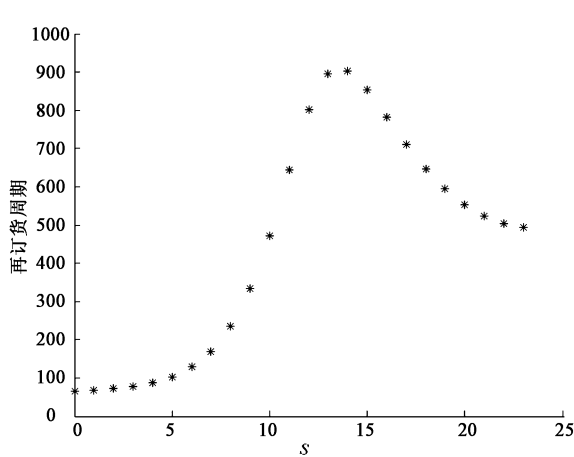


图 3 再订货周期与 s 的关系

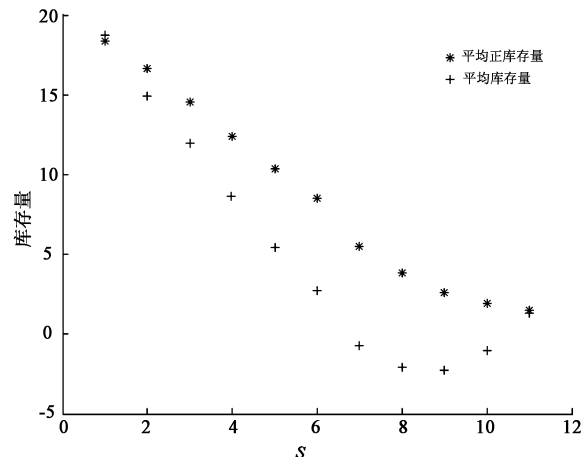


图 4 平均库存量、平均正库存量与 s 的关系

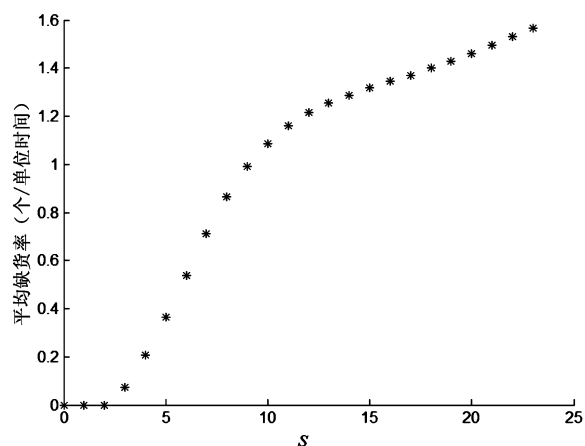


图 5 平均缺货率与 s 的关系

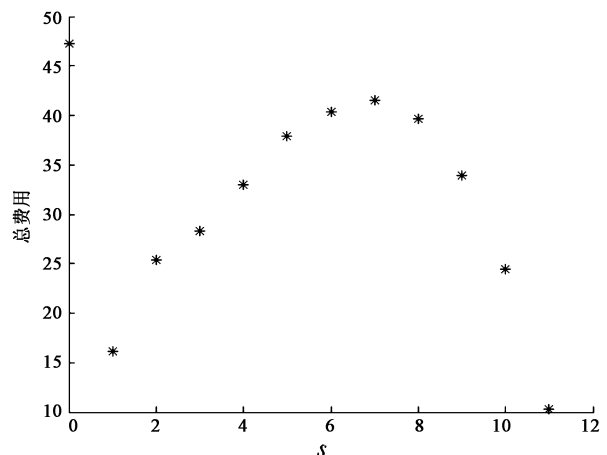
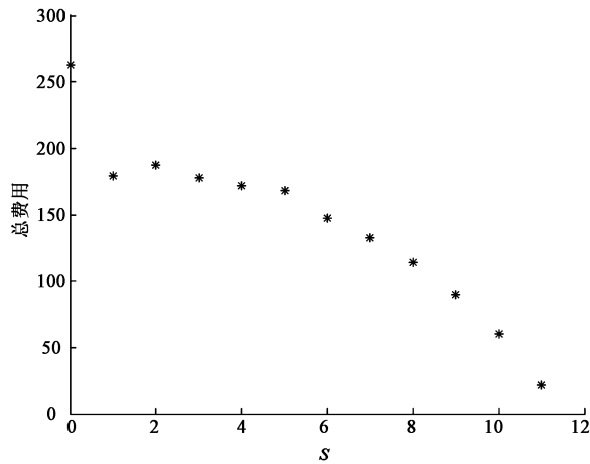
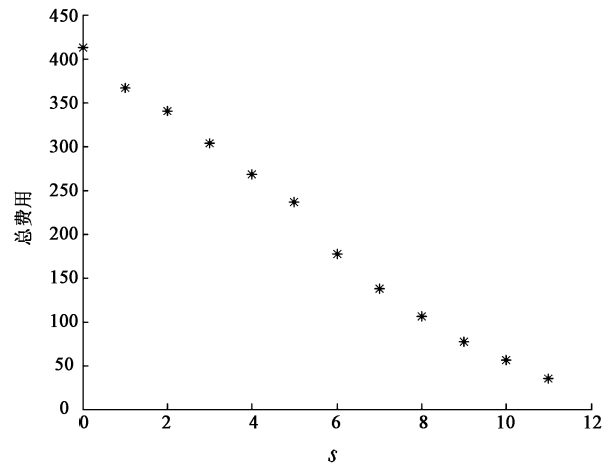


图 6 总费用与 s 的关系

图 7 总费用与 s 的关系图 8 总费用与 s 的关系

今后的库存优化工作中, 采用穷举法确定 S 和 s 时, 效率较低, 因此, 可以通过设计合理的启发式算法加以解决. 本文建立的模型在计算时主要涉及矩阵的运算, 目前高性能计算机和矩阵解析方法的应用能对大型矩阵的运算提供良好的支持, 所以本文建立的模型具有很好的实用价值.

参考文献

- [1] Isotupa K P S. An (s, Q) Markovian inventory system with lost sales and two demand classes[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43: 687–694.
- [2] Hill R M. Continuous-review, lost-sales inventory models with Poisson demand, a fixed lead time and no fixed order cost[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176: 956–963.
- [3] 于静, 吴进焯. 导弹武器装备备件数量计算方法研究 [J]. 战术导弹技术, 2003(2): 56–60.
Yu J, Wu J H. Research on a calculating method for missile weapon and equipments spares quantity[J]. Tactical Missile Technology, 2003(2): 56–60.
- [4] 田乃硕, 岳德权. 拟生灭过程与矩阵几何解 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
Tian N S, Yue D Q. Quasi Birth and Death Process and Matrix Analysis Method[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [5] 周江华, 肖刚, 孙国基. N:K 系统可靠度及备件量的仿真计算方法 [J]. 系统仿真学报, 2001, 13(2): 159–162.
Zhou J H, Xiao G, Sun G J. Simulation-based method for computation reliability and optimum quantity of N:K(m) cross-strapping standby system[J]. Journal of System Simulation, 2001, 13(2): 159–162.
- [6] 龙军, 康锐, 马麟, 等. 任意寿命分布的多部件系统备件配置优化算法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(6): 698–700.
Long J, Kang R, Ma L, et al. Algorithm for spares optimization of system with multi-items with different life distributions[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(6): 698–700.
- [7] Asmussen S, Koole G. Marked point processes as limits of Markovian arrival streams[J]. Journal Application of Probability, 1993, 30: 365–372.
- [8] Asmussen S, Bladt M. Point processes with finite-dimensional conditional probabilities[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1999, 82: 127–142.
- [9] Chakravarthy S R. The Batch Markovian Arrival Process: A Review and Future Work[M]. Advances in Probability Theory and Stochastic Processes. New Jersey: Notable Publications, 2001: 21–49.
- [10] 田乃硕. 休假随机服务系统 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
Tian N S. Stochastic Service System with Vacation Policies[M]. Beijing: Beijing University Press, 2001.
- [11] Kao E P C. 随机过程导论 (英文版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.
Kao E P C. An Introduction to Stochastic Processes[M]. Beijing: China Machine Press, 2006.
- [12] Lucantoni D M, Meier-Hellstern K S, Neuts M F. A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes[J]. Advance in Applied Probability, 1990, 22(3): 676–705.