

压缩弹性杆模型的 Compacton 解

龙瑶,芮伟国,何斌

(红河学院 数学系,云南 蒙自 661100)

摘要: 用动力系统分支理论和微分方程数值算法研究了压缩弹性杆模型的 Compacton 解. 在不同的参数条件下,利用 Maple 软件绘出了 Compacton 解的波形图. 给出了精确的 Compacton 解的隐函数表达式.

关键词: 弹性杆; Compacton 解

中图分类号: O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2006)02-0121-04

Compacton Solutions for a Model of Compressible Elastic Rod

LONG Yao, RUI Wei-guo, HE Bin

(Department of Mathematics of Honghe University, Mengzi, Yunnan 661100, China)

Abstract: By using the bifurcation theory of dynamic system and the method of numerical simulation of differential equation and the compacton solutions of the model of compressible elastic rod have been studied. Under the different parametric conditions and by using Maple software, the graph of the compacton waves are shown. Some implicit-function expressions of the exact compacton solutions are given.

Key words: elastic rod; compacton wave solutions

0 引言

2000年,Constantin 和 Strauss 证明了下列压缩弹性杆模型具有稳定的孤立波^[1]

$$v_t + avv_x + bv_{xx} + \gamma(2v_x v_{xx} + vv_{xxx}) = 0 \quad (1)$$

其中: $a \neq 0, b < 0, \gamma \leq 0$ 为参数. 当 $a = 3, b = -1$ 时,方程(1)转化为超弹性杆模型

$$\mu_t + 3uu_x - u_{xx} = \gamma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \quad (2)$$

Dai H·H 和 Huo Y.^[2,3] 研究了(2)的孤立波、孤立尖波、周期波和周期震动波解,他们还指出 γ 的范围为 $(-29.5, 3.4)$ Zhou Y.^[4] 证明了(2)的光滑孤立波的稳定性. Liu Z 和 Cheng C.^[5] 研究了(2)的 Compacton 解. 芮伟国等^[6] 研究了方程(1)的各种行波解的存在性,并绘出了各种行波的波形图,同时给出了与过鞍点的两种流形相对应的精确解. 然而,在这篇文章中,对以方程(1)的精确 Compacton 解却没有计算过. 本文将讨论这个问题:

令 $v(x, t) = \varphi(x - ct) = \varphi(\xi)$, 则方程(1)可化为

$$-c\varphi' + a\varphi\varphi' - b\varphi\varphi'' + \gamma(2\varphi'\varphi'' + \varphi\varphi''') = 0 \quad (3)$$

其中 $\varphi' = \varphi_\xi, c$ 为波速,由对称性不妨设 $c > 0$. 将(3)积分一次并取积分常数为0,得到下列波动方程:

$$-c\varphi + \frac{1}{2}a\varphi^2 - b\varphi\varphi'' + \gamma(\frac{1}{2}\varphi'^2 + \varphi\varphi'') = 0 \quad (4)$$

令 $\varphi' = y$, 则(4)可化为一个二维平面系统:

收稿日期:2006-01-24.

基金项目:云南省教育厅科学研究基金资助项目(项目编号:5Z0071A);红河学院自然科学基金资助项目(项目编号:XJ120502).

第一作者简介:龙瑶(1957~),女,副教授. 主要研究方向:微分方程. E-mail:longyaoteacher@yahoo.com.cn

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = y, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{-\frac{1}{2}a\varphi^2 + c\varphi - \frac{1}{2}\gamma y^2}{\gamma\varphi - bc} \tag{5}$$

当 $\varphi = \varphi_s = \frac{bc}{\gamma}$ 时, 系统(5)的二阶导数 $\varphi'' = \frac{dy}{d\xi}$ 无定义. 系统(5) 具有如下的首次积分:

$$y^2 \frac{-\frac{1}{3}a\varphi^3 + c\varphi^2 + h}{\gamma\varphi - bc} \tag{6}$$

其中 h 是积分常数, 将(6) 式定义为

$$H(\varphi, y) = (\gamma\varphi - bc)y^2 + \frac{1}{3}a\varphi^3 - c\varphi^2 = h \tag{7}$$

1 方程(1) 的相图分析

由变换 $d\xi = (\gamma\varphi - bc) d\tau$, 可把系统(5) 变为:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = (\gamma\varphi - bc)y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{1}{2}a\varphi^2 + c\varphi - \frac{1}{2}\gamma y^2 \tag{8}$$

显然系统(8) 与系统(5) 具有相同的首次积分. 利用平面动力系统分支理论^[7], 容易知道, 系统(8) 在 φ 轴上有两个平衡点 $O(0,0)$ 和 $A(\varphi_A, 0)$, 其中 $\varphi_A = \frac{2c}{a}$; 当 $2\gamma - ab < 0$ 时, 在奇直线 $\varphi = \varphi_s = \frac{bc}{\gamma}$ 上有两个平衡点 (φ_s, Y_{\pm}) , 其中 $\varphi_s = \frac{bc}{\gamma} < 0, Y_{\pm} = \frac{c}{\gamma} \sqrt{\frac{b(2-ab)}{\gamma}}$. 由平面动力系统分支理论可求得这些平衡点的 Jacobi 特征值如下

$$J(0,0) = bc^2 < 0; J(\varphi_A, 0) = \frac{c^2(2\gamma - ab)}{a}; J(\varphi_s, Y_{\pm}) = -(\gamma, Y_{\pm})^2 < 0 \tag{9}$$

利用(9) 式不难判定 $O(0,0)$ 和 $s_{\pm}(\varphi_s, Y_{\pm})$ 均为鞍点; 当 $\frac{2\gamma - ab}{a} > 0$ 时, $A(\varphi_A, 0)$ 为中心; 当 $\frac{2\gamma - ab}{a} < 0$ 时, $A(\varphi_A, 0)$ 为鞍点; 当 $\frac{2\gamma - ab}{a} = 0$ 时, $A(\varphi_A, 0)$ 为退化的鞍点. 另一方面, 由(7) 式有

$$h_{s_{\pm}} = H(\varphi_s, Y_{\pm}) = \frac{c^3 b^2 (ab - 3\gamma)}{3\gamma^3}, \quad h(\varphi_0^{1,2}, 0) = \frac{1}{3}a(\varphi_0^{1,2})^3 - c(\varphi_0^{1,2})^2 \tag{10}$$

根据以上分析, 绘出系统(8) 的相图, 并在相图上标出了 Compacton 解所对应的相轨道, 如图 1 所示.

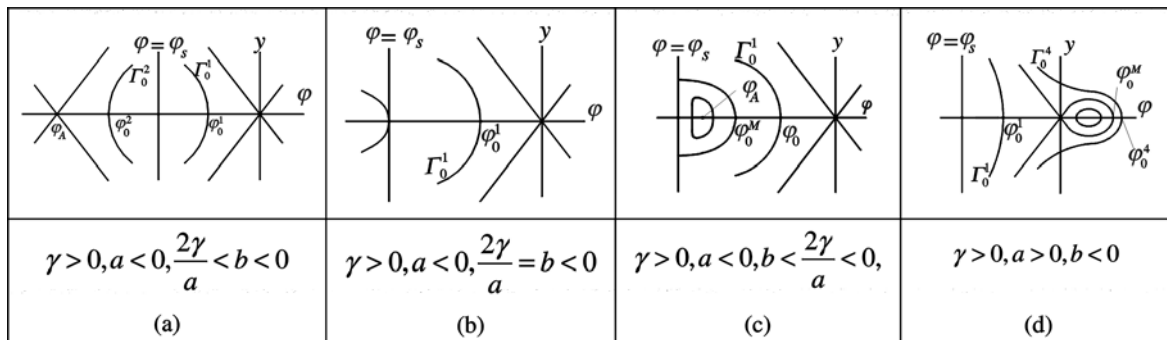


图1 系统(8)的分支相图

Fig.1 The phase portraits of system (8)

2 Compacton 解的波形图

对应于图1 中的有界轨道 Γ_0^1, Γ_0^2 和 Γ_0^4 , 适当选取 a, b, c, γ 等的参数值以及方程(4) 的初始条件 $\varphi(0)$,

$\varphi'(0)$ (初始条件附在图 2(a) - (c) 的下面), 利用数学软件 Maple 可以绘出与这三种轨道相对应的 Compacton 解的波形图如下:

(1) 取 $a = -2.5, b = -3.5, c = 1.2, \gamma = 5.0$, 可以绘出分别对应于轨道 Γ_1^0 和 Γ_2^0 的 Compacton 解的波形图, 如图 2(a), (b) 所示;

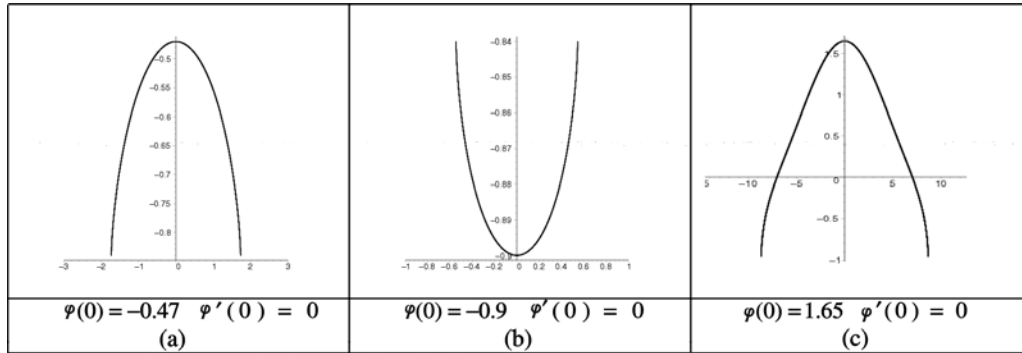


图2 波动方程(4)的 Compacton 孤波模拟图

Fig.2 The simulation graph of the compacton waves of wave equation (4)

(2) 取 $a = 2.5, b = -4.0, c = 1.2, \gamma = 5.0$, 可以绘出对应于轨道 Γ_4^0 的 Compacton 解的波形图, 如图 2(c) 所示.

3 精确的 Compacton 解

3.1 对应于图 1(a) - (d) 中的轨道 Γ_0^1 , 将 $h = h(\varphi_0^1)$ 代入方程(6) 得

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a}{3\gamma}} \sqrt{\frac{(M_1 - \varphi)(\varphi_0^1 - \varphi)(\varphi - m_1)}{\varphi - \varphi_s}}, \quad M_1 > \varphi_0^1 > \varphi > \varphi_s > \varphi_1 \quad (11)$$

其中 $\varphi_s = \frac{bc}{\gamma}, M_1, m_1 = \frac{3c - a\varphi_0^1 \mp \sqrt{3(c + a\varphi_0^1)(3c - a\varphi_0^1)}}{2a}$. 将(11) 代入(5) 式的第一个方程并沿轨道 Γ_0^1 积分得:

$$\int_{\varphi}^{\varphi_0^1} \sqrt{\frac{X - \varphi_s}{(M_1 - X)(\varphi_0^1 - X)(X - m_1)}} dX = \pm \sqrt{-\frac{a}{3\gamma}} \int_{\xi}^0 dX \quad (12)$$

利用椭圆函数积分公式^[8] 完成(12) 式的积分, 便得到方程(1) 的无穷多个山峰状的 Compacton 解(每给一个 φ_0^1 , 对应一个解), 它们具有相同的隐函数表达式:

$$\sin^{-1} \sqrt{\frac{(M_1 - \varphi_s)(\varphi_0^1 - \varphi)}{(\varphi_0^1 - \varphi_s)(M_1 - \varphi)}} + (\alpha^2 - 1) \Pi \left(\sin^{-1} \sqrt{\frac{(M_1 - \varphi_s)(\varphi_0^1 - \varphi)}{(\varphi_0^1 - \varphi_s)(M_1 - \varphi)}}, \alpha_1^2, k_1 \right) = \Omega_1 |\xi|, \quad (13)$$

其中 $k_1 = \sqrt{\frac{(\varphi_0^1 - \varphi_s)(M_1 - m_1)}{(M_1 - \varphi_s)(\varphi_0^1 - m_1)}}, 0 < \alpha_1^2 = \frac{\varphi_0^1 - \varphi_s}{M_1 - \varphi_s}, \Omega_1 = \sqrt{-\frac{a(\varphi_0^1 - m_1)}{12\gamma(M_1 - \varphi_s)}}$. 当 $\gamma > 0, a < 0, \frac{2\gamma}{a} \leq b < 0$ 或 $\gamma > 0, a < 0, \frac{2\gamma}{a} = b < 0$ 或 $\gamma > 0, a > 0, b < 0$ 时, $\varphi_0^1 \in (\varphi_s, 0)$; 当 $\gamma > 0, a < 0, b < \frac{2\gamma}{a} < 0$ 时,

$\varphi_0^1 \in (\varphi_0^M, 0)$ 且 $\varphi_0^M = \frac{c}{2a\gamma} [(3\gamma - ab) - \sqrt{3(3\gamma - ab)(\gamma + ab)}] > \varphi_s$.

3.2 对应于图 1(a) 中的轨道 Γ_0^2 , 将 $h = h(\varphi_0^2)$ 代入方程(6) 得

$$y = \pm \sqrt{-\frac{a}{3\gamma}} \sqrt{\frac{(M_2 - \varphi)(\varphi - \varphi_0^2)(\varphi - m_2)}{\varphi_s - \varphi}}, \quad M_2 > \varphi_s > \varphi > \varphi_0^2 > m_2 \quad (14)$$

将(14) 式代入(5) 式的第一个方程并沿轨道 Γ_0^2 积分得:

$$\int_{\varphi_0^2}^{\varphi} \sqrt{\frac{\varphi_s - X}{(M_2 - X)(X - \varphi_0^2)(X - m_2)}} dX = \pm \sqrt{-\frac{a}{3\gamma}} \int_0^{\xi} dX \quad (15)$$

利用椭圆函数积分公式^[8]完成(15)式的积分,便得到方程(1)的无穷多个峡谷状的 Compacton 解(每给一个 φ_0^2 , 对应一个解 $v(x, t) = \varphi(\xi)$), 它们具有相同的隐函数表达式:

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{(\varphi_s - m_2)(\varphi - \varphi_0^2)}}{\sqrt{(\varphi_s - \varphi_0^2)(\varphi - m_2)}} + (\alpha^2 - 1) \Pi \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{(\varphi_s - m_2)(\varphi - \varphi_0^2)}}{\sqrt{(\varphi_s - \varphi_0^2)(\varphi - m_2)}}, \alpha_2^2, k_2 \right) = \Omega_2 |\xi| \quad (16)$$

$$\text{其中 } M_2, m_2 = \frac{3c - a\varphi_0^2 \mp \sqrt{3(c + \alpha\varphi_0^2)(3c - a\varphi_0^2)}}{2a}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{(\varphi_s - \varphi_0^2)(M_2 - m_2)}{(M_2 - \varphi_0^2)(\varphi_s - m_2)}}, \quad 0 < \alpha_2^2 = \frac{\varphi_s - \varphi_0^2}{\varphi_s - m_2},$$

$$\Omega_2 = \sqrt{-\frac{a(M_2 - \varphi_0^2)}{12\gamma(\varphi - m_2)}}, \quad \varphi_0^2 \in (\varphi_A, \varphi_s).$$

参考文献:

- [1] Constantin A, Strauss W A. Stability of a class of solitary waves in compressible elastic rods[J]. Phys. Lett. A, 2000, 270: 140 - 148.
- [2] Dal H H. Model equations for nonlinear waves in a compressible Mooney - Rivlin rod[J]. Acta. Mech., 1998, 127: 193 - 207.
- [3] Dal H H, Huo Y. Solitary shock waves and other traveling waves in a general compressible hyperelastic rod[J]. Roy Soc, 2000, 456: 331 - 363.
- [4] Yong Zhou. Stability of solitary waves for a rod equation[J]. Chaos, Solitons and Fractal, 2004, 21: 977 - 981.
- [5] Zhengrong Liu, CAN Chen. Compactons in a general compressible hyperelastic rod[J]. Chaos, Solitons and Fractal, 2004, 22: 627 - 640.
- [6] 芮伟国, 龙瑶, 万飞. 压缩弹性杆模型的各种有界和无界精确行波解[J]. 昆明理工大学学报: 理工版, 2006, 31(4): 122.
- [7] Chow N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory[M]. New York: Springer, 1981.
- [8] Byrd P F, Riedman M D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists[M]. New York: Springer, 1971.

(上接第 113 页)

2) 同一品种不同类型的外植体的分化能力差异很大. 本实验结果表明, 丽格海棠在不定芽的诱导阶段, 叶片的诱导分化能力最强, 叶柄和花茎次之.

3) 同一品种同一器官不同部位的外植体分化能力也有差异. 本实验对丽格海棠叶片的叶中、叶侧和叶缘不定芽的分化能力进行了比较. 结果表明: 叶缘的分化能力最差, 叶中的分化能力略强于叶侧. 可能是由于叶片边缘的细胞层数少于叶中和叶侧, 维管束也较少; 而叶中和叶侧在细胞层数方面相差不远, 但叶中的维管束多于叶侧, 维管束时植物运输养分地通道, 同时又具有贮藏功能, 还有较强的分生能力的形成层, 所以其不定芽诱导的能力略强于叶侧.

参考文献:

- [1] 李文, 李宪章. 丽格海棠走俏花市[J]. 花木盆景, 1999, (1): 23.
- [2] 李虬, 张雪梅, 戴英祥. 丽格海棠的历史、生产现状及栽培前景[J]. 中花园艺, 2000, (10): 5 - 6.
- [3] 王发琳, 赵秀梅, 刘芬. 丽格海棠的叶片离体培养技术[J]. 甘肃农业科技, 2001, (5): 46 - 47.
- [4] 达克东, 张松, 姜璐琰, 等. 丽格海棠离体培养不定芽的发生和微繁殖研究[J]. 山东农业大学学报: 自然科学版, 2002, 33(1): 92 - 95.
- [5] 佟新萍, 董建民. 彩纹海棠微繁殖研究[J]. 北方园艺, 1998, (2): 53 - 54.
- [6] 宋仪农. 培养基种类和植物激素对丽格海棠微体快繁影响的研究[J]. 青海农林科技, 2003, (1): 6 - 7, 32.
- [7] 王利琳, 庞基良, 胡江琴. 丽格海棠的离体快繁[J]. 生物技术, 2001, 11(5): 46 - 48.
- [8] 徐宏英, 谢海军. 玫瑰海棠的组织培养及快速繁殖[J]. 植物生理学通讯, 1999, 35(5): 381.