文章编号:1000-6788(2006)08-0141-04

估计 Verhulst 模型中参数的线性规划方法及应用

何文章,吴爱弟
(天津工程师范学院数理与信息科学系,天津 300222)

摘要: 估计灰色 Verhulst 模型中的参数通常采用最小二乘准则,而在模型精度检验时又经常采用平均相对误差.本文主要在平均相对误差达到最小准则或最大相对误差达到最小准则下,阐明了 Verhulst 模型中参数估计问题可转化为线性规划问题,可以利用线性规划方法估计 Verhulst 模型中的参数.实际应用表明本文的方法是可行的且有效的,比传统方法预测精度高.

关键词: 灰色 Verhulst 模型;预测;线性规划方法;遗传算法
中图分类号: N941.5　　**文献标识码**: A

Estimation of Verhulst Model Parameter Based on Linear Programming

HE Wen-zhang, WU Ai-di
(Department of Mathematics and Information Science, Tianjin university of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

Abstract: Estimation of Verhulst's Model parameter usually adopts least square criterion, but testing model precision often use average relative error. Under the norm of the minimizing the average relative error criterion or minimizing the largest relative error criterion, this paper points out that the improved Verhulst model parameter problem can be transformed to linear programming, that is, the parameters of the improving Verhulst model can be calculated by a linear programming method. Practical application shows that this method is feasible and effective, and has high forecasting accuracy over traditional method.

Key words: grey Verhulst's model; forecasting; linear programming; genetic algorithm

1 引言

一般地,估计所有修正和改进的 Verhulst 模型中参数都采用最小二乘准则.最小二乘准则之所以应用的非常广泛,一个重要的原因是计算简单,参数利用公式容易求解.但在模型精度检验时经常采用平均相对误差 $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|\varepsilon_k|}{x^{(1)}(k)}$ 或最大相对误差 $\max\limits_{2\le k\le n}\frac{|\varepsilon_k|}{x^{(1)}(k)}$ 进行预测精度检验.由于平均相对误差或最大相对误差中的目标函数含有绝对值,这就导致了计算的复杂性,同时也限制了这两个准则的应用.本文主要在平均相对误差达到最小准则或最大相对误差达到最小准则下阐明了 Verhulst 模型中参数估计问题可转化为线性规划问题,可以利用线性规划方法估计 Verhulst 模型中的参数.

2 灰色 Verhulst 模型的参数估计

估计灰色 Verhulst 模型中参数的一般步骤[1~3]:

1) 已知原始数据序列 $x^{(1)}=\{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\}$,对 $x^{(1)}$ 进行一次累减生成,得到生成序列 $x^{(0)}=\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\}$,其中

$$x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1), \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

2) 由 $x^{(1)}$ 构造背景值序列 $Z^{(1)}=\{Z^{(1)}(2), Z^{(1)}(3), \cdots, Z^{(1)}(n)\}$,其中

$$Z^{(1)}(k) = \lambda x^{(1)}(k-1) + (1-\lambda)x^{(1)}(k), \quad k = 2, 3, \cdots, n, \lambda \in [0, 1], \tag{2}$$

收稿日期:2005-07-06
资助项目:天津市高等学校科技发展基金(20040708)
作者简介:何文章(1961 -),男,黑龙江人,博士,教授,主要从事系统的决策与优化、小波分析及应用研究.

一般取 $\lambda = 0.5$[1～3],假定 $x^{(1)}$ 具有饱和的 S 型序列,则白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)} = u(x^{(1)})^2. \tag{3}$$

将上式离散化,得到 Verhulst 灰差分方程如下:

$$x^{(0)}(k) + aZ^{(1)}(k) = u(Z^{(1)}(k))^2. \tag{4}$$

3) 按照最小二乘准则采用最小二乘法可求得参数

$$\hat{a} = [a, u]^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y_N. \tag{5}$$

其中 $B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & (Z^{(1)}(2))^2 \\ -Z^{(1)}(3) & (Z^{(1)}(3))^2 \\ \cdots & \cdots \\ -Z^{(1)}(n) & (Z^{(1)}(n))^2 \end{bmatrix}$, $Y_N = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \cdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$.

4) 取边值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$,可得预测公式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{aX^{(1)}(1)}{ux^{(1)}(1) + (a - ux^{(1)}(1))e^{ak}}. \tag{6}$$

按照预测的思想,(4) 式是用 $-aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2$ 对原始数据 $x^{(0)}(k)$ 做出预测,当然,预测中必然会有预测误差,不妨记为

$$\varepsilon_k = x^{(0)}(k) - [-aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2]. \tag{7}$$

在最小二乘准则下,预测误差的平方和为:

$$Q(a, u) = \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=2}^{n} (X^{(0)}(k) - (-aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2))^2. \tag{8}$$

令 $\frac{\partial Q}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$,可解得(5) 式.

3 改进的灰色 Verhulst 模型

正如文献[4～6]中所研究的,边值 $\hat{x}^{(1)}(1) = X^{(1)}(1)$ 和背景值 λ 对预测公式(6) 均有很大的影响. 若给边值条件一个修正,即,$\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \varepsilon$,其中,$\varepsilon$ 称为边值修正项,可得(6) 的改进公式:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{a(x^{(1)}(1) + \varepsilon)}{u(x^{(1)}(1) + \varepsilon) + (a - u(x^{(1)}(1) + \varepsilon))e^{ak}}. \tag{9}$$

下面分别以平均相对误差达到最小准则和以最大相对误差达到最小准则为目标,寻求最佳的 λ 和 ε,以使在相应的模型检验准则下预测的误差达到最小. 仍采用文献[6]中设计的遗传算法求解最佳的背景值 λ 和最佳的边值修正项 ε.

在平均相对误差达到最小极小化准则下,取适应度函数

$$Fit(\lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k)}\right|}. \tag{10}$$

在最大相对误差达到最小极小化准则下,取适应度函数

$$Fit(\lambda, \varepsilon) = \frac{1}{\max\limits_{k}\left|\frac{\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k)}\right|}. \tag{11}$$

其中,在(10) 式和(11) 式中的 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 均按(9) 式计算.

4 平均相对误差达到最小准则下参数 a, u 的估计

在平均相对误差达到最小准则下,极小化目标函数

$$\min Q(a, u) = \min \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|\varepsilon_k|}{x^{(1)}(k)}. \tag{12}$$

为了去掉目标函数中的绝对值,令

$$U_k = \frac{|\varepsilon_k| - \varepsilon_k}{2x^{(1)}(k)}, V_k = \frac{|\varepsilon_k| + \varepsilon_k}{2x^{(1)}(k)}, \quad k = 2\sim n.$$

则 $U_k \geq 0, V_k \geq 0$,并且

$$\frac{|\varepsilon_k|}{x^{(1)}(k)} = U_k + V_k, \varepsilon_k = x^{(1)}(k)(V_k - U_k), \quad k = 2\sim n. \tag{13}$$

利用(7)式,(13)式可改写为:

$$x^{(0)}(k) - [-aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2] = x^{(1)}(k)(V_k - U_k), \quad k = 2\sim n. \tag{14}$$

此时(12)式可改写为

$$\min Q(a,u) = \min \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(U_k + V_k). \tag{15}$$

综合(14)、(15)式,在平均相对误差达到最小准则下,估计参数 a, u 问题可归结为如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(U_k + V_k) \\ &\text{s.t.} -aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2 - x^{(1)}(k)U_k + x^{(1)}(k)V_k = x^{(0)}(k) \\ &\qquad U_k \geq 0 \\ &\qquad V_k \geq 0, \quad k = 2\sim n. \\ &\qquad a, u \text{ 为任意实数}. \end{aligned} \tag{16}$$

5 最大相对误差达到最小准则下参数 a, u 的估计

在最大相对误差达到最小准则下,极小化目标函数

$$\min Q(a,u) = \min \max_{2\leq k\leq n} \frac{|\varepsilon_k|}{x^{(1)}(k)} \tag{17}$$

同理,(17)式可改写为:

$$\min Q(a,u) = \min \max_{2\leq k\leq n}(U_k + V_k)$$

记 $R = \max\limits_{2\leq k\leq n}(U_k + V_k)$,则在最大相对误差达到最小准则下,求解参数 a, u 的问题可归结为如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} &\min R \\ &\text{s.t.}\ R - U_k - V_k \geq 0 \\ &\qquad -aZ^{(1)}(k) + u(Z^{(1)}(k))^2 - x^{(1)}(k)U_k + x^{(1)}(k)V_k = x^{(0)}(k) \\ &\qquad U_k \geq 0 \\ &\qquad V_k \geq 0, \quad k = 2\sim n \\ &\qquad a, u \text{ 为任意实数}. \end{aligned} \tag{18}$$

6 实际应用

某油田 1992～2004 年度石油产量数据 $x^{(1)} = \{5565.83, 5590.19, 5600.52, 5600.69, 5600.87, 5600.92, 5570.38, 5450.19, 5300.09, 5150.16, 5013.10, 4840.03, 4640.03\}$,(单位:$10^4$t),试用 1992～2000 年的数据预测 2004 年的产量,并和传统的灰色方法进行比较.

用 1992～2000 年的数据获得的油田年产量预测模型中参数估计值 $a = 0.38963458580479$, $u = 6.892781338596022\text{e-}005$, $\lambda = 1.00$, $\varepsilon = 72.2394$,此时预测模型为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{2196.786835407688}{0.38861979546029 + 0.00101479034450e^{0.38963458580479k}} \tag{19}$$

油田年产量实际数据与预测值如表 1 所示. 由表 1 可见 ,本文的方法是可行且有效的.

表 1 油田年产量实际数据与预测值

年份	实际值 ($\times 10^4$ t)	传统方法预测值 ($\times 10^4$ t)	相对误差	本文方法预测值 ($\times 10^4$ t)	相对误差
2001	5150.16	5101.50	0.8671	5200.09	0.9696
2002	5013.10	5035.14	0.4397	5008.96	0.0823
2003	4840.03	4956.05	2.3970	4751.16	1.8361
2004	4640.03	4878.20	5.1328	4415.60 *	4.8367

7 结束语

本文分别在平均相对误差达到最小准则或最大相对误差达到最小准则下,阐明了改进的 Verhulst 模型中参数估计问题可转化为线性规划问题 ,可以利用线性规划方法估计改进的 Verhulst 模型中的参数. 进一步分别以平均相对误差达到最小或最大相对误差达到最小为适应度 ,提出了可以基于遗传算法求解最佳背景值参数 λ 和最佳边值修正项 ε ,这样可以确保在相应的模型检验准则下预测的误差达到最小.

本文给出的利用线性规划方法估计改进的 Verhulst 模型中参数的方法易于推广应用.

最后 ,对审稿专家提出的修改意见表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Julong Deng. Control problems of grey systems[J]. Syst & Contr Lett ,1982 ,1 (5) :288 - 294.

[2] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉:华中理工大学出版社 ,1986.
Deng Julong. Grey Forecasting and Decision[M]. Wuhan:Huazhong University of Science and Technology Press ,1986.

[3] 刘思峰 ,郭天榜. 灰色系统理论及其应用 (第二版) [M]. 北京:科学出版社 ,1999.
Liu Sifeng ,Guo Tianbang. Grey System Theory and Its Application[M]. Beijing:Science Press ,1999.

[4] 张大海 ,江世芳 ,史开泉. 灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]. 系统工程理论与实践 ,2002 ,22 (8) :140 - 142.
Zhang Dahai ,Jiang Shifang ,Shi Kaiquan. Theoretical defect of grey prediction formula and its improvement[J]. Systems Engineering - Theory & Practice , 2002 ,22 (8) :140 - 142.

[5] 谢开贵 ,李春燕 ,周家启. 基于遗传算法的 GM(1 ,1 λ) 模型[J]. 系统工程学报 ,2000 ,15 (2) :168 - 172.
Xie Kaigui ,Li Chunyan ,Zhou Jiaqi. Grey model GM(1 ,1 λ) based on genetic algorithm[J]. Journal of Systems Engineering ,2000 , 15 (2) :168 - 172.

[6] 何文章 ,宋国乡. 基于遗传算法选取灰色模型中的参数[J]. 系统工程学报 ,2005 ,20 (4) :432 - 436.
He Wenzhang ,Song Guoxiang. Estimation of grey model parameter based on genetic algorithm[J]. Journal of Systems Engineering , 2005 ,20 (4) :432 - 436