文章编号: 1000-6788(2009)03-0155-07

一类流水作业质量检验中机床组合问题

任思成

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘 要 研究了一类流水作业质量检验的机床组合问题. 工件的加工采用流水作业形式, 加工过程包含若干个操作, 各操作分别在其对应的机床上进行, 并由对应的质量检验设备进行检验操作结果是否满足要求. 对应每一工序可能存在多台候选机床, 这些机床具有相同的加工功能, 但加工代价和缺陷品率不同. 在不同机床组合下, 工件的净收益期望值不同, 最优组合定义为使得工件的净收益期望值为最大的组合. 给出了一种求解最优组合的算法.

关键词 流水作业; 质量检验; 机床组合

中图分类号 F406.2; TP29; O22 **文献标志码** A

Combination of machines for flow shop quality inspection

REN Si-cheng

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract The problem of the combination of machines for flow shop quality inspection is studied in this paper. The part is to be processed in the form of flow shop and the manufacturing process consists of several operations. Each operation is to be completed on its corresponding machine and the corresponding quality inspection facility is applied to check the operation result. For each stage, there may exist multiple candidate machines which have the same manufacturing function but differ in the manufacturing cost and defective rate. The expectation of net income differs under different combinations of machines and the optimal combination is defined as the one which maximizes the expectation of net income. An algorithm is given to find the optimal combination.

Keywords flow shop; quality inspection; combination of machines

1 引言

检验是确保产品质量的重要手段, 如何在生产过程中选择合理的检验策略是质量控制研究的重要问题, 很多学者从不同方面对此进行了广泛的研究 [1−6]. 文献 [6] 对上述研究进行了较为全面的综述, 并从系统特性和建模特性两个方面进行了分类. 其中, 系统特性方面包括生产配置、工件流、检验类型、检验能力、缺陷率和缺陷可修复性等因素, 建模特性方面包括代价组成、目标函数、约束条件和优化方法等因素.

在众多关于质量检验方面的研究文献中, 研究的前提条件是假设每一工序中的机床是事先已经确定, 然后在此基础上进一步讨论质量检验的优化问题. 而有些情况下同一工序可能存在多台候选机床, 这些机床具有相同的加工功能, 但加工代价和缺陷品率不同. 在不同的机床组合下, 系统的性能表现可能不同. 因此, 机

收稿日期: 2007-06-04
资助项目: 国家 973 计划 (2002CB312200)
作者简介: 任思成 (1979–), 男, 汉, 博士, 清华大学控制科学与工程流动站在站博士后, 研究方向为制造系统建模与优化.

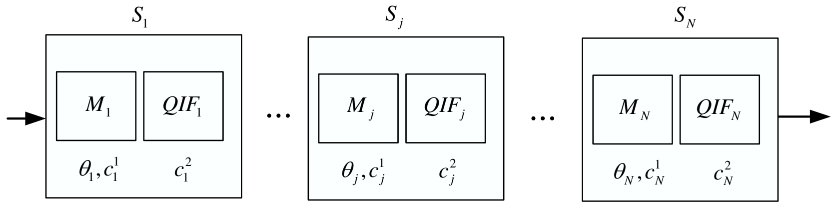

图 1 流水作业质量检验

床组合是研究质量检验问题时不可忽略的重要因素. 鉴于此, 本文研究了一类流水作业质量检验的机床组合问题. 文章首先对机床组合问题进行了数学描述, 定义最优组合为使得工件的净收益期望值为最大的组合, 给出了求解最优组合的一种迭代算法. 最后, 给出了一个求解机床组合问题的计算实例.

2 问题描述

如图 1 所示, 流水作业质量检验的机床组合问题可以由一四元组 (O, S, M, QIF) 表示, 其中:

$O = \{O_j | j \in I_O\}$ 为操作集合, 每一操作各自对应一个分质量指标, 当且仅当每一操作结果均满足其所对应的分质量指标要求时, 成品为合格品, 否则为不合格品;

$S = \{S_j | j \in I_S\}$ 为工序集合, 工序 S_j 由机床 M_j 和其所对应的在线质量检验设备 QIF_j 组成;

$M = \{M_j | j \in I_M\}$ 为机床集合, 机床 M_j 完成对工件的第 j 项操作 O_j, 记单位加工代价为 c_j^1, 操作结果不满足其所对应的分质量指标要求的概率为 θ_j; 对应 M_j 存在多台候选机床 ${}^{u_j}M_j$, 其中左上标 $u_j = 1, 2, \cdots, U_j$ 表示候选机床的编号; ${}^{u_j}M_j$ 均可以完成操作 O_j, 但 c_j^1 和 θ_j 不同, 分别记为 ${}^{u_j}c_j^1$, ${}^{u_j}\theta_j$;

$QIF = \{QIF_j | j \in I_{QIF}\}$ 为在线质量检验设备集合, 操作 O_j 完成后, 由其所对应的 QIF_j 进行检验操作结果是否满足其所对应的分质量指标要求, 这里假设 QIF_j 的检验准确率都为 100%, 并记单位检验代价为 c_j^2; I_O, I_S, I_M, I_{QIF} 分别为 O, S, M, QIF 的指标集, 且满足 $I_O = I_S = I_M = I_{QIF} = I = \{1, 2, \cdots, N\}$; 工件的加工采用流水作业形式, 工件的加工检验顺序事先已经确定, 即工件顺序经过工序 $S_1, S_2, \cdots, S_N$, 若工件完成在工序 S_j 上的操作并通过质量检验, 则转入下一道工序, 否则标记为不合格品退出.

对于所讨论的问题建立如下数学模型: 令 $P(Q_j | Q_{j-1}Q_{j-2} \cdots Q_1)$ 表示工件在已知通过工序 $S_{j-1}S_{j-2} \cdots S_1$ 条件下通过工序 S_j 的条件概率, 显然有

$$P(Q_j | Q_{j-1}Q_{j-2} \cdots Q_1) = 1 - \theta_j, j \in I - \{1\} \tag{1}$$

令 $P(Q_j)$ 表示工件通过工序 S_j 的概率, 易知

$$P(Q_1) = 1 - \theta_1 \tag{2}$$

对于 $j \in I - \{1\}$, $P(Q_j)$ 可以表示为

$$P(Q_j) = P(Q_1) \prod_{1<i\leq j} P(Q_i | Q_{i-1}Q_{i-2} \cdots Q_1), j \in I - \{1\} \tag{3}$$

将 (1)、(2) 代入 (3) 式, 得到

$$P(Q_j) = (1 - \theta_1) \prod_{1<i\leq j} (1 - \theta_i), j \in I - \{1\} \tag{4}$$

由 (2)、(4) 式, $P(Q_j)$ 的一般形式可以写作

$$P(Q_j) = \prod_{1\leq i\leq j} (1 - \theta_i), j \in I \tag{5}$$

特别地, $P(Q_N)$ 表示产品为合格品的概率, 且有

$$P(Q_N) = \prod_{1\leq i\leq N} (1 - \theta_i) = \prod_{j\in I} (1 - \theta_j) \tag{6}$$

记 $C(j)$ 为工件在工序 S_j 加工检验代价, 容易得到

$$C(1) = c_1^1 + c_1^2 \tag{7}$$

对于 $j \in I-\{1\}$ 的情形, $C(j)$ 是离散型随机变量, 其概率分布为

$$P\{C(j)=c_j^1+c_j^2\}=P(Q_{j-1}) \tag{8}$$

$$P\{C(j)=0\}=1-P(Q_{j-1}) \tag{9}$$

其数学期望 $EC(j)$ 为

$$EC(j)=(c_j^1+c_j^2)P(Q_{j-1}), j\in I-\{1\} \tag{10}$$

代入 (5) 式, 可以得到

$$EC(j)=(c_j^1+c_j^2)\frac{\prod\limits_{1\le i\le j}(1-\theta_i)}{1-\theta_j}, j\in I-\{1\} \tag{11}$$

工件总加工检验代价 C 等于工件在各工序加工检验代价 $C(j)$ 的累加和, 即

$$C=C(1)+\sum_{j\in I-\{1\}}C(j) \tag{12}$$

对 C 取期望, 并代入 (7)、(11) 式, 有

$$EC=\sum_{j\in I}(c_j^1+c_j^2)\frac{\prod\limits_{1\le i\le j}(1-\theta_i)}{1-\theta_j} \tag{13}$$

记合格品的单位收益为 a, 则工件的收益期望值 EI 可表示为

$$EI=aP(Q_N)=a\prod_{j=1}^{N}(1-\theta_j) \tag{14}$$

工件的净收益期望值 ENI 为

$$ENI(\theta_1,c_1^1;\theta_2,c_2^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)=EI-EC=a\prod_{j=1}^{N}(1-\theta_j)-\sum_{j=1}^{N}(c_j^1+c_j^2)\frac{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\theta_i)}{1-\theta_j} \tag{15}$$

ENI 为 $(\theta_1,c_1^1;\theta_2,c_2^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)$ 的函数, $(\theta_1,c_1^1;\theta_2,c_2^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)$ 可能的组合共有 $\prod\limits_{j=1}^{N}U_j$ 种, 一般来说, 不同组合所对应的 ENI 不同. 流水作业质量检验的机床组合问题就是寻找使得工件的净收益期望值为最大的最优组合.

3 最优组合的求解方法

首先, 作如下定义. 对于 $j\in I$, 令

$${}^{u_j}\Delta_j=ENI(\theta_1,c_1^1;\cdots;{}^{u_j}\theta_j,{}^{u_j}c_j^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)-ENI(\theta_1,c_1^1;\cdots;{}^{0}\theta_j,{}^{0}c_j^1;\cdots;\theta_N,c_N^1) \tag{16}$$

$${}^{u_j}\Delta\theta_j={}^{u_j}\theta_j-{}^{0}\theta_j \tag{17}$$

$${}^{u_j}\Delta c_j^1={}^{u_j}c_j^1-{}^{0}c_j^1 \tag{18}$$

其中, $(\theta_1,c_1^1;\cdots;{}^{u_j}\theta_j,{}^{u_j}c_j^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)$ 和 $(\theta_1,c_1^1;\cdots;{}^{0}\theta_j,{}^{0}c_j^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)$ 是两种组合, 两种组合中的 θ_j, c_j^1 取值不同, 分别为 ${}^{u_j}\theta_j{}^{u_j}c_j^1$ 和 ${}^{0}\theta_j{}^{0}c_j^1$, 而其余的 $\theta_1,c_1^1;\cdots;\theta_{j-1},c_{j-1}^1;\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1$ 的取值相同. ${}^{u_j}\Delta_j$, ${}^{u_j}\Delta\theta_j$ 和 ${}^{u_j}\Delta c_j^1$ 分别表示前一种组合相对于后一种组合的 ENI, θ_j 和 c_j^1 增量.

从 (15) 式可以看出, 在 $\theta_1,c_1^1;\cdots;\theta_{j-1},c_{j-1}^1;\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1$ 为给定值时, ENI 可以表示为 θ_j 和 c_j^1 的线性组合, 因此有如下关系成立

$${}^{u_j}\Delta_j=\frac{\partial ENI}{\partial\theta_j}{}^{u_j}\Delta\theta_j+\frac{\partial ENI}{\partial c_j^1}{}^{u_j}\Delta c_j^1 \tag{19}$$

其中, $\frac{\partial ENI}{\partial\theta_j}$ 和 $\frac{\partial ENI}{\partial c_j^1}$ 分别表示 ENI 对 θ_j 和 c_j^1 求偏导数, 且有

$$\frac{\partial ENI}{\partial\theta_j}=-\frac{a}{1-\theta_j}\prod_{i=1}^{N}(1-\theta_i)+\frac{1}{1-\theta_j}\sum_{i=j+1}^{N}(c_i^1+c_i^2)\frac{\prod\limits_{k=1}^{i}(1-\theta_k)}{1-\theta_i} \tag{20}$$

$$\frac{\partial ENI}{\partial c_j^1}=-\frac{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\theta_i)}{1-\theta_j} \tag{21}$$

将 (20)、(21) 式代入 (19) 式, 进一步可改写为如下形式:

$$^{u_j}\Delta_j=R_j^1(\theta_1,\cdots,\theta_{j-1})R_j(\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1;{}^{u_j}\Delta\theta_j,{}^{u_j}\Delta c_j^1) \tag{22}$$

其中,

$$R_j^1(\theta_1,\cdots,\theta_{j-1})=-\frac{\partial ENI}{\partial c_j^1}=\frac{\prod\limits_{i=1}^{j}(1-\theta_i)}{1-\theta_j} \tag{23}$$

$$R_j(\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1;{}^{u_j}\Delta\theta_j,{}^{u_j}\Delta c_j^1)=-(R_j^2(\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)^{u_j}\Delta\theta_j+{}^{u_j}\Delta c_j^1) \tag{24}$$

$$R_j^2(\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)=\frac{\frac{\partial ENI}{\partial\theta_j}}{\frac{\partial ENI}{\partial c_j^1}}=a\prod_{i=j+1}^{N}(1-\theta_i)-\sum_{i=j+1}^{N}(c_i^1+c_i^2)\frac{\prod\limits_{k=j+1}^{i}(1-\theta_k)}{1-\theta_i} \tag{25}$$

由 (23)、(25) 式可以看出, $R_j^1(\theta_1,\cdots,\theta_{j-1})$ 和 $R_j^2(\theta_{j+1},c_{j+1}^1;\cdots;\theta_N,c_N^1)$ 分别是 $\theta_1,\cdots,\theta_{j-1}$ 和 $\theta_{j+1},c_{j+1}^1,\cdots,\theta_N,c_N^1$ 的函数, 且满足 $R_j^1(\theta_1,\cdots,\theta_{j-1})\geq 0$. 特别地, 对于 $j=N$ 时, 有

$$R_N^2=a \tag{26}$$

$$R_N({}^{u_N}\Delta\theta_N,{}^{u_N}\Delta c_N^1)=-(R_N^2\,{}^{u_N}\Delta\theta_N+{}^{u_N}\Delta c_N^1)=-a^{u_N}\Delta\theta_N-{}^{u_N}\Delta c_N^1 \tag{27}$$

定理 1 令

$$V_N=\arg\max_{u_N}R_N({}^{u_N}\Delta\theta_N,{}^{u_N}\Delta c_N^1) \tag{28}$$

$$V_j=\arg\max_{u_j}R_j({}^{V_{j+1}}\theta_{j+1},{}^{V_{j+1}}c_{j+1}^1;\cdots;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1;{}^{u_j}\Delta\theta_j,{}^{u_j}\Delta c_j^1),j=1,2,\cdots,N-1 \tag{29}$$

$({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;{}^{v_2}\theta_2,{}^{v_2}c_2^1;\cdots;{}^{v_N}\theta_N,{}^{v_N}c_N^1)$ 表示任何一种可能组合, 则必有

$$ENI({}^{V_1}\theta_1,{}^{V_1}c_1^1;{}^{V_2}\theta_2,{}^{V_2}c_2^1;\cdots;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1)\geq ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;{}^{v_2}\theta_2,{}^{v_2}c_2^1;\cdots;{}^{v_N}\theta_N,{}^{v_N}c_N^1)$$

即组合 $({}^{V_1}\theta_1,{}^{V_1}c_1^1;{}^{V_2}\theta_2,{}^{V_2}c_2^1;\cdots;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1)$ 为使得工件的净收益期望值为最大的最优组合.

证明

1) 首先证明

$$\begin{aligned}&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1)\geq\\&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{v_N}\theta_N,{}^{v_N}c_N^1)\end{aligned}$$

成立. 由 (28)、(22) 式可以得到

$$R_N({}^{V_N}\Delta\theta_N,{}^{V_N}\Delta c_N^1)\geq R_N({}^{v_N}\Delta\theta_N,{}^{v_N}\Delta c_N^1)$$

$${}^{V_N}\Delta_N=R_N^1({}^{v_1}\theta_1,\cdots,{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1})R_N({}^{V_N}\Delta\theta_N,{}^{V_N}\Delta c_N^1)$$

$${}^{v_N}\Delta_N=R_N^1({}^{v_1}\theta_1,\cdots,{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1})R_N({}^{v_N}\Delta\theta_N,{}^{v_N}\Delta c_N^1)$$

$R_N^1({}^{v_1}\theta_1,\cdots,{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1})\geq 0$, 显然有

$${}^{V_N}\Delta_N\geq{}^{v_N}\Delta_N$$

由 (16) 式,

$$\begin{aligned}&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1)\\&=ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{0}\theta_N,{}^{0}c_N^1)+{}^{V_N}\Delta_N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{v_N}\theta_N,{}^{v_N}c_N^1)\\&=ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{0}\theta_N,{}^{0}c_N^1)+{}^{v_N}\Delta_N\end{aligned}$$

${}^{V_N}\Delta_N\geq{}^{v_N}\Delta_N$, 故有

$$\begin{aligned}&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{V_N}\theta_N,{}^{V_N}c_N^1)\geq\\&ENI({}^{v_1}\theta_1,{}^{v_1}c_1^1;\cdots;{}^{v_{N-1}}\theta_{N-1},{}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1;{}^{v_N}\theta_N,{}^{v_N}c_N^1)\end{aligned}$$

2) 然后证明

$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{V_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) \geq$$
$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{v_N}\theta_N, {}^{v_N}c_N^1)$$

成立. 由 (29)、(22) 式可以得到

$$R_{N-1}(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1; {}^{V_{N-1}}\Delta\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}\Delta c_{N-1}^1) \geq R_{N-1}(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1; {}^{v_{N-1}}\Delta\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}\Delta c_{N-1}^1)$$
$${}^{V_{N-1}}\Delta_{N-1} = R_{N-1}^1(^{v_1}\theta_1, \cdots, {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2})R_{N-1}(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1; {}^{V_{N-1}}\Delta\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}\Delta c_{N-1}^1)$$
$${}^{v_{N-1}}\Delta_{N-1} = R_{N-1}^1(^{v_1}\theta_1, \cdots, {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2})R_{N-1}(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1; {}^{v_{N-1}}\Delta\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}\Delta c_{N-1}^1)$$

$R_{N-1}^1(^{v_1}\theta_1, \cdots, {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}) \geq 0$, 显然有

$${}^{V_{N-1}}\Delta_{N-1} \geq {}^{v_{N-1}}\Delta_{N-1}$$

由 (16) 式,

$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{V_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)$$
$$= ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{0}\theta_{N-1}, {}^{0}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) + {}^{V_{N-1}}\Delta_{N-1}$$
$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)$$
$$= ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{0}\theta_{N-1}, {}^{0}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) + {}^{v_{N-1}}\Delta_{N-1}$$

${}^{V_{N-1}}\Delta_{N-1} \geq {}^{v_{N-1}}\Delta_{N-1}$, 故有

$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{V_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) \geq$$
$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)$$

又由 (1) 中结论

$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) \geq$$
$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{v_N}\theta_N, {}^{v_N}c_N^1)$$

所以

$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{V_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{V_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) \geq$$
$$ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; \cdots; {}^{v_{N-2}}\theta_{N-2}, {}^{v_{N-2}}c_{N-2}^1; {}^{v_{N-1}}\theta_{N-1}, {}^{v_{N-1}}c_{N-1}^1; {}^{v_N}\theta_N, {}^{v_N}c_N^1)$$

依此类推, 可以证明

$$ENI(^{V_1}\theta_1, {}^{V_1}c_1^1; {}^{V_2}\theta_2, {}^{V_2}c_2^1; \cdots; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1) \geq ENI(^{v_1}\theta_1, {}^{v_1}c_1^1; {}^{v_2}\theta_2, {}^{v_2}c_2^1; \cdots; {}^{v_N}\theta_N, {}^{v_N}c_N^1)$$

定理 1 证明了由 (28)、(29) 式得到组合的最优性, 下面的定理则证明了 $V_1, V_2, \cdots, V_N$ 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关.

定理 2 $V_1, V_2, \cdots, V_N$ 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关.

证明

1) 首先证明 V_N 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关. 将 (17)、(18)、(24) 代入 (28) 式, 可以得到

$$V_N = \arg\max_{u_N} -(R_N^2\, {}^{u_N}\theta_N + {}^{u_N}c_N^1 - R_N^2\, {}^0\theta_N - {}^0c_N^1) = \arg\max_{u_N} -(R_N^2\, {}^{u_N}\theta_N + {}^{u_N}c_N^1)$$

显然, V_N 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关.

2) 然后证明 V_{N-1} 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关. 将 (17)、(18)、(24) 代入 (29) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= \arg\max_{u_{N-1}} -(R_{N-1}^2(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)\, {}^{u_{N-1}}\theta_{N-1} + {}^{u_{N-1}}c_{N-1}^1 - R_{N-1}^2(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)\, {}^0\theta_{N-1} - {}^0c_{N-1}^1) \\ &= \arg\max_{u_{N-1}} -(R_{N-1}^2(^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)\, {}^{u_{N-1}}\theta_{N-1} + {}^{u_{N-1}}c_{N-1}^1) \end{aligned}$$

因此, V_{N-1} 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关.

依此类推, 可以证明 $V_1, V_2, \cdots, V_N$ 与 ${}^0\theta_1, {}^0c_1^1; {}^0\theta_2, {}^0c_2^1; \cdots; {}^0\theta_N, {}^0c_N^1$ 的取值无关, 证毕. 为了计算的方便, 我们可以取 ${}^0\theta_j = {}^0c_j^1 = 0, j = 1, 2, \cdots, N$.

由定理 1、2 可知, 对于本文研究的一类流水作业质量检验中机床组合问题, 其最优组合的求解算法为

算法

$$R_N({}^{u_N}\theta_N, {}^{u_N}c_N^1) = -a^{u_N}\theta_N - {}^{u_N}c_N^1 \tag{30}$$

$$V_N = \arg\max_{u_N} R_N({}^{u_N}\theta_N, {}^{u_N}c_N^1) \tag{31}$$

对于 $j = 1, 2, \cdots, N-1$,

$$R_j(\theta_{j+1}, c_{j+1}^1; \cdots; \theta_N, c_N^1; {}^{u_j}\theta_j, {}^{u_j}c_j^1) = -(R_j^2(\theta_{j+1}, c_{j+1}^1; \cdots; \theta_N, c_N^1)^{u_j}\theta_j + {}^{u_j}c_j^1) \tag{32}$$

$$R_j^2(\theta_{j+1}, c_{j+1}^1; \cdots; \theta_N, c_N^1) = a\prod_{i=j+1}^{N}(1-\theta_i) - \sum_{i=j+1}^{N}(c_i^1 + c_i^2)\frac{\prod_{k=j+1}^{i}(1-\theta_k)}{1-\theta_i} \tag{33}$$

$$V_j = \arg\max_{u_j} R_j({}^{V_{j+1}}\theta_{j+1}, {}^{V_{j+1}}c_{j+1}^1; \cdots; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1; {}^{u_j}\theta_j, {}^{u_j}c_j^1) \tag{34}$$

组合 $({}^{V_1}\theta_1, {}^{V_1}c_1^1; {}^{V_2}\theta_2, {}^{V_2}c_2^1; \cdots; {}^{V_N}\theta_N, {}^{V_N}c_N^1)$ 为使得工件的净收益期望值为最大的最优组合.

本文研究的一类流水作业质量检验中机床组合问题是一种多阶段决策问题. 定理 1、2 表明了所研究问题具有无后效性, 即 "每个阶段的最优决策过程只与本阶段的初始状态有关, 而与以前各阶段的决策无关"[7]. 因此, 本文给出的最优组合求解算法实质上是一种动态规划算法.

4 例证

表 1 机床组合问题实例

j	1	2	3	4
c_j^2	1	1	5	2
${}^1M_j({}^1\theta_j, {}^1c_j^1)$	(0.01,9)	(0.02,14)	(0.04,20)	(0.03,18)
${}^2M_j({}^2\theta_j, {}^2c_j^1)$	(0.02,5)	(0.01,20)	(0.02,25)	(0.02,25)

在表 1 的机床组合问题实例中, 合格品的单位收益 $a = 100$, 流水作业包含 4 台机床, 每台机床各有两台候选机床, 表的第 2 行为质量检验设备的单位检验代价 c_j^2, 第 3、4 行给出了各候选机床的 ${}^{u_j}\theta_j$ 和 ${}^{u_j}c_j^1$ 数值. V_1, V_2, V_3, V_4 的计算过程如下:

1) 首先确定 V_4.

由 (30)、(31) 式, 有

$$R_4({}^{u_4}\theta_4, {}^{u_4}c_4^1) = -100^{u_4}\theta_4 - {}^{u_4}c_4^1$$

$$R_4({}^1\theta_4, {}^1c_4^1) = -21$$

$$R_4({}^2\theta_4, {}^2c_4^1) = -27$$

$$V_4 = \arg\max_{u_4} R_4({}^{u_4}\theta_4, {}^{u_4}c_4^1) = 1$$

2) 然后确定 V_1, V_2, V_3.

由 (32)、(33)、(34) 式, 对于 V_3

$$R_3({}^1\theta_4, {}^1c_4^1; {}^{u_3}\theta_3, {}^{u_3}c_3^1) = -77^{u_3}\theta_3 - {}^{u_3}c_3^1$$

$$R_3({}^1\theta_4, {}^1c_4^1; {}^1\theta_3, {}^1c_3^1) = -23.08$$

$$R_3({}^1\theta_4, {}^1c_4^1; {}^1\theta_3, {}^1c_3^1) = -26.54$$

$$V_3 = \arg\max_{u_3} R_3({}^1\theta_4, {}^1c_4^1; {}^{u_3}\theta_3, {}^{u_3}c_3^1) = 1$$

对于 V_2

$$
\begin{aligned}
&R_2({}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^{u_2}\theta_2,{}^{u_2}c_2^1)=-48.92^{u_2}\theta_2-{}^{u_2}c_2^1\\
&R_2({}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^1\theta_2,{}^1c_2^1)=-14.9784\\
&R_2({}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^2\theta_2,{}^2c_2^1)=-20.4892\\
&V_2=\arg\max_{u_2} R_2({}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^{u_2}\theta_2,{}^{u_2}c_2^1)=1
\end{aligned}
$$

对于 V_1

$$
\begin{aligned}
&R_1({}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^{u_1}\theta_1,{}^{u_1}c_1^1)=-32.9416^{u_1}\theta_1-{}^{u_1}c_1^1\\
&R_1({}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^1\theta_1,{}^1c_1^1)=-9.329416\\
&R_1({}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^2\theta_1,{}^2c_1^1)=-5.658832\\
&V_1=\arg\max_{u_1} R_1({}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1;{}^{u_1}\theta_1,{}^{u_1}c_1^1)=2
\end{aligned}
$$

所求最优组合为 $({}^2\theta_1,{}^2c_1^1;{}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1)$, 并由 (15) 可知, 在最优组合下工件的净收益期望值 $ENI({}^2\theta_1,{}^2c_1^1;{}^1\theta_2,{}^1c_2^1;{}^1\theta_3,{}^1c_3^1;{}^1\theta_4,{}^1c_4^1)=26.282768$.

5　结束语

本文研究了一类流水作业质量检验的机床组合问题. 工件的加工采用流水作业形式, 每一工序对应的存在多台候选机床, 工件的净收益期望值取决于候选机床组合的选取, 最优组合定义为使得工件的净收益期望值为最大的组合. 文章给出了求解最优组合的方法.

参考文献

[1] Lindsay G F, Bishop A B. Allocation of screening inspection efforts — A dynamic programming approach[J]. Management Science, 1964, 10(2): 342–352.

[2] Yao D D, Zheng S. Dynamic Control of Quality in Production-Inventory Systems: Coordination and Optimization[M]. New York: Springer, 2002.

[3] Dorris A L, Foote B L. Inspection errors and statistical quality control: A survey[J]. AIIE Transactions, 1978, 10(2): 184–192.

[4] Menipaz E. A taxonomy of economically based quality control procedures[J]. International Journal of Production Research, 1978, 16(2): 153–167.

[5] Raz T. A survey of models for allocating inspection effort in multistage production systems[J]. Journal of Quality Technology, 1986, 18(4): 239–247.

[6] Mandroli S S, Shrivastava A K, Ding Y. A survey of inspection strategy and sensor distribution studies in discrete-part manufacturing processes[J]. IIE Transactions, 2006, 38(4): 309–328.

[7] 何坚勇. 运筹学基础 [M]. 北京：清华大学出版社, 2000.
He J Y. Foundation of Operational Research[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000.