

文章编号:1000-6788(2005)10-0073-05

区间估计:AHP指标筛选的一种方法

高杰^{1,2},孙林岩¹,李满圆¹

(1. 西安交通大学管理学院,西安 710049; 2. 早稻田大学情报生产与系统大学院,福冈 808-0135)

摘要: 分析了弱权重指标对层次分析法判断矩阵不一致性的负面影响,提出了识别和剔除弱权重指标的基本原理,以及利用层次分析的区间估计剔除弱权重指标的步骤、方法。它尤其适合于决策者希望通过借鉴一个较大的一般指标集建立具体评价问题的指标集的情形。弱权重指标的剔除有助于提高决策者权重比较的精确度,决策者也不再需要收集各方案在那些弱权重上的表现信息,从而提高了层次分析法的应用性。

关键词: 层次分析法;区间估计;指标筛选;弱权重指标;不一致性

中图分类号: N94

文献标识码: A

Range Estimation Priority: A Method to Sift Out Weak-weighted Criteria in AHP

GAO Jie^{1,2}, SUN Lin-yan¹, LI Man-yuan¹

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Graduate School of Information, Production and Systems, Waseda University, Fukuoka 808-0135)

Abstract: In this paper, it is shown priority vectors are full of deviations and uncertainties. This occurs due to the decision-makers' uncertainties and errors in comparisons as well as inconsistencies in judgment matrices in Analytical Hierarchy Process (AHP). The contribution to evaluation goals of the criteria with very weak weights may be submerged in such deviations and uncertainties, which makes those criteria meaningless and should be sifted out. The concept and method to sift such criteria out are proposed in this paper. This method allows decision-makers to identify and sift out weak-weighted criteria; this is especially helpful for decision-makers who want to build a set of criteria for a specific problem from a large set of criteria for general purposes. With downsizing in criteria numbers, decision-makers are expected to make fewer errors in judgment, and it's easier for judgment matrices to reach consistency. Moreover, the performance information of each alternative on those weak-weighted criteria is no more necessary, which further improves the usability of AHP. It's proved that this method is feasible, convenient and robust by the numerical case provided in this paper.

Key words: analytical hierarchy process; range estimation priority; weak-weighted criterion; uncertainty; inconsistency

0 引言

自20世纪70年代萨蒂提出层次分析法(AHP)以来,层次分析法被广泛应用于各种决策问题中^[1],尤其是那些在决策过程中需要根据决策者感觉进行比较的问题,以及那些掌握信息资料并不充分,而希望依靠两两比较结果对判断做出合乎逻辑的标度的决策问题^[2]。在应用层次分析的过程中,判断矩阵往往是不一致的,如何从不一致的判断矩阵中获取各指标、方案的相对权重,以及如何应对判断矩阵的不一致性是学者们研究的重点。为了从判断矩阵中获取各决策指标或方案的权重,萨蒂提出了特征向量法(EM)。近年来,又有人提出了最小平方方法(LSM)^[3]和最小对数平方方法(LLSM)^[4],文献[5~7]等比较了这些方法。文

收稿日期:2003-11-17

资助项目:国家自然科学基金重大项目(70433003);863项目(2003AA-413033)

作者简介:高杰(1978-),男,山东蒙阴人,博士研究生。主要研究方向:生产调度、系统工程、供应链管理。E-mail: calebgao@yahoo.com;孙林岩(1955-),男,教授、博士生导师,主要研究方向:先进制造技术、人因工程、供应链管理。

献[8~10]等研究了判断矩阵中的不精确性问题,文献[11]等研究了层次分析法新元素导入的保序性问题,文献[12,13]等研究了层次分析法的标度问题.这些研究完善了层次分析法,提高了它的应用性.本文分析了弱权重指标对判断矩阵不一致性的负面影响,并提出了识别及剔除弱权重指标的原理和方法.

1 弱权重指标筛选的基本原理与步骤

1.1 弱权重指标的负面影响

在应用层次分析法的过程中,常常发现某些指标的权重很低,它们对评价目标的贡献很小,不妨把这类指标称为弱权重指标,这类指标给系统评价带来了负面影响:

首先,由于标度的限制,此类指标可能为评价带来额外的误差.假设系统目标以 C_1 、 C_2 、 C_3 三项指标来衡量,见表1.假设,指标 C_1 的重要度是指标 C_3 的10倍,指标 C_2 的重要度是指标 C_1 的2倍,那么,指标 C_2 的重要度将是指标 C_3 的20倍.如果采用1~9的判断标度,就会导致无法体现 a_{13} (指标 C_1 相对于指标 C_3 的重要度)与 a_{23} (C_2 相对于指标 C_3 的重要度)的差异,因为在此模型中, a_{13} 和 a_{23} 将均被赋值为“9”,如表1所示.很显然,由于指标 C_3 的存在和标度的限制,使得决策者不能确切地表达 a_{23} ,从而为评价带了额外的误差.

表1 判断矩阵

	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/2	9
C_2	2	1	9
C_3	1/9	1/9	1

其次,试验表明人最多只能区分 7 ± 2 个事物的相对重要程度^[2].这些弱权重指标的存在可能会使得需要相互比较的指标数目接近或超过 7 ± 2 .从而导致比较评价的复杂性超过或接近决策者的比较能力,并进一步会增加决策者们犯序数不一致错误或基数不一致错误的概率,也可能会加剧所犯错误的严重程度.

第三,指标数目越多,决策者需要进行重要性成对比较的工作量也越大.同时,判断矩阵满足一致性要求的困难也越大.因此,通过剔除弱权重指标,减少了评价指标的数目,有助于降低系统评价的工作量,更容易满足一致性要求.

此外,对于某一评价问题,识别和选择出一组完备、简洁、客观和易于度量的指标集需要决策者丰富的专业知识、经验和大量的实证研究,因此决策者在评价过程中常常借鉴该领域的一些成熟的指标集.例如,人们已经建立起了包括正确性、可靠性、易使用性、效率、可维护性和可移植性的软件质量评价的指标集,其中每一个指标又分为若干项子指标.这类指标集一般非常完备和详尽,然而,对于具体某一评价问题而言,可能只需要从中选择较为关键的数个指标就够了,因此,决策者往往需要从一组较大的指标集中选择一些关键指标作为评价问题的指标集,也即:剔除一些弱权重指标.

1.2 弱权重指标剔除的基本原理

正如前面所言,在应用层次分析法的过程中,判断矩阵往往是不一致的.判断矩阵的不一致性反映了决策者主观判断过程中的偏差和不确定性^[2].在判断过程中,与序数不一致相比人们更容易犯基数不一致的错误,因此层次分析法允许不一致性的存在^[5].May在1954年通过观察实验曾经提出一种看法,认为在各个偏好之间违反传递性并不是错误判断的结果,而是一种自然的现象.

如果对于某一不一致的成对比较判断矩阵 A ,存在未知的一致矩阵 \tilde{A} ,可以把 A 视为由 \tilde{A} 发生微小摄动而来,那么由 \tilde{A} 导出的权重向量 \tilde{w} 可以看作是 A 的理想权重向量,EM法能对这个理想权重向量给出一个近似的估计^[14].然而,由于不一致的判断矩阵 A 存在偏差和不确定性,蕴含在 A 中的权重向量只能是一个可能区间而不会是一个确定的向量,所以说,从不一致的判断矩阵中,我们只能获得对模型中各项指标权重的一个大致估计,而不会是一个没有误差的精确值.

在层次分析法中,只有对决策目标有贡献的指标才会被决策者选中作为衡量备选方案的准则.因此,就逻辑而言,每个评价指标的相对权重都不可能为零.然而,即便是采用已知的标度,人们也不能精确的估计度量值^[2],从不一致的成对比较判断矩阵中获得权重向量存在误差.因此,如果某个指标的重要程度足够小,该指标的权重就有可能被判断矩阵的误差所淹没,把此类弱权重指标包含到层次分析中并不能为评价目标带来实质的贡献.相反,正如前面所分析的,此类弱权重指标的存在反而会增大决策者在判断过程的误差,增加系统评价的工作量,因此此类弱权重指标是可以剔除的.

1.3 应用区间估计进行弱权重指标剔除的步骤

文献[15]提出了层次分析的一种区间估计方法,使用 AHP 方法,进行两两比较,建立 9 标度互反判断矩阵: $A_n = (a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij} > 0$, $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 设 λ_{\max} 为判断矩阵 A_n 的最大特征值, 当 A_n 完全一致时, $\lambda_{\max} = n$, 而当 A_n 不完全一致时, $\lambda_{\max} > n^{[2]}$. 根据成对比较的含义, 在理想状况下, $a_{ij}w_j = w_i$, 对于任意 $i = 1, \dots, n$ 成立, 即: $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \times W = nw_i$, 对于任意 $i = 1, \dots, n$ 成立. 当判断矩阵不一致时, 我们不妨把 $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \times W = \lambda_{\max} w_i$, 对于任意 $i = 1, \dots, n$ 成立, 作为判断矩阵 A_n 接受权重向量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 的前提条件, 即: $A_n W = \lambda_{\max} W$.

令 $\lambda_{\min} = A_n - \lambda_{\max} E_n$, 其中 E_n 为 n 阶单位矩阵, 进一步构成多面闭凸锥 $\lambda_{\min} W \geq 0$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

0. 又根据层次分析法的归一化原则形成约束: $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$, 因此权重 w_i 的区间估计上限和区间估计下限问题转化为 Model 1 的线性规划的最大值和最小值优化问题. 最小化优化 w_i 得到的值 w_i^{\min} 可视为 w_i 的区间估计

Model 1: max (或 min) w_i

subject to :

$$\lambda_{\min} W \geq 0,$$

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T > 0, \quad (1)$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

的下限 (w_i^L), 最大化优化 w_i 得到的值 w_i^{\max} 可视为 w_i 的区间估计的上限 (w_i^U), 数学规划如 Model 1 所示.

各指标权重的区间估计的上下限之间的差值 ($w_i^U - w_i^L$) 体现了系统偏差的大小, 我们不妨把 $w_i^U - w_i^L$ 的最大值 $\max_i (w_i^U - w_i^L)$ 作为衡量系统偏差的指标, 对于指标 C_i , 当满足 $w_i^U - w_i^L \geq \max_i (w_i^U - w_i^L)$ 时, 则认为该指标的贡献已经被系统的误差所淹没了, 该指标不会对评价带来实质性贡献. 应用层次分析的区间估计剔除弱权重指标的步骤可表示如下:

1) 区间估计. 利用层次分析的区间估计, 确定各指标权重估计的下限 w_i^L , 权重估计的上限 w_i^U , 并计算

$$\max_i (w_i^U - w_i^L);$$

2) 指标剔除. 对于任意指标 C_i , 如果满足 $w_i^U - w_i^L \geq \max_i (w_i^U - w_i^L)$, 则把 C_i 从指标集中剔除.

文献[15]已经证明:

定理 1: 若判断矩阵 A_n 满足完全一致性条件, 则 W 的区间估计下限 (W^L)、区间估计上限 (W^U) 以及 EM 法计算的权重 (W^{EM}), 满足: $W^L = W^{EM} = W^U$.

因此, 当判断矩阵 A_n 满足完全一致性条件时, $\lambda_{\max} = n$. 在层次分析中, 任何指标的权重小于“0”是没有意义的; 而如果某项指标的权重等于“0”, 这意味着, 其它指标相对于该指标的重要程度为无穷大, 这与两两比较判断矩阵中任意两项指标的相对重要程度为 1~9 的整数相矛盾. 通过 Model 1, 可以容易地证明, 对于任意判断矩阵 A_n , 其区间估计的上、下限满足: $w_i^U > 0$, $w_i^L > 0$. 故当 A_n 完全一致时, $w_i^U - w_i^L = 0$ 不可能成立. 因此, 可得到如下推论:

推论 1: 若某指标集的判断矩阵 A_n 满足完全一致性条件, 那么该指标集中的每一项指标都不能被剔除.

由此可见, 弱权重指标是否会被剔除一方面取决于该指标对评价目标的重要程度, 越重要, 被剔除的可能性越小, 反之越大; 另一方面取决于判断矩阵的一致性, 一致性越高, 被剔除的可能性越小, 反之越大.

2 算例

某评价问题中, 在总目标下有五项指标: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , 判断矩阵如表 2. 把判断矩阵输入 AHP 分析软件 Expert Choice 可以得到特征向量法下各指标的相对权重, 如表 2. 运用层次分析的区间估计, 建立估计各指标取值范围的线性规划模型, 运行 LINGO 8.0, 可得到各指标权重的取值上下限, 如表 2.

表2 各指标 EM 权重及区间估计

		C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	
判断矩阵	C ₁	1	3	6	9	8	C. R. = 0.32 max = 6.4336 max = 0.0824
	C ₂		1	8	9	8	
	C ₃			1	9	8	
	C ₄				1	7	
	C ₅					1	
区间估计法	下限 (w^L)	0.4379	0.3017	0.1178	0.0420	0.0176	
	上限 (w^U)	0.5203	0.3847	0.1490	0.0531	0.0229	
	σ	0.0824	0.083	0.0312	0.0111	0.0053	
特征向量法	EM 权重	0.452	0.341	0.135	0.048	0.022	
权重上限是否大于 \max		是	是	是	否	否	

由于决策者在判断中的误差和不一致性,指标权重与判断矩阵之间不应视为一种确切的函数依赖关系,而应当从概率和不确定性的角度看待这种相关关系.文献[6]表明 EM 法是对待不一致性并从不一致的数据中获得排序的唯一方法,因此从不确定性的角度出发,在判断矩阵不一致的情况下,EM 法为权重向量提供了最优的点估计.而在层次分析的区间估计中,我们倾向于把判断矩阵视为自由选择指标权重过程中的一种不确定性约束.从上表中可知:虽然可以把 $w_1^{EM} = 0.452$ 作为对 C_1 权重的最优点估计,然而从层次分析的区间估计的角度来看,任意 $w_1 \in [w_1^L, w_1^U]$ (即: $w_1 \in [0.4379, 0.5203]$) 作为 C_1 权重的取值都是可以接受的, w_1 可以在一个跨度为 $\max = 0.0824$ 的区间内摄动.对于权重的区间估计上限分别为 $w_4^U = 0.0531$ 和 $w_5^U = 0.0229$ 的指标 C_4 、 C_5 而言,它们对评价目标的贡献已经完全被权重 w_1 的可能偏差所完全淹没了.因此,这两个指标可以从指标集中剔除.

值得注意的是,在该算例中,判断矩阵并不满足传统 AHP 分析所要求的不一致性比率 $C. R. < 0.1$.降低由于指标数目过多而导致的误差和不确定性是该指标剔除方法的目的,如果在当前的指标数目下,判断矩阵能满足 $C. R. < 0.1$ 的要求,那么就没有必要剔除指标了.只有当不满足 $C. R. > 0.1$ 时,才需要剔除指标,因此,该方法并不要求 $C. R. < 0.1$.作者曾经做过的大量试验表明:如果采用 9 标度判断矩阵,当 $C. R. < 0.1$ 时,各指标权重只能在一个很微小的区间内摄动,尚没有发现需要剔除指标的案例.这或许表明,当决策者有能力精确判断各指标的相对权重而没有必要剔除指标时,该方法不会犯剔除指标的错误.

3 结论

面对决策者在应用层次分析法过程中的难以避免的错误和偏差,以及由此导致的判断矩阵的不一致性.本文指出:指标权重与判断矩阵之间不应视为一种确切的函数依赖关系,而应当从不确定性的角度来看待这种相关关系.基于这一观点,本文分析了剔除弱权重指标的必要性,阐述了利用层次分析区间估计的方法剔除弱权重指标的基本思想,并提出了剔除弱权重指标的方法和一般步骤.借助该方法,决策者可以识别和剔出弱权重指标,通过借鉴一般的评价指标集建立具体评价问题的指标集,提高权重比较的精确度,决策者也不再需要收集各方案在那些弱权重上的表现信息.算例表明该方法是简便可行的.

参考文献:

- [1] Sekitani K, Yamaki N. A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP[J]. Journal of the Operations Research Japan Society, 1999, 42(2): 219 - 232.
- [2] T.L. Saaty. 层次分析法[M]. 许树柏译.北京:煤炭工业出版社,1988.
Saaty T.L. Analytical Hierarchy Process[M]. Translated by Shubai Xu. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1988.

- [3] Crawford G,William C A. A note on the analysis of subjective judgment matrices[J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 1985, (29): 387 - 405.
- [4] Cogger K O, Yu P L. Eigen weight vectors and least distance approximation for revealed preference in pairwise weight ratio [J]. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1985, 46: 483 - 491.
- [5] Saaty T L. Decision-making with the AHP, Why is the principal eigenvector necessary [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 145: 85 - 91.
- [6] Saaty T L. Ranking by eigenvector versus other methods in analytic hierarchy process [J]. *Applied Mathematics Letters*, 1998, (11): 121 - 125.
- [7] Saaty T L, Vargas L G. Comparison of eigenvalue, logarithmic least square and least square methods in estimating ratio [J]. *Journal of Mathematical Modeling*, 1984, (5): 309 - 324.
- [8] Lipovetsky S, Conklin W M. Decision aiding robust estimation of priority in AHP [J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 137: 110 - 122.
- [9] Saaty T L. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process* [M]. Pittsburgh PA: RWS Publications, 1994.
- [10] Saaty T L. *Decision Making with Dependence and Feedback: the Analytic Network Process* [M]. Pittsburgh PA: RWS Publications, 1996.
- [11] 孙疆明. AHP 中新元素导入的保序性[J]. *系统工程理论与实践*, 1999, 19(4): 136 - 140.
Sun Jiangming. Istonicity of leading new element in AHP [J]. *Systems Engineering Theory & Practice*, 1999, 19(4): 136 - 140.
- [12] 何鲲. 层次分析法的标度研究[J]. *系统工程理论与实践*, 1997, 17(6): 58 - 62.
He Kun. A Study on the scale of analytic hierarchy process [J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 1997, 17(6): 58 - 62.
- [13] 许泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, 20(7): 58 - 62.
Xu Zeshui. A simulation-based evaluation of several scales in the analytic hierarchy process [J]. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2000, 20(7): 58 - 62.
- [14] Takayama I. Problem in AHP and ANP [J]. *Communications of the Operations Research Society of Japan*, 1998, 43: 100 - 104.
- [15] 高杰, 孙林岩, 等. 层次分析的区间估计[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(3): 103 - 106.
Gao Jie, Linyan Sun. A range estimation on priority vectors in AHP [J]. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2004, 24(3): 103 - 106.