第31卷 第6期 昆明理工大学学报(理工版) Vol. 31 No. 6
2006年12月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Dec. 2006

奇异半线性发展方程组解的 Blow-up 问题

郭高荣,平翠萍,杨凤藻
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要:讨论奇异半线性发展方程组解的 Blow-up 问题时,通常先对解进行估计,然后讨论在一定条件下解的 Blow-up. 论文继续用这种方法讨论奇异半线性发展方程组解的 Blow-up 问题,得到一定条件下解会 Blow-up.

关键词:奇异;半线性;Blow-up 问题
中图分类号:O175.29 **文献标识码**:A **文章编号**:1007-855X(2006)06-0122-03

Blow-Up Problem for a Semilinear Reaction-Diffusion System with Singular Cofficient

GUO Gao-rong, PING Cui-ping, YANG Feng-zao
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Thechnology, Kunming 650093, China)

Abstract: When a discussion is made on the blow-up problem for a semilinear development equation with singular cofficient, the solution is usually estimated, then the conditions for the blow-up problem are presented. The above mentioned ways are used to discuss a semilinear development equation system with singular cofficient and the solutions will blow up under some conditions.

Key words: singular; semilinear; blow-up problem

0 引 言

20世纪90年代至今奇异半线性热方程[1~4]和半线性发展方程组[5]都有不少研究,文献[1]最先在 Banach 空间中讨论了如下问题:

$$\begin{cases} t^{\sigma}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+Au=h(t,u),0<t\leq T \\ \lim\limits_{t\to 0^+}u(t)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\sigma\geq 1$. $(-A)$ 是某连续半群的无穷小生成元. 在 $h(t,u)$ 关于 u 满足全局 Lipschitz 条件等假设之下获得了问题(1)的整体解的存在性. 以后文献[2~4]分别讨论了 σ 在不同情况下局部解的的存在性,整体解的存在性和爆破性问题。但对奇异半线性发展方程组的研究几乎不曾见到。

1 结 论

本文讨论如下问题:

$$\begin{cases} u_t-\dfrac{1}{t}\triangle u=v^p \qquad t>0,x\in R^N & (2) \\ v_t-\dfrac{1}{t}\triangle v=u^q \qquad t>0,x\in R^N & (3) \end{cases}$$

收稿日期:2006-01-19.
第一作者简介:郭高荣(1978~),女,在读硕士研究生. 主要研究方向:偏微分方程.
E-mail:guobei1978865@vip.shou.com&ggr78@163.com

当 $t=0$ 时,$\begin{cases} u(0,x)=u_0(x) & x\in R^N \quad (4) \\ v(0,x)=v_0(x) & x\in R^N \quad (5) \end{cases}$

其中,$u_0(x)$,$v_0(x)$是非负连续有界函数。$\triangle$是 n 维 laplace 算子。

若记 $e^{t\triangle}\varphi=\int_{R^N}G_t(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y$,其中 $G_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\exp(-\frac{x^2}{4t})$,则与(2)~(5)式相应的积分方程为:

$$\begin{cases} u(t,x) = e^{(ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle}u_\circ+\int_0^t e^{(ln\frac{t}{s})\triangle}v^p(s,x)\mathrm{d}s & (6) \\ v(t,x) = e^{ln\frac{t}{\varepsilon}\triangle}v_\circ+\int_0^t e^{(ln\frac{t}{s})\triangle}u^q(s,x)\mathrm{d}s & (7) \end{cases}$$

为书写方便,有时把 $u(t,x)$记为 $u(t)$或 u,$v(t,x)$类似.

定理 1　设 $1<p<q,\frac{q+1}{pq-1}\geq\frac{N}{2}$　(8)

则(2)~(5)式的非平凡解在有限时间内爆破.

2 定理的证明

引理 1[5]　设 $1<p<q$,(u,v)是(2)~(5)式在区域 $S_T=(0,T)\times R^N$ 中的解,$0<T<+\infty$,则存在一正常数 c(c 只与 p,q 有关),使得对 $\forall t\in(0,T)$必有:

$$t^{\frac{q+1}{pq-1}}\left\| e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle}v_0\right\|_\infty\leq c<+\infty \tag{9}$$

引理 2[5]　设 $1<p<q$,(u,v)是 (2)~(5)式在区域 $S_T=(0,T)\times R^N$ 中的解,$0<T<+\infty$,则存在一正常数 c(c 只与 p,q 有关),使得对 $\forall t\in(0,T)$必有:

$$t^{\frac{q+1}{pq-1}}\left\| e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle}v(t)\right\|_\infty\leq c<+\infty \tag{10}$$

定理 1 的证明.

证明:反证法。下文中的 c_1-c_6 均为大于 0 的常数。设(8)式成立,$(u_0,v_0)\neq(0,0)$,(2)~(5)式的非平凡解在任何区域 $S_T=(0,T)\times R^N$ 中有界,$v_0\geq c_1\exp(-a|x|^2)$[1]　(11)

其中,$a>0$. 又由(7)式 $v(t)\geq e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle}v_0\geq c_1(1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}}e^{\left(-\frac{a|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}\right)}$　(12)

结合(11)与(12)及 Jensen 不等式得:

$$u(t,x)\geq c_1{}^p\int_0^t(1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{Np}{2}}e^{(\ln\frac{t}{s})\triangle}e^{\left(-\frac{ap|x|^2}{1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}}\right)}\mathrm{d}s$$

$$\geq c_1{}^p\int_0^t(1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}(p-1)}(1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4ap\ln\frac{t}{s})^{-\frac{N}{2}}e^{\left(-\frac{\alpha p|x|^2}{1+4\alpha\ln\frac{s}{\varepsilon}+4\alpha p\ln\frac{t}{s}}\right)}\mathrm{d}s$$

令 $f(s)=1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4ap\ln\frac{t}{s}$,则 $f'(s)=\frac{4a}{s}(1-p)<0$,由 $\varepsilon<s<t$ 得:

$1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}<1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4ap\ln\frac{t}{s}<1+4ap\ln\frac{t}{\varepsilon}$,故有:

$$u(t,x)\geq c_1{}^p(1+4ap\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}}e^{\left(-\frac{ap|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}\right)}\int_0^t(1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon})^{\frac{N}{2}(p-1)}\mathrm{d}s$$

$$\geq c_2(1+4ap\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}}e^{\left(-\frac{ap|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}\right)}(4at)^{\frac{1-N}{2}(p-1)}$$

$$v(t,x) \geq c_2{}^q \int_0^t (1+4ap\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{Nq}{2}} (4as)^{q[1-\frac{N}{2}(p-1)]} e^{(\ln\frac{t}{s})\triangle} e^{\left(-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}}\right)} ds$$

$$= c_2{}^q \int_0^t (1+4ap\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{Nq}{2}} (1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon})^{\frac{N}{2}} (4as)^{q[1-\frac{N}{2}(p-1)]} (1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{s}}} ds$$

又 $p>1$ 时,$(1+4ap\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{Nq}{2}} > p^{-\frac{Nq}{2}}(1+4ap\ln\frac{s}{\varepsilon})^{-\frac{Nq}{2}}$,当 $s>\frac{1}{4a}$ 时,$4as>\frac{1}{2}(1+4as)$ 故:

$$v(t,x) \geq c_3 \int_{\frac{1}{4a}}^1 (1+4as)^{\lambda} (1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{s}}} ds$$

其中,$\lambda = q[1-\frac{N}{2}(p-1)] - \frac{N}{2}(q-1)$,由(8)式知:$\lambda \geq -1$

令 $g(s) = 1+4a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{s}$,则 $g'(s) = \frac{4a}{s}(1-pq) < 0$,由 $\varepsilon < s < t$ 得:

$1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon} < 1+a\ln\frac{s}{\varepsilon}+4apq\ln\frac{t}{s} < 1+4apq\ln\frac{t}{\varepsilon}$,故

$$v(t,x) \geq c_3 (1+4apq\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}} \int_{\frac{1}{4a}}^t (1+4as)^{-1} ds$$

又因为$(1+4apq\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} \geq (pq)^{-\frac{N}{2}}(1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}}$,所以有:

$$v(t,x) \geq c_4 (1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}} \int_{\frac{1}{4a}}^t (1+4as)^{-1} ds$$

$$\geq c_5 (1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}} \ln\frac{1+4at}{2}$$

当 $t>\frac{1}{4a}$ 时,$e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle} v(t,x) \geq c_5 (1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} \ln\frac{1+4at}{2} e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon}}}$

$$\geq c_5 \ln\frac{1+4at}{2} (1+4a(pq+1)\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a(pq+1)\ln\frac{t}{\varepsilon}}}$$

$$\geq c_6 \ln\frac{1+4at}{2} (1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{apq|x|^2}{1+4a(pq+1)\ln\frac{t}{\varepsilon}}}$$

$(1+4a\ln\frac{t}{\varepsilon})^{\frac{N}{2}} e^{\ln\frac{t}{\varepsilon}\triangle} v(t,0) \geq c_6 \ln\frac{1+4at}{2}$,当 $t > \max\left\{\frac{1}{4a}, \varepsilon e^{\frac{1}{4a}}\right\}$时,有:

$t^{\frac{q+1}{pq-1}} e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle} v(t,0) \geq t^{\frac{N}{2}} e^{(\ln\frac{t}{\varepsilon})\triangle} v(t,0) \geq c_6 \ln\frac{1+4at}{2}$,这与(10)式矛盾!即(2)~(5)式的解会在有限时间内爆破.

参考文献:

[1] 蹇素雯,罗华硅.一类半线性奇异发展偏微分方程的整体解[J].武汉大学学报,1994,3:13-20.

[2] 蹇素雯,杨凤藻.奇异半线性抛物方程初值问题解的存在性与不存在性 Blow-up 问题及解的无限增长性[J].数学物理学报,1997,17(4):439-446.

[3] 蹇素雯,杨凤藻.一类奇异半线性热方程初值问题解的唯一性结果[J].数学学报,2000,43(2):301-308.

[4] 蹇素雯,杨凤藻,林谦.奇异半线性热方程初值问题解的存在性与 Blow-up 问题[J].数学学报,1998,41(6).

[5] ESCOBZEDO M,HERRERO M A. Boundedness and Blow Up for a Semilinear Reaction-Diffusion System[J]. Journal of Differential Equations,1991,89:176-202.

第31卷终　　The End of Vol. 31