

文章编号:1000-6788(2006)04-0085-05

Markov 跳变系统输出峰值控制

刘飞,蔡胤

(江南大学自动化研究所,江苏 无锡 214122)

摘要: 针对具有时间演化和事件驱动两类动态机制的 Markov 线性跳变系统,研究其被控输出的峰值控制问题,当系统外部输入能量有界时,保证系统输出的峰值在给定的上限内.从工程实现的角度,利用随机稳定性分析,以一种次优的峰值指标代替最优性能,反馈控制器的构造依赖于系统模态,可直接利用耦合线性矩阵不等式求解.仿真示例对结果进行了验证,并对比讨论了应用鲁棒控制思想的控制器设计情形,说明模态跳变转移信息对系统指标与控制的影响.

关键词: Markov 线性跳变系统; 随机稳定性; 峰值指标; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Output Peak Performance Control of Markov Jump Systems

LIU Fei, CAI Yin

(Institute of Automation, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

Abstract: For Markov linear jump systems which involve both time-evolving and event-driven mechanisms, the peak index of controlled output is discussed. While the energy of external input signals is bounded, the peak of controlled output signals is restricted under a selected level. From the view of engineering practice, applying stochastic stability analysis, a suboptimal peak index is adopted instead of the optimal performance. The mode-dependent controller are then obtained in terms of a set of solutions of coupled linear matrix inequalities(LMI). Simulation examples illustrate the results. Compared with the design along the robust methods, the performance and control of jump systems are influenced by transition probability.

Key words: Markov linear jump system; stochastic stability; peak index; LMI

1 引言

马尔可夫(Markov)跳变系统是复杂系统建模与控制研究中一个新领域,它的提出,具有很强的工程背景,现代社会中大量工程系统,比如制造系统、生化系统、电力系统等,甚至包括经济系统,均可从中抽象出时间演化和事件驱动两类动态机制,其特点是运行过程中常常遭受环境的突然变化、人为干预、大系统内部各子系统间联结方式的改变、工作范围的变化以及系统部件的损坏等随机突变影响. Markov 跳变系统作为混杂动态系统的一种特殊形式,建模动态包含两种形式,一种为模态,由连续时间离散状态的 Markov 过程描述,另一种为状态,由每一模态下的状态空间方程描述,这样对基于模型的控制理论提出新的要求.国际上对 Markov 跳变系统的研究较为活跃,在系统稳定性方面取得了一定成果^[1,2],近年来其 H 控制问题也引起相当兴趣^[3,4].但 H 作为一种有界输入/输出的指标,是以被控输出的能量来衡量系统性能,而很多实际工程问题,要求在外输入为有界能量条件下,使系统被控输出最小,或保证其峰值小于一定的上限,这类命题具有一定的普遍意义,我们已经对跳变系统峰值滤波进行了初步讨论^[5],本文研究其输出峰值控制综合问题,利用随机稳定性分析,以一种次优的峰值指标代替最优性能,反馈控制器的构造依赖于系统模态,可直接利用耦合线性矩阵不等式求解,类似还可处理系统输出饱和和约束等控制工程问题.

收稿日期:2004-12-23

资助项目:国家自然科学基金(60574001)

作者简介:刘飞(1965-),男(汉),安徽宣城人,教授,博士,研究领域为先进控制理论及应用,工业系统监控与诊断.

2 问题分析

考虑如下 Markov 线性跳变系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r_t)x(t) + B_1(r_t)w(t) + B_2(r_t)u(t) \\ z(t) = C(r_t)x(t) + D(r_t)u(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$x(t) = x_0, r_t = r_0, t = 0$$

其中, r_t 是系统的模态, $x(t) \in R^n$ 是系统的状态向量, $u(t) \in R^m$ 是控制输入向量, $z(t) \in R^p$ 是被控输出向量, $w(t) \in L_2^q[0, \infty)$ 为平方可积的外部输入向量, $A(r_t), B_1(r_t), B_2(r_t), C(r_t), D(r_t)$ 是与模态 r_t 有关的适当维数的矩阵, 而 r_t 是随时间 t 在有限集合 $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值的 Markov 过程, 其跳变转移率矩阵为 $\lambda = [\lambda_{ij}]$, $i, j \in \mathcal{R}$, 其中跳变概率定义为

$$\Pr\{r_{t+dt} = j \mid r_t = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}dt + o(dt), & i \neq j, \\ 1 + \lambda_{ii}dt + o(dt), & i = j, \end{cases} \quad (2)$$

式中, $dt > 0$, 并当 $dt \rightarrow 0$ 时 $o(dt)/dt \rightarrow 0$, λ_{ij} 是从模态 i 跳变到模态 j 的转移率, 当 $i = j$ 时 $\lambda_{ij} \leq 0$, 并有 $\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = -\lambda_{ii}$. 一般, 当 $r_t = i$ 时, 分别用 $A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_i$ 代表 $A(r_t), B_1(r_t), B_2(r_t), C(r_t), D(r_t)$.

对于跳变系统(1), 如果对于所有初始状态 x_0 和模态 r_0 , 有

$$\lim_T \int_0^T E \left\{ \|x(t, x_0, r_0)\|^2 \mid x_0, r_0 \right\} dt < \infty.$$

则称系统是随机稳定. 文献[2]已证明系统随机稳定意味着几乎渐近稳定, 由文献[1]可知线性跳变系统(1)随机稳定当且仅当存在一组正定对称矩阵 $P_i, i \in \mathcal{R}$, 使得

$$A_i^T P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0.$$

Markov 线性跳变系统(1)的输出峰值控制问题可表述为: 分析能量有界输入信号 w 对输出 z 的幅值的影响, 研究通过反馈使得系统被控输出的幅值的最大值限定在给定范围内. 事实上, 对于任意能量有界的输入, 所谓峰值性能是以输出的峰值指标作为控制系统对外部干扰衰减的一种度量. 对线性时不变系统, 峰值性能在数学上的严格定义, 是一个从 $L_2[0, \infty)$ 到 $L_\infty[0, \infty)$ 的有界算子^[6], 也可称广义 H_2 指标, 其诱导范数为

$$\sqrt{f_{\max} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{zw}(j\omega) G_{zw}^*(j\omega) d\omega \right]},$$

其中 G_{zw} 为系统输入 w 到输出 z 的传递函数, $f_{\max}(\cdot)$ 表示一种取最大值运算, 因函数 $f_{\max}(\cdot)$ 不可微, 一般来讲, 即使对线性时不变系统, 实现最优峰值也极其困难, 实际工程问题中, 一般不采用严格定义, 次优的峰值性能更为现实^[7]. 具体地, 在时域中定义跳变系统广义 H_2 范数(峰值性能): 初始模态 r_0 及零初始状态 $x_0 = 0$ 下, 对于任意时间 $T > 0$, 当系统外部输入

$$w(t) \in L_2[0, T] \text{ 时, 系统输出的最大幅值}$$

$$J = \sup \{ \|z(T)\| \}. \quad (3)$$

这里并未采用诱导 L_∞ 范数, $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数.

3 主要结果

根据上节定义, 可以在 Markov 跳变系统随机稳定性分析的基础上^[1,3], 研究跳变系统输出峰值性能分析问题, 进而进行控制作用综合. 首先在空间 $\{R^n \times \mathcal{R} \times R_+\}$ 上, 引入随机 Lyapunov 函数 $V(x(t), r_t = i, t > 0) = V(x, i)$, 定义其弱无穷小算子运算为

$$AV(x, i) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [E\{V(x(t+dt), r_{t+dt}) \mid x(t), r_t = i\} - V(x(t), r_t = i)]. \quad (4)$$

在 $0 \leq t \leq T$ 区间上对上式积分, 有

$$E \left\{ \int_0^T AV(x, i) dt \right\} = E\{V(x(t), i)\} - V(x_0, r_0). \quad (5)$$

令系统 (1) 控制输入为零, 下面定理给出了跳变系统峰值性能分析的一个充分性条件.

定理 1 给定任一常数 $\gamma > 0$, Markov 跳变系统 (1) 满足 $\sup\{E\|z(T)\|\} < \gamma$, 如果存在正定对称矩阵 $P_i, i \in \mathcal{I}$, 使得

$$A_i + P_i B_{1i} B_{1i}^T P_i < 0, \tag{6}$$

$$P_i - \gamma^{-2} C_i^T C_i > 0. \tag{7}$$

证明 设正定对称矩阵 $P_i \in R^{n \times n}$, 对跳变系统 (1), 取 $V(x, i) = x^T P_i x$, 根据式 (4), 此时

$$AV(x, i) = x^T A_i x + w^T B_{1i}^T P_i x + x^T P_i B_{1i} w.$$

考虑下列不等式

$$AV(x, i) - w^T w < 0. \tag{8}$$

对于非零 x 和 w , 结合矩阵 Schur 补, 上式 (8) 可由下列矩阵不等式 (9) 保证

$$\begin{bmatrix} A_i & P_i B_{1i} \\ B_{1i}^T P_i & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

不难发现, 在式 (8) 中, 若不考虑外部输入, 令 $w = 0$, 则有 $AV(x, i) < 0$, 式 (9) 变为 $A_i < 0$, 即前述的跳变系统随机稳定性条件. 进一步, 在零初始条件时, $x_0 = 0, r_0 = i$, 给定任意 $T > 0$, 在 $[0, T]$ 区间上对式 (8) 积分, 结合式 (5), 得

$$E \left\{ \int_0^T AV(x, i) dt \right\} = E\{V(x(T), i)\} - V(x_0, r_0) = E\{V(x(T), i)\} - \int_0^T w^T w dt. \tag{10}$$

考虑条件式 (7), 对于 $T > 0$ 有下列关系成立

$$E\{z^T(T) z(T)\} < \gamma^2 E\{x^T(T) P_i x(T)\} = \gamma^2 E\{V(x(T), i)\} < \gamma^2 \int_0^T w^T w dt < \gamma^2.$$

即 $\sup\{E\|z(T)\|\} < \gamma$, 证明完成.

上述结果不难看出, 若跳变系统 (1) 不含 Markov 模态 ($i \notin \mathcal{I}$), 定理 1 即退化为时不变线性系统的结果^[7]. 下面定理 2 讨论跳变系统的控制问题, 一般假设 t 时刻的模态 $r_t = i$ 是可获得的, 与时不变系统相比, 跳变系统反馈控制器依赖于模态进行切换, 各模态下控制器是线性的, 为方便求解, 控制器综合采用线性矩阵不等式技术.

定理 2 存在一组反馈控制器的集合 $\{u = K_i x \mid K_i = Y_i X_i^{-1}, i \in \mathcal{I}\}$, 使得跳变系统 (1) 满足输出峰值性能指标 γ , 其中对称矩阵 $0 < X_i \in R^{n \times n}$ 和矩阵 $Y_i \in R^{m \times n}$ 为下列耦合线性矩阵不等式 (LMI) 的可行解

$$\begin{bmatrix} L(X_i) & B_{1i} & M(X_i) \\ B_{1i}^T & -I & 0 \\ M^T(X_i) & 0 & N(X_1, \dots, X_N) \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} X_i & X_i C_i^T + Y_i^T D_i^T \\ C_i X_i + D_i Y_i & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{12}$$

式中

$$\begin{aligned} L(X_i) &= X_i A_i^T + A_i X_i + B_{2i} Y_i + Y_i^T B_{2i}^T + \sum_{j \in \mathcal{I}} \lambda_{ij} X_j \\ M(X_i) &= [\sqrt{\lambda_{i1}} X_i \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_{i(i-1)}} X_i \quad \sqrt{\lambda_{i(i+1)}} X_i \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_{iN}} X_i] \\ N(X_1, \dots, X_N) &= -\text{diag}\{X_1 \quad \dots \quad X_{i-1} \quad X_{i+1} \quad \dots \quad X_N\} \end{aligned}$$

证明 不失一般性, 跳变系统 (1) 的模态 $r_t = i$ 时, 反馈控制器 $u = K_i x$, 相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_i + B_{2i} K_i) x + B_{1i} w \\ z = (C_i + D_i K_i) x \end{cases} \tag{13}$$

设存在正定对称矩阵 $P_i, i \in \mathcal{I}$, 使跳变系统 (13) 满足 $\sup\{E\|z(T)\|\} < \gamma$, 即矩阵不等式 (6) 和 (7) 有可行解, 根据定理 1, 不等式 (6) 等价如下式

$$\begin{bmatrix} H(P_1, \dots, P_N) & P_i B_{1i} \\ B_{1i}^T P_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中

$$H(P_1, \dots, P_N) = (A_i + B_{2i} K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_{2i} K_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j.$$

不等式(7)等价于

$$\begin{bmatrix} P_i & C_i^T + K_i^T D_i^T \\ C_i + D_i K_i & -I \end{bmatrix} > 0. \quad (15)$$

式(14)和(15)前后同乘 P_i^{-1} , 并令 $P_i^{-1} = X_i, Y_i = K_i X_i$, 反复应用矩阵补, 即可得到式(11)和(12). 证毕.

4 仿真示例及讨论

以二阶跳变系统为例, 其各模态下动态描述为

模态 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 0.2w + 2u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 0.5x_2 + 0.1w + u. \\ z = x_1 + x_2 + 1.5u \end{cases}$$

模态 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - 0.1w + u. \\ z = 0.5x_1 + 1u \end{cases}$$

模态 3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 0.2w + u \\ \dot{x}_2 = x_2 + 1.5u \\ z = 0.5x_1 + u \end{cases}$$

反映各模态间转移率的跳变转移率矩阵为

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{bmatrix},$$

设峰值性能指标 $\gamma = 0.5$, 应用定理 2 得跳变系统反馈控制器 $u = K_i x, i \in \{1, 2, 3\}$, 其中

$$K_1 = [-0.6796 \quad -0.6508], K_2 = [-0.8841 \quad 1.1097], K_3 = [0.5273 \quad -1.2555].$$

假设外部干扰 $w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 10\text{sec} \\ 0, & t \geq 10\text{sec} \end{cases}$, 令系统初始状态 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, u(0) = 0$, 系统仿真结果见图 1.

图 1.

Markov 线性跳变系统本质上是时变线性系统, 从鲁棒控制的角度思考, 若存在一反馈控制器能同时镇定各模态下的状态, 并满足峰值性能要求, 同样可实现对跳变系统的控制, 此时控制器 $u = YX^{-1}x$, 其中 X, Y 同时满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} XA_i^T + A_i X + B_{2i} Y + Y^T B_{2i}^T & B_{1i} \\ B_{1i}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} X & XC_i^T + Y^T D_i^T \\ C_i X + D_i Y & -I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

以上述二阶系统为例, 同时镇定并满足峰值性能指标 $\gamma = 0.5$ 的控制器为

$$K = [-1.1350 \quad -0.4857].$$

直观地, 这种同时镇定控制器忽略了跳变系统内在的动态机制, 未充分利用模式跳变转移的概率信息, 故定理 2 的结果更好. 上述二阶系统例子中, 若要求 $\gamma = 0.2$, 由定理 2 仍可求得相应的一组控制器, 而式 (16) 和 (17) 无解, 事实上, 计算 $\min_{X, Y}$, s. t. (16) 和 (17), 同时镇定控制器只能实现 $\gamma_{\min} = 0.2299$, 而优化 \min_{X_i, Y_i} s. t. (11) 和 (12), 最小的 γ_{\min} 可以达到 2.3×10^{-6} .

5 结论

对于含两类动态机制的 Markov 跳变系统, 在随机稳定性分析基础上, 给出峰值性能分析与综合结果, 数值示例说明其有效性, 并直观显示了模式跳变转移的概率信息对系统性能与控制的影响. 采用线性矩阵不等式技术, 控制器设计简便易解. 本文结果可以进一步推广至各模式系数矩阵含不确定性时, Markov 跳变系统的鲁棒性能问题.

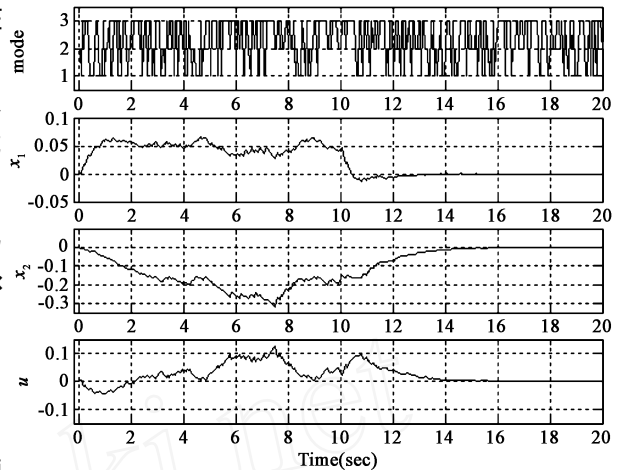


图 1 系统模式、状态及控制量

参考文献:

- [1] Ji Y, Chizeck HJ. Controllability, stability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control [J]. IEEE Trans Autom Contr, 1990, 35(7): 777 - 788.
- [2] Feng X, Loparo K A, Ji Y, Chizeck HJ. Stochastic stability properties of jump linear systems [J]. IEEE Trans Autom Contr, 1992, 37(1): 38 - 53.
- [3] Farias D P, Geromel J C, do Val J B R, Costa O L V. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time [J]. IEEE Trans Autom Contr, 2000, 45(5): 944 - 949.
- [4] Gao J, Huang B, Wang Z. LMF based robust H_∞ control of uncertain linear jump systems with time-delay [J]. Automatica, 2001, 37: 1141 - 1146.
- [5] Liu F. Energy-to-peak filtering for Markov jump systems [A]. IEEE Proc. Amer. Contr. Conf. [C]. USA: 2004. 5414 - 5415.
- [6] Rotea M A. The generalized H_2 control problem [J]. Automatica, 1993, 29(2): 373 - 385.
- [7] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization [J]. IEEE Trans Autom Contr, 1997, 42(7): 896 - 911.