线性时变广义系统的能控性与能观性问题

张雪峰 [1] 张庆灵 [1]

摘 要 讨论了线性时变系统和线性时变广义系统的两个基本问题, 得到了两种判定时变系统能控性与能观性的必要条件, 该判定条件只依赖于系统矩阵 $A(t)$ 和输入矩阵 $B(t)$, 不必计算系统的系统状态转移矩阵, 使得判别时变系统能控性与能观性易于实现. 说明了本文结论是线性定常系统相应结论的自然扩展. 对进一步深入研究时变系统和时变广义系统具有实际启发作用.

关键词 时变系统, 广义系统, 能控性, 状态转移矩阵
中图分类号 TP18

On Controllability and Observability of Linear Time-varying Singular Systems

ZHANG Xue-Feng[1] ZHANG Qing-Ling[1]

Abstract Two basic issues of time-varying systems and time-varying singular systems are discussed. Two necessary conditions to judge the controllability and observability of time-varying systems and time-varying singular systems are obtained. The conditions only depend on the system matrix and input matrix, without introducing and calculating system state transition matrix. It is easy to judge the controllability and observability of time-varying systems and time-varying singular systems. The result extends the corresponding conclusion of linear time invariant systems. The paper may practically enlighten the research on time-varying systems.

Key words Time-varying systems, singular systems, controllability, state transition matrix

在很多情况下, 当控制目标为在一段有限时间内将系统由一个状态转移到另一个状态时, 其控制律的存在性, 即问题的可解性是系统设计者首先关心的问题. 自从维纳提出控制论和卡尔曼提出系统的能控性和能观性的概念以后, 系统的能控性和能稳定性就成为线性系统理论中最基本的概念, 线性定常系统经过 60 多年的发展, 系统能控性、能观性等基本问题已经有相当成熟的结论[1−7]. 能控性问题在系统控制理论中占有重要的地位, 近几年仍然吸引了许多学者的关注[8−17]. 文献 [2−3, 6−7] 研究了时变周期系统的能控性, 文献 [8−9] 研究了时变区间系统的能控性, 文献 [10−12] 研究了非线性系统的能控性, 文献 [13] 研究了多变量控制系统的能控性, 文献 [14] 研究了网络控制系统的能控性, 文献 [5−6, 15] 研究了广义系统的能控性, 文献 [16−17] 研究了时变切换系统的能控性. 但尚欠缺适用一般时变系统和广义时变系统的能控性的通用性结论. 时变系统是一类重要而又研究较少的系统. 对时变系统来说, 由于系统矩阵的特征值与系统的能控性, 能观性判别没有可直接使用的结论, 因此在研究时变系统时, 纯代数方法较少. 到目前为止, 没有利用特征多项式或矩阵代数方程判别系统能控和能观性的判据. 时变系统的能控性和能观性在理论上有一些基本结论, 但这些结果往往依赖于系统的状态转移矩阵, 由于状态转移矩阵计算十分困难和繁杂, 因而并不适用于实际应用. 本文对时变系统进行了讨论, 利用文献 [1] 的思想, 扩展了文献 [1] 中利用矩阵方程判别定常系统能控和能观性等价条件的方法, 扩展了与定常系统的结论, 得到了时变系统能控性的两个必要条件. 并对广义系统进行了讨论, 得到了时变广义系统能控性的两个必要条件.

收稿日期 2008-06-05 收修改稿日期 2009-01-10
Received June 5, 2008; in revised form January 10, 2009
国家自然科学基金 (60774097, 60574011) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60774097, 60574011)
1. 东北大学系统科学研究所 沈阳 110004
1. Institute of System Science, Northeastern University, Shenyang 110004
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01249

1 时变系统的能控性

在线性定常系统的分析与设计中, 许多结果是针对能控和能观性进行讨论的[1−7]. 系统能控和能观性的几种代数判别条件主要有引理 1 和引理 2. 线性时变系统是一类重要而特殊的时变系统, 引起许多学者的关注[1−3, 7]. 现有的判断时变系统的能控性和能观性的判据都必须首先计算出系统的状态转移矩阵, 而这是一件艰难的任务, 实用性较差. 下面给出线性时变系统的三个能控和能观性判据.

给定时变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

这里, $A(t), B(t)$ 分别为连续的 $n \times n, n \times m$ 维函数矩阵. 令 $\Phi(t, t_0)$ 为系统 (1) 的状态转移矩阵.

在许多控制理论教材中都介绍过如下的 PBH 能控性判据.

引理 1[4] **(PBH 判据).** 定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充要条件是 $\mathrm{rank}(\lambda I - A, B) = n, \lambda \in \mathbf{C}$.

引理 2[1]**.** 定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充要条件是矩阵方程 $AX - XA = 0, XB = 0$ 只有零解.

定义 1[4]**.** 设 $\boldsymbol{f}_1(t), \boldsymbol{f}_2(t), \cdots, \boldsymbol{f}_n(t)$ 是一组 p 维复值行向量函数, 如果存在一组不完全为零的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{C}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{f}_i(t) = \boldsymbol{\alpha} F(t) = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \in \mathbf{C}^{l \times n}$$

$$F(t) = [\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{T}}(t), \cdots, \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^{n \times p}$$

则称这组复值函数在区间 $[t_1, t_2]$ 上是线性相关的, 否则它们在区间 $[t_1, t_2]$ 上是线性无关的.

这里的线性相关或线性无关的时间区间非常重要.

引理 3[4]**.** 时变系统 (1) 在 t_0 时刻能控的充要条件是存在 $t_1 > t_0$ 使得矩阵 $\Phi(t_0, t)B(t)$ 的 n 行在 $[t_0, t_1]$ 内线性无关.

引理 4. 对于时变系统 (1), 其状态转移矩阵为 $\Phi(t, t_0)$, 则

$$\begin{aligned}\Phi(t_0, t) = & I - \int_{t_0}^{t} A(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 A(\tau)\mathrm{d}\tau - \\ & \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2 A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 A(\tau)\mathrm{d}\tau + \cdots\end{aligned}$$

证明. 由

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t)\Phi(t, t_0) = I$$

易得

$$\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)A(t) \tag{2}$$

对方程 (2) 的两端同时在 t_0 到 t 上求积分, 可得

$$\Phi(t_0,t)=I-\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)A(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

应用逐次逼近法, 即将式 (3) 代入自身的 $\Phi(t_0,\tau)$ 中去, 第一次迭代后有

$$\Phi(t_0,t)=I-\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\Phi(t_0,\tau_1)A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau$$

反复迭代下去, 可得

$$\begin{aligned}\Phi(t_0,t)=&I-\int_{t_0}^{t}A(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau-\\&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau+\cdots\end{aligned}$$

□

定理 1. 系统 (1) 在 t_0 时刻能控的必要条件是存在 $t_1>t_0$, 使得对于 $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, 矩阵 $\left[\begin{array}{cc}\lambda I-A(t) & B(t)\end{array}\right]$ 的 n 行在区间 $[t_0,t_1]$ 上是线性无关的.

证明. 为表示简单起见, 不妨令 $t_0=0$, $\Phi(t,t_0)|_{t_0=0}=\Phi(t,0)=\Phi(t)$.

系统 (1) 在 t_0 时刻是能控的, 由引理 3 知, 存在 $t_1>t_0,\Phi(t_0,t)B(t)$ 的 n 行在 $[t_0,t_1]$ 内线性无关. 对于 $t_1>t_0$, 证明 $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, 矩阵 $\left[\begin{array}{cc}\lambda I-A(t) & B(t)\end{array}\right]$ 的 n 行在区间 $[t_0,t_1]$ 上是线性无关的. 采用反证法, 假设存在常数 λ, 使得矩阵 $\left[\begin{array}{cc}\lambda I-A(t) & B(t)\end{array}\right]$ 的 n 行在区间 $[t_0,t_1]$ 内线性相关, 由定义 1, 即存在行向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}\left[\begin{array}{cc}\lambda I-A(t) & B(t)\end{array}\right]=0$, 即 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}A(t),\boldsymbol{\alpha}B(t)=0$, $\forall\lambda\in\mathbf{C}$, $t\in[0,t_1]$ 成立. 有

$$\boldsymbol{\alpha}\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\int_0^t\lambda\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\alpha}B(t)=0$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\lambda\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\lambda^2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\alpha}B(t)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}\lambda\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}\lambda^2\boldsymbol{\alpha}A(\tau)\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}\lambda^3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau\boldsymbol{\alpha}B(t)=0\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}\Phi(0,t)B(t)=\\&\boldsymbol{\alpha}(I-\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau-\\&\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau+\cdots)B(t)=\\&(1-\int_0^t\lambda\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_0^{\tau}\lambda^2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau-\\&\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}\lambda^3\mathrm{d}\tau_2\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau+\cdots)\boldsymbol{\alpha}B(t)=0\end{aligned}$$

由引理 3, 这与系统能控相矛盾, 即矩阵 $\left[\begin{array}{cc}\lambda I-A(t) & B(t)\end{array}\right]$ 的 n 行在 $[t_0,t_1]$ 内是线性无关的. □

以上针对时变系统提出的定理 1 是定常系统 PBH 判据的推广.

定理 2. 时变系统 (1) 在 t_0 时刻能控的必要条件是存在 $t_1>t_0$, 使得下列矩阵方程:

$$A(t)X=XA(t),\quad XB(t)=0,\quad\forall t\in[t_0,t_1] \tag{4}$$

只有零解, 其中 X 是定常方阵.

证明. 假设存在一个矩阵 $X\neq 0$ 使得矩阵方程 (4) 成立. 对矩阵方程 (4) 前一个等式积分, 有

$$\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau X=X\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$X\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)=0$$

$$\begin{aligned}&X\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)d\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)X\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&X\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)X\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)X\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau B(t)=\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)=0\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&X\Phi(0,t)B(t)=\\&\quad XB(t)-\int_0^tA(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)+\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)-\\&\quad\int_0^t\int_0^{\tau}\int_0^{\tau_1}A(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2A(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1A(\tau)\mathrm{d}\tau XB(t)+\cdots=0\end{aligned}$$

与系统 (1) 能控相矛盾, 故矩阵方程 (4) 只有零解. □

以上针对时变系统提出的定理 2 是定常系统引理 2 (矩阵方程判据) 的推广.

注 1. 与线性定常系统中引理 1 的结论不同, 矩阵 $\left[\begin{array}{cc} \lambda I - A(t) & B(t) \end{array}\right]$ 的 n 行在 $[t_0, t_1]$ 内线性无关是时变周期系统 (1) 能控的必要条件而非充分条件. 这容易通过下面的一个反例说明.

例 1. 讨论以下时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc} \cos(t) & 1 \\ -1 & \cos(t) \end{array}\right] \boldsymbol{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{array}\right] \boldsymbol{u}(t)$$

容易得到

$$\Phi(0,t) = \mathrm{e}^{-\sin(t)} \left[\begin{array}{cc} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{array}\right]$$

$$\Phi(0,t)B(t) = \left[\begin{array}{c} \mathrm{e}^{-\sin(t)} \\ 0 \end{array}\right]$$

$\Phi(0,t)B(t)$ 的行秩为 1, 系统不能控.

而

$$\mathrm{rank}\left[\begin{array}{cc} \lambda I - A(t) & B(t) \end{array}\right] =$$

$$\mathrm{rank}\left[\begin{array}{ccc} \lambda - \cos(t) & -1 & \cos(t) \\ 1 & \lambda - \cos(t) & -\sin(t) \end{array}\right] = 2$$

其中, $\mathrm{rank}(\cdot)$ 为一个时变矩阵的行秩.

注 2. 与线性定常系统中引理 2 的结论不同, 时变系统 (1) 的矩阵方程 (2) 只有零解只是系统 (1) 能控的必要条件而非充分条件. 下面举一反例说明.

例 2. 同样取例 1 的时变系统, 由上面的讨论知系统不能控.

设

$$X = \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array}\right]$$

满足矩阵方程 (4).

由

$$\left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \cos(t) & 1 \\ -1 & \cos(t) \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \cos(t) & 1 \\ -1 & \cos(t) \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array}\right]$$

可得:

$$\left[\begin{array}{cc} -x_{12} & x_{11} \\ -x_{22} & x_{21} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_{21} & x_{22} \\ -x_{11} & -x_{12} \end{array}\right]$$

$$X = \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12} & x_{11} \end{array}\right]$$

由

$$XB(t) = \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12} & x_{11} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

即

$$\left[\begin{array}{cc} \cos(t) & -\sin(t) \\ -\sin(t) & -\cos(t) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ x_{12} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

得 $X = \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12} & x_{11} \end{array}\right] = 0$, 矩阵方程 (4) 只有零解.

2 时变广义系统的能控性

定常系统的能控性有如下结论:

引理 5[6]**.** 广义系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充要条件是 $\mathrm{rank}(\lambda E - A, B) = n, \lambda \in \mathbf{C}, \mathrm{rank}(E, B) = n$.

引理 6[6]**.** 广义系统 $E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充要条件是矩阵方程 $EYA - AYE = 0, YB = 0$ 只有零解.

下面给出的时变广义系统的能控性结果是定常系统相应结论的自然扩展.

考虑如下广义系统

$$E(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{5}$$

其中, $\Phi(t)$ 为系统 (5) 的状态转移矩阵, 即

$$E(t)\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I$$

如果存在 k, 使得

$$\det(kE(t) + A(t)) \neq 0$$

取

$$P(t) = (kE(t) + A(t))^{-1}, \quad Q(t) = I$$

则系统 (5) 受限等价于下列系统:

$$\hat{E}(t)\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (I - k\hat{E}(t))\boldsymbol{x}(t) + \hat{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{6}$$

其中,

$$\hat{E}(t) = (k\hat{E}(t) + A(t))^{-1}E(t)$$

$$P(t)A(t) = I - \hat{E}(t)$$

$$\hat{B}(t) = (k\hat{E}(t) + A(t))^{-1}B(t)$$

设 $\Psi(t)$ 为系统 (6) 的状态转移矩阵, 即 $\hat{E}(t)\dot{\Psi}(t) = (I - \hat{E}(t))\Psi(t)$, $\Psi(0) = I$, 可见通过上面的特殊的受限等价变换后, 系统 (5) 和 (6) 状态相同, 故有以下结论.

引理 7. 系统 (5) 能控的充要条件是系统 (6) 能控, 即 $\mathrm{rank}(\Psi(t)\hat{B}(t)) = n$ 和 $\mathrm{rank}(\hat{E}(t), \hat{B}(t)) = n$.

考虑下面时变系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{E}(t)\boldsymbol{x}(t) + \hat{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{7}$$

引理 8. 系统 (5) 能控的必要条件是系统 (7) 能控.

证明. 由引理 7 知, 系统 (5) 能控的必要条件是 $\mathrm{rank}(\Psi(t)\hat{B}(t)) = n$.

因 $P(t) = (kE(t) + A(t))^{-1}$ 可逆, 用 $A^{\mathrm{D}}(t)$ 表示 $A(t)$ 的 Drazin 逆[5], 有:

$$\Psi(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \hat{E}^{\mathrm{D}}(\tau)(I - k\hat{E}(\tau))\mathrm{d}\tau} =$$

$$\mathrm{e}^{\int_0^t (-kI + \hat{E}^{\mathrm{D}}(\tau))\mathrm{d}\tau} = \mathrm{e}^{-kt \int_0^t \hat{E}^{\mathrm{D}}(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

设 $\hat{\Phi}(t)$ 是系统 (7) 的状态转移矩阵, 即

$$\hat{\Phi}(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \hat{E}(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

因此, 有 $\mathrm{rank}(\Psi(t)\hat{B}(t)) = \mathrm{rank}(\hat{\Phi}(t)\hat{B}(t)) = n$, 系统 (7) 能控. □

定理 3. 系统 (5) 在 t_0 时刻能控的必要条件是存在 $t_1 > t_0$, 使得 $\forall\lambda \in \mathbf{C}$, 矩阵 $\left[\begin{array}{cc} \lambda E(t) - A(t) & B(t) \end{array}\right]$ 的 n 行在 $[t_0, t_1]$ 内线性无关.

证明. 反证法, 假设系统 (7) 不能控, 存在 $\mu \in \mathbf{C}$ 及行向量 $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$, 使得 $\mu\boldsymbol{\eta}E(t) = \boldsymbol{\eta}A(t)$, $\boldsymbol{\eta}B(t) = \mathbf{0}$ 成立.

因 $\det(kE(t) + A(t)) \neq 0$, 由定理 1 知:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(\lambda I - \hat{E}(t), \hat{B}(t)) = \\ &\mathrm{rank}(\lambda(kE(t) + A(t)) - E(t), B(t)) = n \end{aligned}$$

取 $\lambda = \dfrac{1}{k + \mu}$, 则

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\eta}\left[\begin{array}{cc} \lambda(kE(t) + A(t)) - E(t) & B(t) \end{array}\right] = \\ &\left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{\eta}\left(\dfrac{k}{k+\mu} - 1\right)E(t) + \dfrac{1}{k+\mu}\boldsymbol{\eta}A(t) & \boldsymbol{\eta}B(t) \end{array}\right] = \\ &\left[\begin{array}{cc} \dfrac{-\mu}{k+\mu}\boldsymbol{\eta}E(t) + \dfrac{1}{k+\mu}\mu\boldsymbol{\eta}E(t) & \boldsymbol{\eta}B(t) \end{array}\right] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} &\mathrm{rank}(\lambda I - \hat{E}(t), \hat{B}(t)) = \\ &\mathrm{rank}(\lambda(kE(t) + A(t)) - E(t), B(t)) = n \end{aligned}$$

矛盾. □

定理 4. 系统 (5) 在 t_0 时刻能控的必要条件是存在 $t_1 > t_0$, 使得下列矩阵方程:

$$A(t)YE(t) - E(t)YA(t) = 0,\ \ YB(t) = 0,\ \ \forall t \in [t_0, t_1]$$

只有零解, 其中 Y 是定常方阵.

证明. 由引理 8 知, 系统 (5) 能控的必要条件是系统 (7) 能控, 根据定理 2 知, 系统 (7) 能控的必要条件是矩阵方程

$$\hat{E}(t)X - X\hat{E}(t) = 0, X\hat{B}(t) = 0 \tag{8}$$

只有零解.

将

$$\begin{aligned} \hat{E}(t) =& (k\hat{E}(t) + A(t))^{-1}E(t) \\ \hat{B}(t) =& (k\hat{E}(t) + A(t))^{-1}B(t) \end{aligned}$$

代入式 (8) 得

$$\begin{aligned} (kE(t) + A(t))^{-1}E(t)X =& X(kE(t) + A(t))^{-1}E(t) \\ X(kE(t) + A(t))^{-1}B(t) =& 0 \end{aligned}$$

令 $Y(t) = X(kE(t) + A(t))^{-1}$, 上式可化成

$$(kE(t) + A(t))^{-1}E(t)Y(t)(kE(t) + A(t)) = Y(t)E(t)$$

$$Y(t)B(t) = 0$$

上式中的第一个式子两边同时左乘 $kE(t) + A(t)$ 得

$$E(t)Y(t)(kE(t) + A(t)) = (kE(t) + A(t))Y(t)E(t)$$

$$Y(t)B(t) = 0$$

简化可得

$$E(t)Y(t)A(t) = A(t)Y(t)E(t)$$

$$Y(t)B(t) = 0$$

以上方程只有零解, 特别地, 当 Y 是定常方阵时, 有

$$E(t)YA(t) = A(t)YE(t)$$

$$YB(t) = 0$$

只有零解. □

由第 1 节知, 以上两个定理也只是必要条件而非充分条件.

用 Kronecker 积形式表达定理 4 得到定理 5.

定理 5. 系统 (5) 能控的必要条件是下列矩阵 M 列满秩.

$$M = \left[\begin{array}{c} E \bigotimes A^{\mathrm{T}} - A \bigotimes E^{\mathrm{T}} \\ I \bigotimes B^{\mathrm{T}} \end{array}\right]$$

其中 $\bigotimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积.

3 结语

线性时变广义系统是一类普遍存在的重要的实际系统. 本文得到的两种判定时变系统和时变广义系统能控的必要条件, 只依赖于系统矩阵和输入矩阵, 不必考虑系统的状态转移矩阵, 使得判别时变系统能控性与能观性计算简单, 易于实现. 利用对偶性, 可以得到对应的能观性结论. 对继续深入研究时变系统有启发作用.

References

1 Hermann R, Martin C. Applications of algebraic geometry systems theory — part I. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, **22**(1): 19−25

2 Chen Shu-Ping. A note on controllability and stabilizability of linear periodic systems. *Applied Mathematics*, 1990, **5**(1): 111−114
(陈叔平. 关于周期线性系统的能控性和能稳定性. 高校应用数学学报, 1990, **5**(1): 111−114)

3 Zhang Xue-Feng, Song Wen-An. Stability of linear time-varying systems with T period. *Proceedings of Chinese Youth Management Science and System Science*, 1991, **1**(1): 534−538
(张雪峰, 宋文安. 具有周期 T 的线性时变系统的稳定性. 全国青年管理科学与系统科学论文集, 1991, **1**(1): 534−538)

4 Tong Mao-Da. *Linear System Design and Theory*. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2004
(仝茂达. 线性系统理论和设计. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2004)

5 Campbell S L. *Singular Systems of Differentials Equations*. Sanfransico Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980

6 Tang Wan-Sheng, Li Guang-Quan. The criterion for controllability and observability of singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 1995, **21**(1): 63−66
(唐万生, 李光泉. 广义系统的能控、能观性判别条件. 自动化学报, 1995, **21**(1): 63−66)

7 Yame J J, Hanus R. On stabilization and spectrum assignment in periodically time-varying continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(6): 979−983

8 Zhang D Q, Zhang Q L, Chen Y P. Controllability and quadratic stability quadratic stabilization of discrete-time interval systems — an LMI approach. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2006, **23**(4): 413−431

9 He Xi-Qin, Zhang Da-Qing, Zhang Qing-Ling. Controllability of descriptor interval systems. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(5): 763−771
(何希勤, 张大庆, 张庆灵. 广义区间动力系统的能控性. 自动化学报, 2004, **30**(5): 763−771)

10 Cao Y Z, Ying M S. Observability and decentralized control of fuzzy discrete-event systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, **14**(2): 202−216

11 Feng Y H, Hu L J. On the quasi-controllability of continuous-time dynamic fuzzy control systems. *Chaos, Solitons and Franctals*, 2006, **30**(1): 177−188

12 Sun Y M, Guo L. On global asymptotic controllability of planar affine nonlinear systems. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2005, **48**(6): 703−712

13 Wang Cheng-Hong, Song Su. On controllability and observability of multivariable linear time-invariant systems. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(5): 662−667
(王成红, 宋苏. 多变量线性定常系统与离散系统之间的几个可控可观性关系. 自动化学报, 2005, **31**(5): 662−667)

14 Zhu Qi-Xin, Hu Shou-Song. Controllability and observability of networked control systems. *Control and Decision*, 2004, **19**(2): 157−161
(朱其新, 胡寿松. 网络控制系统的能控性和能观性. 控制与决策, 2004, **19**(2): 157−161)

15 Xie G M, Wang L. Controllability of linear descriptor systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, **50**(3): 455−460

16 Cheng D Z. Controllability of switched bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(4): 511−515

17 Seo J, Chung D Y, Park C G, Lee J G. The robustness of controllability and observability for discrete linear time-varying systems with norm-bounded uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(7): 1039−1043

张雪峰 东北大学副教授, 博士研究生. 主要研究方向为网络控制系统与粗糙集理论. 本文通信作者. E-mail: fushun-info@tom.com
(**ZHANG Xue-Feng** Associate professor, Ph. D. candidate at the Institute of System Science, Northeastern University. His research interest covers networked control systems and rough set theory. Corresponding author of this paper.)

张庆灵 东北大学教授. 主要研究方向为广义系统, 鲁棒控制.
E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Qing-Ling** Professor at the Institute of System Science, Northeastern University. His research interest covers singular systems and robust control.)