多目标合作决策群优化的极大熵法*

陈业华

(湖北荆州师范高等专科学校, 湖北荆州 434100)

邱菀华

(北京航空航天大学管理学院, 北京 100083)

摘要　文[1]建立一种群决策系统的熵模型, 能解决决策支持系统优化问题, 但对专家间的合作程度无法度量, 对最终决策产生二义性等问题无法解决。本文提出一种新的群决策系统——合作决策群, 能较好地解决该类问题。文中从理论上证明了决策群模型的有效性, 并给出了求解算法。

关键词　理想专家　合作决策群　极大熵原理

Maximum Entropy Method for Optimizing Multiobjective Collaborative Group Decision

Chen Yehua

(Hubei Jingzhou Teachers College, Jingzhou Hubei 434100)

Qiu Wanhua

(Management School, Beijing University of A. A., Beijing 100083)

Abstract　In order to solve decision conflict and utility difference in multiobjective group decision, this paper developed a new group decision method——gradient decision method by defining a collaborative decision group based on maximum entropy. The validity of this model was proved theoretically and the satisfying solution of group decision was obtained.

Keywords　ideal expert; collaborative decision group; maximum entropy principle

1　多目标群决策系统的描述

由大量决策文献可知, 多目标决策问题的求解在于如何有效地把多目标转化为单目标, 而多目标群决策问题还在于, 决策者在形成决策意见过程中, 如何将各专家的最优意见转化综合为决策群体的意见, 使其效用达到最佳。解决方法之一就是充分发挥专家间的友好合作, 按一定规则使其决策群形成合作决策群。

设 m 个专家构成决策群 R, 他们就 n 个目标 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 进行评估, 凸集 Ω 为决策变量的可行域, 离散方案集 X 中有 l 个方案, $X \subset \Omega, x \in X$。向量目标函数 $G(x) = (g_i^1(x), g_i^2(x), \cdots, g_i^m(x))$ 描述了 m 个专家根据个人的专业知识, 习惯偏好等因素对目标产生的认识。效用函数 $P(x) = p_k(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ 是 l 个方案对 n 个目标的效用, 由文献[2]分析可知, 其效用值达到 80%以上即为优。由此可得多目标决策系统的数学描述

* 本文于 1997 年 5 月 20 日收到

国家自然科学基金资助课题(批准号: 9767007)

为

$$\max G(x) \text{ 且 s. t. } P(x) \geq 0.8,\ x \in X \tag{1}$$

设第 i 个专家 R_i 给第 j 个目标 g_i 的估值为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$，则 g_j 的评估均值为 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$，显然该值愈大，决策方案趋优。另外，决策群的决策水平决定于专家个体决策水平与合作程度，若决策水平及相互间的合作程度都高，则决策群中各专家对某个目标决策估值间的差异就愈小。群中所有专家对每个目标均具有等同的决策值，那么，这个决策群即为最优决策群。

定理 1　设 R 为 m 个专家组成的决策群，R 对目标的估值分别为 x_{ij}，则 R 最优的必要充分条件是：$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$。

证明　若 R 为最优决策群，则 R 中每个专家 R_i 给予目标的估值相同，不妨设为 x_{ij}，于是对于 j 个目标的评估均值为 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_{ij}$；反之，若 $x_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ 说明对某个目标 g_i，R 中所有专家给予的估值相同，由 j 的任意性，说明对所有目标 g，专家们都分别给予相同的估值，则 R 最优。证毕。

2　合作决策群优化的熵模型

设向量目标函数 $G(x)$ 在 Ω 上连续。对任意正整数 $a, b(0<a,\ b\leq l,\ a\neq b)$，称 $\Delta x_k = x_{ak} - x_{bk}(k=1,2,\cdots,m)$ 对某个目标 g_j 评估产生的误差。

定义 1　设 $G(x)$ 在 Ω 上连续，称

$$\Delta g^k(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[1 - m r_i(x)]\Delta x_k \tag{2}$$

为专家 R_k 在 Ω 上的决策误差。其中

$$r_i(x) = e^{rg_i^k(x)} \Big/ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda rg_i^k(x)} \qquad r \geq 0,\ \lambda > 1 \tag{3}$$

可以看出，Δg^k 愈小，专家们的决策水平及合作程度愈高。于是有

定理 2　最优决策专家的必要充分条件是：该专家的决策误差为零。

证明　设专家 R_k 的决策误差 $\Delta g^k(x) = 0$，由定义 1 有

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{m} e^{rg_i^k(x)} \Big/ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda g_i^k(x)}\right](x_{ak} - x_{bk}) = 0$$

即

$$x_{ak} - x_{bk} = \left[\sum_{i=1}^{m} e^{rg_i^k(x)}(x_{ak} - x_{bk})\right] \Big/ \left[\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda rg_i^k(x)}\right] \tag{4}$$

由极大熵函数性质[3]及定义 1 可知，当决策误差趋于零时，极大熵函数趋于无穷大，此时，r 趋于零。又由于 $G(x)$ 的连续性，即得：当决策梯度为零时，$r=0$。另外，由 a, b 的任意性，在式(4)中，令 $x_{ak} - x_{bk} = x_{ik}$，于是有

$$x_{ik} = \sum_{i=1}^{m} x_{ik} e^{rg_i^k(x)} \Big/ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda g_i^k(x)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$$

由定理 1，R 为理想决策群，故专家 R_k 为理想专家。反之，设 R_k 为理想专家，给予 g 的估值为 $x_{ak}(0<a\leq l)$，由定理 1，在评估值域中至少存在一个估值 $x_{bk}(0<b<l,\ b\neq a)$ 使得 $x_{ak} = x_{bk}$，从而 $\Delta x_k = x_{ak} - x_{bk} = 0$，所以有 $\Delta g^k(x) = 0$。证毕。

由定理 1 及定理 2 立即可得。

定理 3　合作决策群优化的必要充分条件是：群中各专家的决策误差趋于零。

由此即可建立多目标合作决策群优化的极大熵模型为

$$\min u(G(x)) \text{ 且 s. t. } P(x) \leq 0.8\ (x \in X) \tag{5}$$

其中 $u(G) = \frac{1}{\zeta}\ln\sum_{k=1}^{m} e^{\zeta\Delta g^k(x)}$，$P(x) = \frac{1}{\eta}\ln\sum_{k=1}^{m} e^{\eta p_k(x)}$，$(\zeta\ \eta > 0)$。

下面从理论上证明模型(5)的有效性。

引理 当 ζ 充分大时，决策误差 Δg^k 趋于 $\max\{g_i^k\}$。

证明 令 $g^* = \max\{g_i^k(x)\}$。由文献[2, Def 3. 12]，$0 \le g^* \le 1$，又由定义 1 有，$0 \le \Delta g^k(x) \le g^*$，于是有

$$\frac{g^*}{\Delta x_k} \ge \Delta g^k(x)/\Delta x_k \ge \frac{g^*}{m}\sum_{i=1}^{m}[1 - m r_i(x)]$$

$$= \frac{g^*}{m} - \frac{g^*}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[e^{\zeta g_i^k(x)} \Big/ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\zeta g_i^k(x)}\right]$$

$$= \left[\frac{g^*}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\zeta g_i^k(x)} - \frac{g^*}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{\zeta g_i^k(x)}\right] \Big/ \left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda g_i^k(x)}\right]$$

$$\ge g^* \varphi(\zeta) \Big/ \left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda g_i^k(x)} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e^{g_i^k(x)}\right]$$

任取 $a, b \in (0, l)$ 且 $a \ne b$，令 $\max\{\lambda g_i^k(x)\} = \ln x_{ak}$，$\max\{g_i^k(x)\} = \ln x_{bk}$，则

$$g^*/\Delta x_k \ge \Delta g_i^k(x)/\Delta x_k \ge g^* \varphi(\zeta) \Big/ \left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ak} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{bk}\right]$$

$$= g^* \varphi(\zeta)/(x_{ak} - x_{bk}) = g^* \varphi(\zeta)/\Delta x_k$$

即

$$g^* \ge \Delta g_i^k(x) \ge g^* \varphi(\zeta) \tag{6}$$

其中 $\varphi(\zeta) = \left[\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\zeta g_i^k} + \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda g_i^k} + \sum_{i=1}^{m} e^{g_i^k}\right] \Big/ \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\zeta g_i^k}$。可以看出，当 ζ 充分大时，$\varphi(\zeta)$ 趋于无穷小。对式(6)使用两边夹法则即得：当 ζ 充分大时，Δg^k 趋于 g^*。 证毕。

定理 4 当 ζ η 充分大时，$u(G)$ 一致收敛于 $\max\{G\}$；$P(x)$ 一致收敛于 $\max\{P_k\}$。

证明 由式(5)有

$$0 \le u(G) - \max\{G\} = \frac{1}{\zeta}\ln\sum_{k=1}^{m} e^{\zeta\Delta g_i^k} - \frac{1}{\zeta}\ln e^{\zeta\max\{G\}}$$

$$= \frac{1}{\zeta}\ln\sum_{k=1}^{m} e^{\zeta(\Delta g_i^k - \max\{G\})} = u\{\zeta\}$$

由引理知，当 ζ 充分大时，$\Delta g_i^k - \max\{G\}$ 趋于零，从而得，当 ζ 充分大时，$u(\zeta)$ 趋于 0，所以 $u(G)$ 一致收敛于 $\max\{G\}$。

同理可证，当 η 充分大时，$P(x)$ 一致收敛于 $\max\{P_k\}$。 证毕。

定理 4 的结论充分说明了多目标合作决策群决策的优化解即为模型(5)的弱解，而后者的算法简单且精度高得多。

3 算法与算例

设二阶 Lagrange 函数为 $L(x) = u(G(x)) + \alpha P(x) + \beta P^2(x)$，则由文献[3]提出的算子法，归纳求解模型(5)的算法如下：

第一步 给定初始值 $x_0 \in X$，初始算子 α_0，精确度 $\epsilon > 0$，令 $k = 1$，计算 $P_0 = P(x_0)$，$u_0 = u(x_0)$；

第二步 以 x_{k-1} 为计算点，分别计算 $\Delta g^k(x)$，$u(G)$，$P(x)$；

第三步 计算 $L(x)$，采用组合尺度法求解 $\min\{L(x)\}$，设其解为 x_k；

第四步 计算 $P_k = P(x_k)$，若 $\min\{P_k, \alpha_k/\beta\} \ge 4/5$，则终止计算，$x_k$ 即为(5)的解，否则，计算 $t = P_k/P_{k-1}$，若 $t < 1/5$，则转第五步，否则，令 $\beta = 2\beta$，$\zeta = 2\zeta$，$\eta = 2\eta$，转第五步；

第五步 计算 $u_k = u(x_k)$，$v = (u_{k-1} - u_k) \Big/ \sum_{i=1}^{k} u_i$，若 $v < \epsilon$，则终止计算，此时，若 $P_k \ge 4/5$，则 x_k 为(5)的解，若 $P_k < 4/5$，则(5)无解，否则转第六步；

第六步　计算 $\alpha^{k+1}=\max\{0, \alpha^k+tg^k\}$，令 $k=k+1$，转第二步。

算例　设有六个专家组成决策群 R，方案集 X 中有 5 个方案 $x_1, x_2, \cdots, x_5$，对 4 个目标 g_1, g_2, g_3, g_4 评估决策，其向量目标函数 $g_i^k(x)=b_i\sum_{j=1}^{5}(x_j-a_{ij}^k)^2$，$(k=1,2,\cdots,6;\ i=1,2,3,4)$，$(b_1,b_2,b_3,b_4)^T=\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}\right)^T$，

$$(a_{ij}^1)=\begin{bmatrix}2&1&0&1&2\\1&0&2&0&1\\0&1&2&1&0\\1&0&1&2&1\end{bmatrix}\qquad(a_{ij}^2)=\begin{bmatrix}1&1&0&2&1\\0&1&2&1&0\\1&2&1&0&1\\2&2&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$(a_{ij}^3)=\begin{bmatrix}0&1&1&2&1\\1&0&2&0&0\\2&1&0&1&2\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}\qquad(a_{ij}^4)=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\2&0&1&1&0\\1&0&2&1&0\\0&2&1&1&2\end{bmatrix}$$

$$(a_{ij}^5)=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\2&1&0&2&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&1&0\end{bmatrix}\qquad(a_{ij}^6)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\2&1&0&2&1\\1&2&0&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

目标效用函数分别为 $P_1(x)=2x_1+3x_2+7$，$P_2(x)=3x_2+x_3+4$，$P_3(x)=2x_3+7x_4+5$，$P_4(x)=4x_4+2x_5+6$，$P_5(x)=3x_5+5x_6+4$，$P_6(x)=4x_6+5x_2+1$。不妨设 $\Delta x_k=1$。

置初始值 $x^{(0)}=(0,0,0,0,0,0)$，$\alpha^{(1)}=0$，$\epsilon=10^{-3}$，$\zeta=\eta=\beta=10^3$，$\lambda=2$。其迭代计算结果如表 1。

表 1　六个专家估值计算结果

迭代次数	$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$	Δg^1	Δg^2	Δg^3	Δg^4	Δg^5	Δg^6	U_k	P_k	v
0	(0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000)	0.1897	0.2293	0.2911	0.1979	0.4721	0.3842	8.7237	0.1872	1
1	(0.2462, 0.2784, 0.1972, 0.2079, 0.1892)	0.3721	0.3364	0.1987	0.3241	0.5052	0.4732	7.0129	0.2014	0.1471
2	(0.2902, 0.2873, 0.2471, 0.3014, 0.2098)	0.2677	0.2981	0.3412	0.2394	0.4932	0.3762	4.8274	0.2645	0.1027
3	(0.3723, 0.3431, 0.4032, 0.4122, 0.3842)	0.2514	0.3092	0.2731	0.4234	0.5117	0.3349	2.7741	0.3231	0.0422
4	(0.4135, 0.3997, 0.4302, 0.4421, 0.4089)	0.2013	0.2344	0.2431	0.3792	0.4321	0.2913	1.6264	0.3847	0.0073
5	(0.4738, 0.5019, 0.5122, 0.4973, 0.5044)	0.2745	0.3052	0.2991	0.3844	0.5011	0.3731	1.4377	0.4721	0.0007

从表 1 中的计算值可以看到，算法迭代计算六次，$v=0.0007$ 计算终止，此时效用值 $P=0.4721$，达不到基本效用限，故模型(5)无解。从计算值还可以看到，Δg^5 的值在计算过程中始终过高，说明 R_5 非合作决策群中元素。现排除 R_5，迭代计算结果如表 2。

从表 2 中的计算数据我们看到，迭代计算五次，效用值 $P=0.8234$，计算终止，$x=(0.6632, 0.6933, 0.6132, 0.6876, 0.6412)$ 即为(5)的解，其最大分量 $x_2=0.6933$ 即为(1)的最优决策解，所以该算例的最终决策结果是方案 2 最优。

(下转第 135 页)

5　结束语

由于数学差生形成原因与转化规律的研究是一复杂的、动态的系统, 其中的若干子系统难以直接达到或不可能直接研究, 所以, 在本项研究中采用了以微观探测宏观, 以非予警状态下的行为片段研究和推断数学差生的变化规律的方法。这种以微观"自由元"和"随机因子"的活动规律, 推断相关因子的品格的方法, 是科学研究的一般方法, 如同医生通过采集血、化验血来了解人体的生理与病理的变化一样。

在行为片段的采集方面, 有的以观察记录的数据为准, 有的以自然情境下的表现状态为准, 有的通过课外辅导与作业的实录, 有的通过对课堂听课、练习表现的积累。对这些方面采集的信息, 进行提炼、聚类、分析, 利用前述各种数学方法加以处理, 并把处理的结果再次放到实践中去检验, 经过反复提炼, 得到数学模型。再经过对数学模型的加工改造, 使之逐步完善。

研究中, 用计算机对数据和模型进行处理, 把自然过程的研究与计算机模拟结合起来, 不仅方便、快捷、而且更加准确、科学。

参 考 文 献

1　王莲芬. 层次分析法导论. 北京: 中国人民大学出版社, 1990
2　戴忠恒. 教育统计、测量与评价. 北京: 中国科学技术出版社, 1990
3　杜玉祥等. 初中数学差生转化理论与方法(二). 天津: 天津科学技术出版社, 1997

(上接第 99 页)

表 2　五个专家估值计算结果

迭代次数	$x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$	Δg^1	Δg^2	Δg^3	Δg^4	Δg^6	u_k	p_k	v
0	(0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000)	0.4136	0.3977	0.4142	0.2699	0.3412	7.6735	0.2783	1
1	(0.2822, 0.2073, 0.3019, 0.3055, 0.2972)	0.3721	0.3243	0.3416	0.3083	0.3701	4.3721	0.4976	0.1416
2	(0.3742, 0.3466, 0.3583, 0.3874, 0.3912)	0.3536	0.3784	0.2987	0.2767	0.3913	2.1903	0.6744	0.0947
3	(0.4721, 0.4347, 0.4916, 0.5622, 0.5413)	0.2874	0.3055	0.2734	0.3302	0.2874	1.3742	0.7986	0.0183
4	(0.6632, 0.6933, 0.6132, 0.6876, 0.6412)	0.3019	0.2913	0.3723	0.2931	0.3349	0.9436	0.8234	0.0079

参 考 文 献

1　邱菀华. 群组决策系统的熵模型. 控制与决策, 1995, 10(1): 50～54
2　Geoffrey Gregory. Decision Analysis. Pitman Publishing. London, 1988
3　Thomas M V. A Generalized Maximum Entropy Principle. Opns Res 1989
4　Gu Changyao, Qiu Wanhua. Complex Entropy and Its Application. Chinese Journal of Aeronautics, 1992, 5(3): 159～166
5　邱菀华. 群组决策特征根法. 中国的项目管理——实践与方法会议论文集, 沈阳, 1993, 182～186