层次分析中判断矩阵排序的新方法——广义最小平方法°

徐泽水

(南京通信工程学院, 江苏 南京 210016)

摘要　提出了判断矩阵排序的一类新方法——广义最小平方法(GLSM), 并研究了其优良性质, 同时给出了其收敛性迭代算法和仿真实例。理论分析和仿真结果表明: 应用GLSM 是可行且有效的。

关键词　层次分析法　判断矩阵　广义最小平方法

A New Class of Priority Methods of Comparison Matrix in Analytic Hierarchy Process——The Generalized Least Square Methods

Xu Zeshui

(Institute of Communications Engineering, Nanjing 210016)

Abstract　This paper proposes a new class of priority methods of comparison matrix in analytic hierarchy process——the generalized least square methods (GLSM), studies their properties and also gives a convergent iterative algorithm and a simulation example. Theoretical analytic and simulation results show that GLSM are both feasible and effective.

Keywords　analytic hierarchy process; comparison matrix; the generalized least square methods

0　引言

层次分析法作为规划, 预测和决策工具, 自 70 年代中期问世以来, 已在世界各地得到迅速普及和推广, 并在社会经济管理等各个领域得到了广泛应用。与此同时, 有关层次分析法中的判断矩阵排序理论和方法也在不断发展, 传统的单一的特征向量排序方法已不再满足理论的发展和应用的需要。大量的具有良好优越性能的最优化排序方法不断出现。本文提出的方法具有许多优良性能。理论分析和仿真结果表明: 它是用于判断矩阵排序的好方法。

1　广义最小平方法的排序原理

设判断矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其排序向量为$w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$, 并满足归一化约束条件:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{1}$$

记向量空间$D=\{w=(w_1,w_2, \cdots, w_n)^T \mid w_j>0, j=1,2,\cdots,n; \sum_{j=1}^{n} w_j = 1\}$, 集合$\Omega=\{1, 2, \cdots, n\}$, 则当$A$

° 本文于 1997 年 3 月 10 日收到

满足完全一致性条件:

$$a_{ij}=a_{ik}/a_{jk},\quad i,j,k\in\Omega \tag{2}$$

时, A 为一致性判断矩阵, 根据一致性判断矩阵特性, 有

$$a_{ij}=w_i/w_j,\quad i,j\in\Omega \tag{3}$$

亦即, 对所有 $i,j\in\Omega$, 恒有:

$$\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}=1,\qquad \alpha\neq 0 \tag{4}$$

成立。由于(3)式等价于 $w_i=a_{ij}w_j,\ i,j\in\Omega$, (5)

将(5)式代入归一化约束条件(1)式, 由此可导得一致性判断矩阵排序向量 w 的精确解为

$$w^{*}=\left(1\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{i1},\ 1\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{i2},\ \cdots,\ 1\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{in}\right)^{T}$$

然而, 众所周知, 层次分析法中判断矩阵的获得一般都是由专家给定, 因此判断矩阵的一致性必然要受到专家知识结构, 判断水平和个人偏好等众多主观因素的影响, 再加之判断事物本身的模糊性和不确定性, 实际应用中的判断矩阵往往很难满足(2)式的完全一致性条件, 因而, (4)式在通常情况下是不成立的, 为此, 引入广义偏差项 f_{ij}, 即令:

$$f_{ij}=\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}-1\right]^{2},\qquad i,j\in\Omega,\ \alpha\neq 0$$

同时构造广义偏差函数为

$$F(w)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}-1\right]^{2},\qquad \alpha\neq 0$$

显然, 从判断矩阵拟合角度考虑, 广义偏差函数 $F(w)$ 总是愈小愈好, 因此, 合理的排序向量 w^{*} 应使 $F(w^{*})$ 最小, 由此导出的排序方法称为广义最小平方方法, 简记为 GLSM, 对于广义偏差函数 $F(w)$ 有:

定理 1.1 广义偏差函数 $F(w)$ 在 D 空间中有唯一最小值点 w^{*}, 且 w^{*} 是方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{2\alpha}-\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{2\alpha}-\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha}\right]\qquad \alpha\neq 0;\quad i\in\Omega \tag{6}$$

在 D 空间中的唯一解。

证明 关于最小值点 w^{*} 的存在性和唯一性证明仿文献[1]中定理 1 可证, 限于篇幅, 此处仅证明 w^{*} 满足方程组(6)。事实上, 由于 w^{*} 满足归一化约束条件(1)式, 故作 Lagrange 函数:

$$L(w,\lambda)=F(w)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right)$$

把上式两边对 $w_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 取偏导数, 并令 $\frac{\partial L}{\partial w_k}=0$ 得

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{2\left[\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{\alpha}-1\right]\cdot\alpha\cdot\left[\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(a_{kj}\frac{w_j}{-w_k^{2}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.2\left[\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\alpha}-1\right]\cdot\alpha\cdot\left[\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(a_{jk}\frac{1}{w_j}\right)\right]\right\}+\lambda=0,\qquad k\in\Omega$$

上式两端同乘以 w_k, 整理后有:

$$2\sum_{j=1}^{n}\alpha\left[-\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{2\alpha}+\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{\alpha}+\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{2\alpha}-\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\alpha}\right]+\lambda w_k=0 \tag{7}$$

(7)式两边对 k 求和有:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha\left[-\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{2\alpha}+\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{\alpha}+\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{2\alpha}-\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\alpha}\right]+\lambda\sum_{k=1}^{n}w_k=0 \tag{8}$$

显然上式中的左边的前一部分为零, 故 $\lambda=0$。把 $\lambda=0$ 代入(7)可得:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{2\alpha}-\left(a_{kj}\frac{w_j}{w_k}\right)^{\alpha}\right]=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{2\alpha}-\left(a_{jk}\frac{w_k}{w_j}\right)^{\alpha}\right],\quad k\in\Omega\quad \alpha\neq 0 \tag{9}$$

由此可见,w^* 满足方程组(6)。 [证毕]

2 广义最小二乘法的标准形

定义 2.1 (正互反矩阵集合) 称 $M_{R_n^+}$ 为 n 阶正互反矩阵的集合。如果

$$M_{R_n^+} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in R^+, \ a_{ij} = 1/a_{ji}, \ \forall i, j \in \Omega\}$$

这里 R^+ 表示正实数集。

定义 2.2 (一致性正互反矩阵集合) 称 M_{C_n} 为 n 阶一致性正互反矩阵, 如果

$$M_{C_n} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} \mid A \in M_{R_n^+}, \ a_{ij} = a_{ik}a_{kj}, \ \forall i, j, k \in \Omega\}$$

定义 2.3 (Hadamard 乘积) $n\times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 的 Hadamard 乘积 $C = A \circ B = (c_{ij})$ 定义为

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij} \quad \forall i, j \in \Omega$$

即两个同阶矩阵的 Hadamard 乘积是它们对应元素相乘所得到的矩阵。

定义 2.4 设 $E = (e_{ij}) \in M_{R_n^+}$, 若

$$\sum_{j=1}^{n} (e_{ij}^{2\alpha} - e_{ij}^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} (e_{ji}^{2\alpha} - e_{ji}^{\alpha}), \qquad \forall i, j \in \Omega$$

则称 E 是 G-标准形, 记 E_G 是所有 G-标准形集合。

定义 2.5 设 $A \in M_{R_n^+}$, 若 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是判断矩阵 A 的排序向量, 设 $W = \left(\frac{w_i}{w_j}\right) \in M_{C_n}$, 则称 $A \circ W^T$ 是判断矩阵 A 的 GLSM 扰动矩阵。

记为 $E^A_{(GLSM)} = A \circ W^T$。

设 $E_{(GLSM)} = \{E^A_{(GLSM)}: A \in M_{R_n^+}\}$ 是 A 的所有 GLSM 扰动矩阵的集合。

定理 2.1 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_{R_n^+}$, 则存在唯一的 G-标准形 E^A_G, 使得 $A = W \circ E^A_G$, 其中 W 是一个一致性矩阵。而且 GLSM 扰动矩阵的集合与其标准形集合相同, 即有 $E_{(GLSM)} = E_G$。

证明 1) (存在性), 设 $W = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$, $E = W^T \circ A$, $E = (e_{ij})$, 那么 $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} e_{ij}$, $i, j \in \Omega$, 把它们代入(6)式得

$$\sum_{j=1}^{n} (e_{ij}^{2\alpha} - e_{ij}^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} (e_{ji}^{2\alpha} - e_{ji}^{\alpha}) \qquad i \in \Omega$$

则 $E \in E_G$, 记 $E^A_G = E$.

2) (唯一性), 若 $A = \bar{E} \circ \bar{W}$, $\bar{E} = (\bar{e}_{ij}) \in E_G$

$$\bar{W} = \left(\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\right)_{n\times n} \in M_{C_n}, \text{ 那么 } a_{ij} = \frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\bar{e}_{ij}, \ i, j \in \Omega$$

且

$$\sum_{j=1}^{n} (\bar{e}_{ij}^{2\alpha} - \bar{e}_{ij}^{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} (\bar{e}_{ji}^{2\alpha} - \bar{e}_{ji}^{\alpha}) \qquad i \in \Omega \tag{10}$$

由(6)式得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\bar{e}_{ij}\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\cdot\frac{w_j}{w_i}\right)^{2\alpha} - \left(\bar{e}_{ij}\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\cdot\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\bar{e}_{ji}\frac{\bar{w}_j}{\bar{w}_i}\cdot\frac{w_i}{w_j}\right)^{2\alpha} - \left(\bar{e}_{ji}\frac{\bar{w}_j}{\bar{w}_i}\cdot\frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha}\right] \tag{11}$$

因为 $W = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$ 和 $\bar{W} = \left(\frac{\bar{w}_i}{\bar{w}_j}\right)_{n\times n}$ 都是一致性矩阵,

记 $\tilde{W} = W \circ \bar{W}^T$, 则 $\tilde{W} = \left(\frac{w_i}{w_j}\cdot\frac{\bar{w}_j}{\bar{w}_i}\right) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)$ 是一致性矩阵, 其中 $x_i = \frac{w_i}{\bar{w}_i}$,

由 $\bar{E} \in M_{R_n^+}$ 及定理 1.1 知

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\bar{e}_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right)^{2\alpha} - \left(\bar{e}_{ij}\frac{x_j}{x_i}\right)^{\alpha}\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\bar{e}_{ji}\frac{x_i}{x_j}\right)^{2\alpha} - \left(\bar{e}_{ji}\frac{x_i}{x_j}\right)^{\alpha}\right]$$

有唯一解。

因而从(10)和(11)式我们有: $\left(\frac{w_1}{w_1}, \frac{w_2}{w_2}, \cdots, \frac{w_n}{w_n}\right)^T$ 和 $(1, 1, \cdots, 1)^T$ 是线性相关的, 则 $\frac{\overline{w}_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_j}$, $i, j \in \Omega$。因此 $\overline{W} = W$, 故 $\overline{E} = E_G^A$。

3) 设 $E \in E_{(GLSM)}$, 那么 $E = W^T \circ A$, 其中 $W = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 是 A 的 GLSM 排序向量。由 1) 中证得 $E \in E_G$, 所以 $E_{(GLSM)} \subseteq E_G$。另一方面, 记 $E \in E_G$, $W = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{n\times n}$, $\overline{A} = W \circ E$, 则 $\overline{A} \in M_{R_n^+}$, 由 2) 证得: W 是 $\overline{A}$ 在 GLSM 方法下的排序向量, 因而

$$E = W^T \circ \overline{A} \in E_{(GLSM)}, \ E_G \subseteq E_{(GLSM)} \quad 所以\ E_G = E_{(GLSM)}$$

[证毕]

设 $E_{(EM)}$ 为特征根法对应的标准形, 则 $A = E_{(EM)} \circ W_1$, $W_1 \in M_{C_n}$, 又因为 A 可以表示为 $E_G \circ W$, $W \in M_{C_n}$, 所以由上述定理, 我们有下面结论:

推论 2.1　$E_G = E_{(EM)}$ 的充要条件是 $W_1 = W$。

进一步可推广为:

推论 2.2　设 A 是判断矩阵, 对于矩阵 A 的任意两个排序方法所对应的排序向量相等的充要条件是它们所对应的标准形相等。

推论 2.3　任意 3 阶正互反矩阵 $A = (a_{ij})$ 均对应于形如 $E = \begin{pmatrix} 1 & a & 1/a \\ 1/a & 1 & a \\ a & 1/a & 1 \end{pmatrix}$ 的标准形。

其中 $a = \left(\frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{13}}\right)^{\frac{1}{3}}$。

3　一般性质

贾兰香, 陈宝谦在文献[2]中提出了层次分析中合理的排序方法应具有四个基本性质: 置换不变性, 相容性, 对称性和完全协调性。

对于广义最小平方法(GLSM), 我们有

定理 3.1　广义最小平方法(GLSM)具有文献[2]所定义的置换不变性, 相容性, 对称性和完全协调性等优良性质。

定理 3.2　对于所有一致性判断矩阵, 广义最小平方法(GLSM)与特征向量排序方法(EM)具有相同的排序向量。

4　收敛性迭代算法

为了求解方程组(6), 可按照如下算法步骤进行迭代:

1) 取定初始排序向量 $w(0) = (w_1(0), w_2(0), \cdots, w_n(0))^T \in D$ 并给定迭代精度 ϵ, 同时置 $k = 0$。

2) 计算

$$\begin{aligned}\eta_i(w(k)) &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{2\alpha} - \left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha}\right] - \left[\left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{2\alpha} - \left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha}\right]\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{2\alpha} - \left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{2\alpha}\right] - \left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{\alpha} - \left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{\alpha}\right]\right\}, \quad i \in \Omega\end{aligned}$$

如果对所有 $i \in \Omega$, 恒有 $|\eta_i(w(k))| < \epsilon$, 则算法终止, $w^* = w(k)$, 否则执行 3)

3) 确定 m 使 $|\eta_m(w(k))| = \max_{i\in\Omega}\{|\eta_i(w(k))|\}$, 并计算:

$$\theta = \left|\sum_{j=1}^{n}\left[\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)^{2\alpha} - \left(a_{ji}\frac{w_i}{w_j}\right)^{2\alpha}\right]\right|$$

如果 $\theta \geq \epsilon/2$ (否则转 4)), 则

$$\begin{cases} T(k) = \left[\dfrac{\sum\limits_{j \neq m} \left(a_{mj} \dfrac{w_j(k)}{w_m(k)} \right)^{2\alpha}}{\sum\limits_{j \neq m} \left(a_{jm} \dfrac{w_m(k)}{w_j(k)} \right)^{2\alpha}} \right]^{\frac{1}{4\alpha}} \\ x_i(k) = \begin{cases} T(k) w_m(k), & i = m \\ w_i(k), & i \neq m \end{cases} \end{cases}$$

$w_i(k+1) = x_i(k) \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j(k) \quad i \in \Omega$

$k = k+1$, 转 2)

4) 当 $\theta < \epsilon/2$, 则

$$\begin{cases} T(k) = \left[\dfrac{\sum\limits_{j \neq m} \left(a_{mj} \dfrac{w_j(k)}{w_m(k)} \right)^{\alpha}}{\sum\limits_{j \neq m} \left(a_{jm} \dfrac{w_m(k)}{w_j(k)} \right)^{\alpha}} \right]^{\frac{1}{2\alpha}} \\ x_i(k) = \begin{cases} T(k) w_m(k), & i = m \\ w_i(k), & i \neq m \end{cases} \end{cases}$$

$w_i(k+1) = x_i(k) \Big/ \sum_{j=1}^{n} x_j(x) \quad i \in \Omega,$

$k = k+1$ 转 2)

定理 4.1 对上述 GLSM 构造的算法必在有限步终止。

证明 由定理 1.1 知, GLSM 的最小点 w^* 必须满足方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{\alpha} \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{\alpha} \right], \quad i \in \Omega$$

如果存在 $i = m$ 使

$$\eta_m = \left| \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[\left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{\alpha} \right] - \left[\left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{\alpha} \right] \right\} \right| \geq \epsilon$$

又因为 $\eta_m \leq \left| \sum_{j=1}^{n} \left[\left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{2\alpha} \right] \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} \left[\left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{\alpha} - \left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{\alpha} \right] \right|$, 则必有一项不小于 $\epsilon/2$。令

$$\theta = \left| \sum_{j=1}^{n} \left[\left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right)^{2\alpha} - \left(a_{ji} \frac{w_i}{w_j} \right)^{2\alpha} \right] \right|$$

对于 $\theta \geq \epsilon/2$ 和 $\theta < \epsilon/2$ 两种情况都可用文献[3]中的 GLDM 迭代算法进行迭代。因为 GLDM 迭代算法是有限步终止的, 所以 GLSM 迭代算法也是有限步终止的。

5 仿真实例

为了检验 GLSM 排序方法的排序有效性, 可取定判矩阵 A、B 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1/3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & 2 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

用三种排序方法计算 A, B 的排序向量, 结果分别见表 1, 表 2。

注:LDM 表示最小偏差排序方法

表 1 矩阵 A

排序方法 / 排序向量	EM	LDM	GLSM		
			α= - 1	α= 1	α= 2
w_1	0.4925	0.4903	0.4917	0.4928	0.4927
w_2	0.2306	0.2321	0.2283	0.2270	0.2259
w_3	0.0931	0.0926	0.0932	0.0929	0.0948
w_4	0.1369	0.1385	0.1392	0.1395	0.1391
w_5	0.0468	0.0464	0.0476	0.0477	0.0476
RI= 1.12	CR= 0.0283	CR= 0.0282	CR= 0.0282	CR= 0.0282	CR= 0.0282

表 2 矩阵 B

排序方法 / 排序向量	EM	LDM	GLSM		
			α= - 1	α= 1	α= 2
w_1	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750
w_2	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750	0.3750
w_3	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250
w_4	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250
RI= 0.89	CR= 0	CR= 0	CR= 0	CR= 0	CR= 0

从以上排序结果可以看出,在判断矩阵满足一致性要求的情况下,广义最小平方法(GLSM)取得了与特征向量排序方法完全一致的排序结果,而且不同的方法所得排序权值很相近,这些事实充分说明运用广义最小平方法对判断矩阵进行排序是可行且有效的。

6 结束语

判断矩阵排序的广义最小平方法丰富和发展了层次分析法的排序理论,理论分析和仿真实例表明,GLSM 是一类用于判断矩阵排序的好方法。

参 考 文 献

1 陈宝谦. 层次分析的两种新排序方法. 系统工程学报, 1990(2)
2 贾兰香,陈宝谦. 层次分析决策方法排序问题的一般性质. 南开大学学报, 1991(2)
3 王应明,傅国伟. 层次分析中判断矩阵排序的广义最小偏差法. 清华大学学报, 1993(3)
4 徐泽水,林钧昌. AHP 中区间判断矩阵排序的区间数广义 χ^2 法. 运筹与管理, 1997(4)