基于图论 Isoperimetric 算法的岩心图像分割

张炎强,吴晓红,何小海,王正勇
ZHANG Yan-qiang,WU Xiao-hong,HE Xiao-hai,WANG Zheng-yong

四川大学 电子信息学院 图像信息研究所,成都 610064
Image Information Institute,School of Electronic and Information Engineering,Sichuan University,Chengdu 610064,China
E-mail:yanqiang159@163.com

ZHANG Yan-qiang,WU Xiao-hong,HE Xiao-hai,et al.Core image segmentation algorithm based on graph theory Isoperimetric.Computer Engineering and Applications,2009,45(22):218-220.

Abstract:Image segmentation algorithm based on graph theory is the focuses of research in the image segmentation area in recent years,which normalized cut is a typical of graph theory segmentation algorithm.But the normalized cut method has low segmentation speed,often subjects to noise and fake edges,and very difficult to practical applications.Therefore,an improved segmentation method is introduced which is the Isoperimetric algorithm based on graph theory in this paper.The improved algorithm uses the method for solving linear equations instead of the eigenvector methods,uses of 4-adjacent to connect all the alternatives to the method and avoids the complex spatial filtering.This algorithm applies the image segmentation,improves the efficiency of the segmentation and achieves better segmentation results.
Key words:graph theory;image segmentation;Isoperimetric algorithm;core image

摘 要:基于图论的图像分割算法是当前图像分割领域研究的热点,其中归一化分割(Ncut)是一种典型的图论分割算法。但 Ncut 分割的速度慢,分割结果容易受图像的噪声和虚假边缘的影响,难以应用到实际。为此,提出一种基于图论的等周(Isoperimetric)改进分割算法。该算法使用解线性方程的方法代替解特征向量的方法、用 4-邻接的方法代替全连接,避免了复杂的空间滤波。该算法运用到岩心图像分割中,提高了分割的效率,取得了较好的分割效果。
关键词:图论;图像分割;等周算法;岩心图像
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.22.070 **文章编号**:1002-8331(2009)22-0218-03 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP391.41

1 引言

岩心图像分割在油气勘探开发研究工作中的作用日益重要[1]。当前,许多图像分割方法已应用于岩心图像分割,其中基于图论的图像分割方法这几年越来越引起人们兴趣。引入图论做图像分割通常是将图像的分割问题转化为图的分割问题,即首先将一幅图像表示成一个图带权的无向图 $G=\{V,E\}$,并且图中每个顶点 $v_i\in V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{|V|}\}$对应着图像中的像素,而图中每条边 $e_{ij}\in E=\{e_{ij}|i,j\leqslant|V|\}$相对应的是图像中两个相邻像素的连接,其中 e_{ij}是连接图中顶点 v_i 和 v_j 的边、$|V|$是图中的顶点数。每条边 e_{ij}通常会分配一个权值 $w(e_{ij})$,这个权值表示这条边所连接的两个像素的关系,例如灰度或者颜色的相似度等等。顶点 v_i 的度 $d_i=\sum_{e_{ij}}w(e_{ij})\quad\forall e_{ij}\in E$,表示与顶点 v_i 相连接的边数目,对应的是图像像素中 4-邻接和 8-邻接等关系。常见的图论分割方法有基于谱分割[2-3]和基于最大-最小流分割[4]等,这些方法考虑的是图像全局的性质分布,相对于一些传统的分割方法具有自己的独特优势。

但是,基于图论的谱分割算法,如归一化分割(Ncut)[2]方法,使用全连接的方法、使用复杂的空间滤波和求解方程要解特征向量,那么对较大的岩心图像进行分割时,就会导致计算速度很慢,而无法应用于实际。

因此,在总结了归一化分割(Ncut)方法的基础上,提出一种基于图论的等周(Isoperimetric)改进分割算法。本算法采用4-邻接法,通过解线性方程求解,免去了复杂的空间滤波。实验证明,该算法计算复杂度低,分割岩心图像的效果好,并具有很大的实际应用价值。

2 等周算法的原理

对等周算法的原理[5],这里给出等周问题的经典定义:对于固定的分割面积中,查找最小周长的区域。 换言之,在给定的图像区域中,能查找包围这个区域的最小周长(或最短边界)。图 G 的等周常量定义为[6]:

基金项目:四川省科技攻关计划(the Key Technologies R&D Program of Sichuan Province,China under Grant No.05GG 021-026-03)。
作者简介:张炎强(1984-),男,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、模式识别;吴晓红(1970-),女,讲师,博士研究生,主要研究方向:图像处理、模式识别;何小海(1964-),男,教授,博士生导师,通讯作者,主要研究方向:通信与信息处理、图像处理、模式识别、计算机视觉等;王正勇(1969-),女,副教授,博士研究生,主要研究方向:图像处理、模式识别。
收稿日期:2008-04-24 **修回日期**:2008-07-22

$$h_G=\inf_S \frac{|\partial S|}{Vol_S} \tag{1}$$

其中，S 是图的分割子集，$S\subset V$（V 是顶点集），Vol_S 是分割子集的容量（相当于分割区域的面积）$Vol_S\leqslant\frac{1}{2}\leqslant Vol_V$，$|\partial S|$是分割子集的边界（相当于分割区域的周长）。$\inf_S$ 表示下确界，并且在有限的顶点的图中，可以使用最小值代替下确界。

图的分割子集 S，用边集$\partial S=\{e_{ij}|v_i\in S, v_j\in \bar{S}\}$来表示，而$|\partial S|$表示为：

$$|\partial S|=\sum_{e_{ij}\in\partial S} w(e_{ij}) \tag{2}$$

其中，$\bar{S}$是 S 的补集。

根据组合容量[7-8]的定义，图的分割子集 S 的容量，可以用以下两种方式来定义：

$$Vol_S=|S| \tag{3}$$

$$Vol_S=\sum_i d_i,\ \forall v_i\in S \tag{4}$$

其中，公式（3）中定义分割子集 S 的容量，是用 S 的顶点数来表示，而式（4）中用矩阵来表示，所以选择式（4）更适合于图像分割中的计算。

图的最优分割就是在$|\partial S|$和 Vol_S 之间找到一个使等周比 h_G 最小的一个平衡点。但是求等周集的问题是一个 NP 完全（NP complete）问题[6]。所以，求最小等周比主要是通过启发式的方法，用解线性方程来求解方程。

$\boldsymbol{x}$ 是所有顶点用二进制值表示后的方向向量，表示为：

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{if } v_i\in S\\ 0 & \text{if } v_i\in \bar{S}\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 可能包括一个单个顶点的分割。

定义一个 $n\times n$ 的 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}$，表示为：

$$\boldsymbol{L}_{v_iv_j}=\begin{cases}d_i & \text{if } i=j\\ -w(e_{ij}) & \text{if } e_{ij}\in E\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 是用行和列来表示图的每个顶点的对称矩阵，$\boldsymbol{L}_{v_iv_j}$表示由顶点 v_i 和 v_j 组成的矩阵，d_i 是顶点 v_i 的度。

通过定义了式（6）后，式（2）表示为：

$$|\partial S|=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

假设 $\boldsymbol{r}$ 是全 1 的方向向量，并用在图的分割子集 S 中，以式（7）的最小值作为条件，就得到如下定义的固定容量：

$$Vol_S=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}=k \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{d}$ 是图顶点度的向量，k 是满足 $0<k<\frac{1}{2}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$ 的任意常数。

所以，把式（7）和式（8）代入式（1）得：

$$h_G=\min_x \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}} \tag{9}$$

由式（9）可以知等周常量 h_G 是关于方向向量 $\boldsymbol{x}$ 的函数，并且式（9）在性质上跟 Ncut（归一化分割）、平均分割[2]和 Ratio（比例）分割[7]是相似的，也就是大分割使用小的边界进行分割，但是等周算法最大的不同，是用解线性方程的方法求解式（9）。

为了得到最佳的分割（等周比最小），采用 $\boldsymbol{x}$ 的非负实值来消除 $\boldsymbol{x}$ 中的二值限制，并且定义代价函数如下：

$$C(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}-\phi(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}-k) \tag{10}$$

其中，$C(\boldsymbol{x})$是关于 $\boldsymbol{x}$ 的代价函数，ϕ 是 Lagrange 算子。$\boldsymbol{L}$ 是一个正的半正定矩阵[8]且 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$ 是非负的，所以 $C(\boldsymbol{x})$的驻点就是它的极小点。对式（10）两边取微分可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}C(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}-\phi\boldsymbol{d} \tag{11}$$

使式（10）取最小值的 $\boldsymbol{x}$ 应该满足式（11）为零，所以求 $C(\boldsymbol{x})$的最小值转为求解线性方程：

$$2\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}=\phi\boldsymbol{d} \tag{12}$$

这里所关心的不是 $\boldsymbol{x}$ 的实值，而是关心 $\boldsymbol{x}$ 的相对值，因此可以省略 2 和 ϕ 这两个常数，将式（12）改写为：

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d} \tag{13}$$

由式（6）知 $\boldsymbol{L}$ 的行或列相加之和等于 0，即 $\boldsymbol{L}$ 是一个奇异矩阵，所以式（13）将无法得到唯一解。因此还需要一个额外的条件才可以求解式（13）。采用文献[9]的方法，把奇异矩阵变为非奇异，该方法主要是通过找出图顶点的度 $\boldsymbol{d}$ 向量中，具有最大度的顶点 v_g 并删除。这方法能很好地应用在图像处理当中，因为最大度的顶点会落在区域的内部或者相同强度的区域中。所以把其应用到解式（13），把 $\boldsymbol{L}$ 的第 g 行和第 g 列、$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的第 g 行删除后，得到一个新的非奇异线性方程：

$$\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{d}^* \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{L}^*$ 由 $\boldsymbol{L}$ 变换得到的，$\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{d}^*$ 是由 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 变换得到的。

解线性方程（14）得到的 $\boldsymbol{x}$，是个实数向量。但是，为了得等周比最小的割，需要使用与式（5）相类似的方法对实数向量 $\boldsymbol{x}$ 进行二值化。实数向量二值化最常用的方法是中值割和比例割[10]，这里所说的比例割与文献[7]的比例割是不一样的，前者是实数向量二值化的方法，后者是一种图像分割方法。所以，选用文献[10]中实数向量二值化的比例割方法，求出最小的等周比；另外，计算式（14）需要解一个大的稀疏矩阵方程，采用文献[11]求稀疏矩阵的高效方法。

3　基于等周分割算法的岩心图像分割

应用等周分割算法进行岩心图像分割，首先把岩心图像的像素关系映射到图中边的权值上，使用的是标准的权值函数[2]：

$$w_{ij}=\exp(-\beta(I_i-I_j)^2) \tag{15}$$

其中，β 表示常数，I_i 表示顶点 v_i 的强度值。用欧拉距离的平方代替$(I_i-I_j)^2$；对岩心图像的强度的差值进行归一化处理，增强 β 的取值范围。

算法的实现步骤：

（1）使用式（15）计算岩心图像所对应图的边权值。然后，建立 Laplacian 矩阵 $\boldsymbol{L}$，如式（8）。

（2）使用文献[9]的方法，计算度向量 $\boldsymbol{d}$ 中最大度的顶点 v_g，并且把 $\boldsymbol{L}$ 的第 g 行和第 g 列、$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 的第 g 行删除后，得到 $\boldsymbol{L}^*$、$\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{d}^*$。

（3）解线性方程式（15），得 $\boldsymbol{x}$。

（4）利用文献[10]的方法，在比例割中选择阈值，对实数向量 $\boldsymbol{x}$ 进行二值化，得等周比最小的割。例如：选择的阈值是 α，当 $x_i\leqslant\alpha$ 是 1，否则是 0。

（5）计算出每次分割的等周比，并判断等周比是否大于预先设定的停止参数，否则继续递归。

本分割算法选择 4-邻接方法，减少了加到运算中的边，提高了矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的稀疏度，降低了解式（14）的时间；另外，避免了

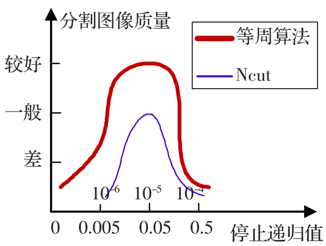
Ncut 方法所使用复杂的空间滤波。最后,本算法由两个参数控制:一个是式(15)的 β 参数,一个是算法步骤(5)的结束递归参数;其中 β 参数影响等周算法在特征空间(例如:RGB 彩色值,灰度图像的强度值)改变时的灵敏度,结束递归参数决定最大可接受等周比。

4 实验结果与分析

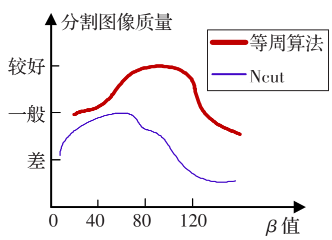
岩心图像分割实验是在 Matlab7.1 上实现的,实验机器为 Intel® Celeron® 2.00 GHz,512 M 内存。实验主要是把改进的等周分割算法与 Ncut 分割算法[2]进行比较。实验比较的内容是岩心图像的分割质量、分割时间和算法稳定性等。

图 1 是通过大量的实验数据所画出的分割性能比较图,其中图 1(a)分析对比 Ncut 方法和 Isoperimetric 方法分割岩心图像的质量和停止递归值的关系,图 1(b)是分割岩心图像的质量和 β 值的关系。图 1(c)是分割岩心图像的时间和稳定性的关系。图 2(a)是原始岩心图像,图 2(b)是 Ncut 算法分割后的岩心图像,图 2(c)是 Isoperimetric 算法的分割后岩心图像。

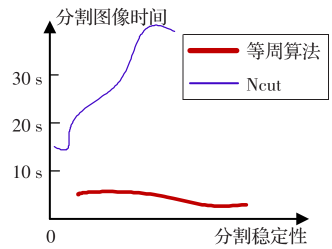
通过以上分割性能比较,可以得出:Isoperimetric 算法的停止递归值比 Ncut 算法小很多,一方面减少递归的次数,另一方面增强图像分割的质量;Isoperimetric 算法 β 值的动态取值范围比 Ncut 大许多,而且在较大 β 范围内可以分割出较好的效果;Isoperimetric 算法的稳定性比 Ncut 算法的稳定性好,分割图像时不易受岩心图像的变化和岩心图像噪声的影响,并且分割同样的岩心图像,Ncut 所花的时间比 Isoperimetric 算法高几个数量级。



(a)分割岩心图像的质量和停止递归值的关系



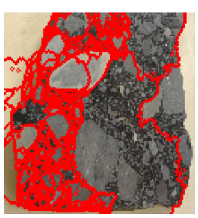
(b)分割岩心图像的质量和 β 值的关系



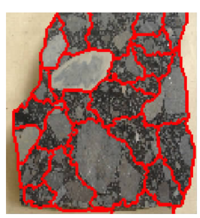
(b)分割岩心图像的时间和稳定性的关系

图 1 岩心图像分割性能分析

(255×255)
(a)原始岩心图像



β=60,递归停止=0.05
(b)Ncut 算法[1]



β=96,递归停止=10^{-5}
(c)Isoperimetric 算法

图 2 岩心图像分割结果

5 小结

利用基于图论的等周(Isoperimetric)分割算法,对岩心图像进行分割。该分割算法采用 4-邻接法、通过线性方程求解和免去了复杂的空间滤波。大量的实验表明,改进算法在分割岩心图像的质量、效率和稳定性等方面,都优于图论的 Ncut[2] 分割方法。在岩心图像分割当中,本算法具有很大的实际应用价值。

参考文献:

[1] 吴晓红,王正勇,罗代升.一种融合分水岭与 ISODATA 的岩心图像分割方法[J].计算机应用,2008,28(1):211-219.

[2] Shi J,Malik J.Normalized cuts and image segmentation[J].IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence,2000,22(8):888-905.

[3] Sarkar S,Soundararajan P.Supervised learning of large perceptual organization:Graph spectral partitioning and learning automata[J].IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence,2000,22(5):504-525.

[4] Boykov Y,Jolly M P.Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in N-D images[C]//Proc Int'l Conf Computer Vision,July 2001,1:105-112.

[5] Rege M.Co-clustering documents and words using bipartite isoperimetric graph partitioning[J].IEEE Trans Digital Object Identifier,2006:532-541.

[6] Mohar B.Isoperimetric numbers of graphs[J].J Combinatorial Theory,Series B,1989,47:274-291.

[7] Wang S,Siskund J M.Image segmentation with ratio cut[J].IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence,2003,25(6):675-690.

[8] Fiedler M.Special matrices and their applications in numerical mathematics[M].[S.l.]:Martinus Nijhoff Publishers,1986.

[9] Grady L.Space-variant computer vision:A graph-theoretic approach[D].Boston Univ,2004.

[10] Hagen L,Kahng A B.New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering[J].IEEE Trans on CAD of Integrated Circuits and Systems,1992,11(9).

[11] Gilbert J,Moler C,Schreiber R.Sparse matrices in MATLAB:Designand implementation[J].SIAM J Matrix Analysis and Applications,1992,13(1):333-356.