

SIMO 和 MISO 系统绝对稳定性问题的 一个猜想和几个推论

夏超英¹

摘要 首先分析了具有多个非线性特性的 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题, 指出应用已知的频域判据来解决上述问题很难奏效. 然后, 基于所有孤立部分传递函数都正实的充分必要条件给出了上述系统为稳定的一个猜想, 当传递函数的零极点都位于虚轴上时, 由这一猜想得到了一个已知的结论; 当传递函数的零极点都位于实轴上时, 由这一猜想得到了一个新的结论, 本文证明该结论是正确的; 最后, 根据这一猜想, 给出了传递函数极点位于复平面的一个例子, 它涉及到一类系数矩阵为时变正定矩阵的振动方程的稳定性问题, 值得去深入研究.

关键词 稳定性, SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性, 时变系统
中图分类号 TP13

A Conjecture and Its Several Deductions about the Absolute Stability of SIMO and MISO Systems

XIA Chao-Ying¹

Abstract Firstly, the absolute stability problems of the SIMO and MISO systems with several nonlinear characteristics are analyzed. The difficulty of using the known frequency domain theorems to solve the above problems is presented. Secondly, a conjecture about the stability for these systems is proposed based on the sufficient and necessary condition of the isolated transfer function being positive real. When the zeros and poles of the transfer functions lie in the imaginary axis, a known conclusion is derived from the conjecture; while the zeros and poles are on the real axis, a new result is obtained and is proved in this note. Finally, according to the conjecture, an example with poles existing on the complex plane is presented, which is not only interesting but also challenging.

Key words Stability, absolute stability of SIMO and MISO systems, time-varying system

绝对稳定性理论的概念和方法在非线性系统的稳定性分析中有着重要的意义. 根据这一理论, 设计者只需对系统的线性定常方框进行适当的设计, 便可保证系统对于满足一定条件的非线性反馈方框是全局渐近稳定的, 而不必去过多地关心非线性反馈方框的细节.

对于含有单一非线性特性的系统, 人们已经得到了许多有关其绝对稳定性问题的判据^[1-4], 其中最著名也是最有效的是所谓的频域判据^[1-3]. 然而, 在试图将它推广到含有多个非线性特性的 MIMO 系统时^[5-8], 却遇到了困难, 所得结果的保守性比较强, 不便于应用. 特别地, 正如本文将要指出的, 应用频域判据来解决 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题就难以奏效.

对具有多个时变非线性特性的 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题, 本文应用所有孤立传递函

数都正实的概念^[9]提出了一个猜想, 当所涉及的传递函数的零极点都位于虚轴上时, 由这一猜想得到了一个已知的结论; 当所涉及的传递函数的零极点都位于实轴上时, 由这一猜想得到了一个新的结论, 本文给出了它的证明; 最后, 根据这一猜想, 给出了传递函数极点位于复平面的一个例子, 它涉及到一类系数矩阵为时变正定矩阵的振动方程的稳定性问题, 值得去深入研究.

1 已知的绝对稳定性问题的主要结果

在图 1 (见下页) 所示的含有非线性孤立部分的反馈系统中, 设其中线性部分的状态方程描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m$. 图 1 中, 非线性向量函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 是 m 维静态非储能, 它的第 i 个分量只依赖于 \mathbf{v} 的第 i 个元素,

收稿日期 2006-12-22 收修改稿日期 2007-04-22
Received December 22, 2006; in revised form April 22, 2007
1. 天津大学电气与自动化工程学院 天津 300072
1. School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00542

满足约束条件

$$\begin{aligned} f_i(0) &= 0 \\ 0 < v_i f_i(v_i) < l_i v_i^2, \quad \forall v_i \neq 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (2)$$

或者还依赖于时间, 满足约束条件

$$\begin{aligned} f_i(0, t) &= 0 \\ 0 < v_i f_i(v_i, t) < l_i v_i^2, \quad \forall v_i \neq 0, \forall t > 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3)$$

即它们的输入输出特性处于一、三象限一扇形区域之内. 显然 $\boldsymbol{x} = 0$ 是系统 (1)、(2) 和系统 (1)、(3) 的平凡解. 记正定对角矩阵

$$L = \text{diag}\{l_1, l_2, \dots, l_m\} \quad (4)$$

将满足约束条件 (2) 的非线性定常函数的全体记为函数类 $F_1(0, L)$, 满足约束条件 (3) 的非线性时变函数的全体记为函数类 $F_2(0, L)$, 有

定义 1. 当系统 (1)、(2) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是全局渐近稳定时, 称系统 (1)、(2) 关于非线性定常函数类 $F_1(0, L)$ 为绝对稳定的.

定义 2. 当系统 (1)、(3) 的平凡解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是全局渐近稳定时, 称系统 (1)、(3) 关于非线性时变函数类 $F_2(0, L)$ 为绝对稳定的.

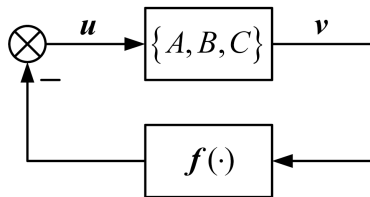


图 1 含有非线性孤立部分的系统框图
Fig. 1 The block diagram of a system with a nonlinear isolated part

记图 1 系统线性部分的开环传递函数矩阵 $\Sigma(s) = C^T(sI - A)^{-1}B$, 下面的定理 1 和定理 2 给出至今有关绝对稳定性问题频域判据的主要结果.

定理 1. 系统 (1)、(2) 关于非线性定常函数类 $F_1(0, L)$ 为绝对稳定的充分条件为:

- 1) A 的所有特征值的实部小于零;
- 2) $\{A, B\}$ 可控, $\{A, C^T\}$ 可观, 存在正定对角矩阵

$$P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$$

和半正定对角矩阵

$$Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$$

使传递函数矩阵

$$T(s) = PL^{-1} + (P + sQ)\Sigma(s) \in \{\text{PR}\} \quad (5)$$

本文中, PR 即正实 (Positive real), SPR 即严格正实 (Strictly positive real), 下同.

定理 2. 系统 (1)、(3) 关于非线性时变函数类 $F_2(0, L)$ 为绝对稳定的充分条件为:

- 1) A 的所有特征值的实部小于零;
- 2) $\{A, B\}$ 可控, $\{A, C^T\}$ 可观, 存在正定对角矩阵

$$P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$$

使传递函数矩阵

$$T(s) = PL^{-1} + P\Sigma(s) \in \{\text{PR}\} \quad (6)$$

对于所有 m 个限制非线性特性的扇形区都扩展为整个开的一、三象限的情况, 函数类 $F_1(0, L)$ 和 $F_2(0, L)$ 相应地记为 $F_1(0, \infty)$ 和 $F_2(0, \infty)$, 则定理 1 和定理 2 中的 $L^{-1} = 0$.

应用定理 1 和定理 2 于单变量系统 ($m = 1$), 即为著名的 Popov 频率判据^[1] 和圆判据^[3]. 定理 2 和圆判据可以应用于非线性函数为时变的场合, 但由此得到的系统为绝对稳定的条件相对保守. 例如, 对于函数类 $F_2(0, \infty)$, 应用定理 2 得到的结果和根据超稳定性理论得到的结果实际是相同的.

2 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题

在实际问题中, 含有多个非线性特性的单输入多输出 (SIMO) 系统和多输入单输出 (MISO) 系统的稳定性问题具有代表性. 本节的内容将说明, 当非线性特性的增益较大或其大小范围事先难以估计时 (对应于函数类 $F_1(0, \infty)$ 和 $F_2(0, \infty)$, $L^{-1} = 0$), 应用上面的定理 1 和定理 2 很难奏效.

这里所谓含有多个非线性特性的 SIMO 系统的绝对稳定性问题, 指图 2 (见下页) 所示系统零平凡解的全局渐近稳定性问题, 其中对非线性函数 $f_i(\cdot)$ 的约束同前, 虚线框内线性部分 SIMO 系统的最小实现为 $\Sigma_1 = \{A_1, \boldsymbol{b}_1, C_1\}$, 即 $\{A_1, \boldsymbol{b}_1\}$ 可控, $\{A_1, C_1^T\}$ 可观, 传递函数矩阵

$$\Sigma_1(s) = C_1^T(sI - A_1)^{-1}\boldsymbol{b}_1 = [W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)]^T$$

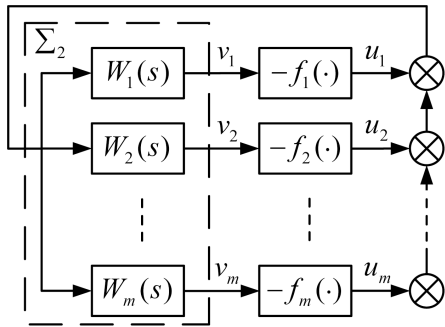


图 2 含有多个非线性特性的 SIMO 系统
Fig.2 The SIMO feedback system with several nonlinear characteristics

所谓含有多个非线性特性的 MISO 系统的绝对稳定性问题, 指图 3 所示系统零平凡解的全局渐近稳定性问题 (图 2 和图 3 互为对偶系统, 即将图 2 系统的结点变为综合点, 将综合点变为取出点, 信号传递方向取反即得到图 3 的系统, 反之亦然), 其中对非线性函数 $f_i(\cdot)$ 的约束同前, 虚线框内线性部分 MISO 系统的最小实现为 $\Sigma_2 = \{A_2, B_2, c_2\}$, 即 $\{A_2, B_2\}$ 可控, $\{A_2, c_2^T\}$ 可观, 传递函数矩阵

$$\Sigma_2(s) = c_2^T (sI - A_2)^{-1} B_2 = [W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)]$$

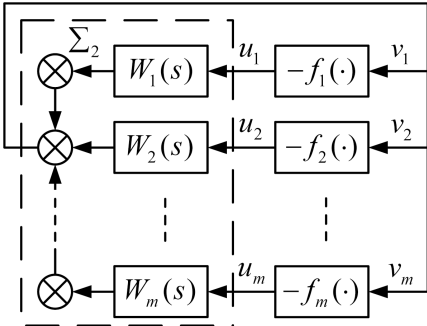


图 3 含有多个非线性特性的 MISO 系统
Fig.3 The MISO feedback system with several nonlinear characteristics

为使用定理 1 和定理 2 讨论图 2 系统的绝对稳定性问题, 将图 2 中虚线框内 SIMO 线性系统部分扩展为以 u_1, u_2, \dots, u_m 作为输入, v_1, v_2, \dots, v_m 作为输出的 m 维输入 m 维输出系统, 显然其传递函数矩阵为

$$\Sigma_3(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & W_1(s) & \dots & W_1(s) \\ W_2(s) & W_2(s) & \dots & W_2(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_m(s) & W_m(s) & \dots & W_m(s) \end{bmatrix}$$

记 $B_1 = [b_1, b_1, \dots, b_1]$, 则系统 $\Sigma_3 = \{A_1, B_1, C_1\}$ 是 $\Sigma_3(s)$ 的一个最小实现, 与系统 Σ_1 有相同的维数. 于是, 对定常非线性函数类 $F_1(0, \infty)$, 应用定理 1, 图 2 所示系统为绝对稳定的充分条件为存在对角矩阵

$$P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_m\} > 0$$

和

$$Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_m\} \geq 0$$

使 $(P + sQ)\Sigma_3(s) \in \{\text{PR}\}$. 而对时变非线性函数类 $F_2(0, \infty)$, 应用定理 2, 图 2 系统为绝对稳定的充分条件为存在对角矩阵

$$P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_m\} > 0$$

使 $P\Sigma_3(s) \in \{\text{PR}\}$. 正如下面引理 1 所指明的, 这些条件对于传递函数矩阵 $\Sigma_3(s)$ 的要求是很强的.

引理 1. 各行中各元素相等的传递函数矩阵

$$\Sigma(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & W_1(s) & \dots & W_1(s) \\ W_2(s) & W_2(s) & \dots & W_2(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_m(s) & W_m(s) & \dots & W_m(s) \end{bmatrix} \in \{\text{PR}\}$$

的充分必要条件是

$$W_1(s) = W_2(s) = \dots = W_m(s) \in \{\text{PR}\}$$

证明. 充分性显然, 下面证必要性.

设 $\Sigma(s) \in \{\text{PR}\}$, 则 Hermite 矩阵

$$H(\omega) = \Sigma(j\omega) + \Sigma^T(-j\omega) \geq 0$$

考察 $H(\omega)$ 的 $m(m-1)/2$ 个二阶主子式, 有

$$\begin{vmatrix} W_i(j\omega) + W_i(-j\omega) & W_i(j\omega) + W_j(-j\omega) \\ W_j(j\omega) + W_i(-j\omega) & W_j(j\omega) + W_j(-j\omega) \end{vmatrix} = -(\text{Re}[W_i(j\omega)] - \text{Re}[W_j(j\omega)])^2 - (\text{Im}[W_i(j\omega)] - \text{Im}[W_j(j\omega)])^2 \leq 0$$

于是, 要满足 Hermite 矩阵 $H(\omega) \geq 0$ 的要求, 只有

$$W_1(j\omega) = W_2(j\omega) = \dots = W_m(j\omega)$$

即

$$W_1(s) = W_2(s) = \dots = W_m(s)$$

此外, $\Sigma(s) \in \{\text{PR}\}$ 还要求其对角线上的传递函数 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s) \in \{\text{PR}\}$. \square

显然, 相同的结论对各列中各元素相等的传递函数矩阵也成立.

于是, 矩阵

$$(P + sQ)\Sigma_3(s) = \begin{bmatrix} (p_1 + q_1s)W_1(s) \\ (p_2 + q_2s)W_2(s) \\ \vdots \\ (p_m + q_ms)W_m(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (p_1 + q_1s)W_1(s) & \cdots & (p_1 + q_1s)W_1(s) \\ (p_2 + q_2s)W_2(s) & \cdots & (p_2 + q_2s)W_2(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_m + q_ms)W_m(s) & \cdots & (p_m + q_ms)W_m(s) \end{bmatrix} \in \{\text{PR}\}$$

的充分必要条件为

$$(p_1 + q_1s)W_1(s) = (p_2 + q_2s)W_2(s) = \cdots = (p_m + q_ms)W_m(s) \in \{\text{PR}\}$$

即 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)$ 必须是同一传递函数和一惯性环节以及一正增益的乘积. 而传递函数矩阵 $P\Sigma_3(s) \in \{\text{PR}\}$ 的充分必要条件为

$$p_1W_1(s) = p_2W_2(s) = \cdots = p_mW_m(s) \in \{\text{PR}\}$$

即 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)$ 是之间只差一正增益的正实传递函数.

同样, 为讨论图 3 系统的绝对稳定性问题, 将图 3 中虚线框内 MISO 线性系统部分也扩展为以 u_1, u_2, \dots, u_m 作为输入, v_1, v_2, \dots, v_m 作为输出的 m 维输入 m 维输出系统, 其传递函数矩阵为

$$\Sigma_4(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & W_2(s) & \cdots & W_m(s) \\ W_1(s) & W_2(s) & \cdots & W_m(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_1(s) & W_2(s) & \cdots & W_m(s) \end{bmatrix}$$

记 $C_2 = [c_2, c_2, \dots, c_2]$, 则系统 $\Sigma_4 = \{A_2, B_2, C_2\}$ 是 $\Sigma_4(s)$ 的一个最小实现, 与系统 Σ_2 有相同的维数. 对于定常非线性函数类 $F_1(0, \infty)$, 因为

$$(P + sQ)\Sigma_4(s) = \begin{bmatrix} (p_1 + q_1s)W_1(s) \\ (p_2 + q_2s)W_1(s) \\ \vdots \\ (p_m + q_ms)W_1(s) \\ (p_1 + q_1s)W_2(s) & \cdots & (p_1 + q_1s)W_m(s) \\ (p_2 + q_2s)W_2(s) & \cdots & (p_2 + q_2s)W_m(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_m + q_ms)W_2(s) & \cdots & (p_m + q_ms)W_m(s) \end{bmatrix}$$

不是各行中各元素相等或各列中各元素相等的传递函数矩阵, 故无法应用引理 1. 记

$$W_i(j\omega) = \text{Re}[W_i(j\omega)] + j \text{Im}[W_i(j\omega)] = U_i(\omega) + jV_i(\omega)$$

应用传递函数正实的必要条件, 考察 Hermite 矩阵

$$(P + j\omega Q)\Sigma_4(j\omega) + \Sigma_4^T(-j\omega)(P - j\omega Q)$$

的 $m(m-1)/2$ 个二阶主子式, 有

$$\begin{vmatrix} (p_i + q_ij\omega)W_i(j\omega) + (p_i - q_ij\omega)W_i(-j\omega) \\ (p_j + q_jj\omega)W_i(j\omega) + (p_i - q_ij\omega)W_j(-j\omega) \\ (p_i + q_ij\omega)W_j(j\omega) + (p_j - q_jj\omega)W_i(-j\omega) \\ (p_j + q_jj\omega)W_j(j\omega) + (p_j - q_jj\omega)W_j(-j\omega) \end{vmatrix} = -[p_iU_j(\omega) - p_jU_i(\omega) + \omega(q_iV_j(\omega) - q_jV_i(\omega))]^2 - [p_iV_j(\omega) - p_jV_i(\omega) - \omega(q_iU_j(\omega) - q_jU_i(\omega))]^2 \leq 0$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

要使等号成立, 必须使

$$\begin{aligned} p_iU_j(\omega) - p_jU_i(\omega) + \omega(q_iV_j(\omega) - q_jV_i(\omega)) &= 0 \\ p_iV_j(\omega) - p_jV_i(\omega) - \omega(q_iU_j(\omega) - q_jU_i(\omega)) &= 0 \end{aligned}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

同时成立, 将上式中的第 2 式乘上虚数单位和第 1 式相加有

$$p_i(U_j(\omega) + jV_j(\omega)) - p_j(U_i(\omega) + jV_i(\omega)) - j\omega[q_i(U_j(\omega) + jV_j(\omega)) - q_j(U_i(\omega) + jV_i(\omega))] = 0$$

显然, 只有当传递函数 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)$ 间只相差一正的增益时, 上式成立才有可能. 另外, $(P + sQ)\Sigma_4(s) \in \{\text{PR}\}$, 还要求其对角线元素 $(p_i + q_is)W_i(s) \in \{\text{PR}\}$.

对于时变非线性函数类 $F_2(0, \infty)$ 的情况, 分析结果同 SIMO 的情况, 即传递函数矩阵 $P\Sigma_4(s) \in \{\text{PR}\}$ 的充分必要条件为 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)$ 都正实且之间只差一正的增益.

因此, 应用绝对稳定性的定理 1 和定理 2 来解决上述含有多个非线性特性的 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题, 除有限和特殊的情况外, 一般是很难奏效的. 特别地, 对于非线性时变函数类 $F_2(0, \infty)$, 要求 $W_1(s), W_2(s), \dots, W_m(s)$ 都正实且之间只差一正的增益.

3 一个猜想及其推论的证明

根据文献 [9] 中关于多综合点误差模型问题的讨论以及其中的定理 1, 这里给出下面的定义 3.

定义 3. 对于图 2 和图 3 所示系统, 如果

$$W_i(s) \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\} \\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

并且

$$\frac{W_i(s)}{W_j(s)} \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\} \\ (i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j) \quad (7)$$

则称图 2 和图 3 所示系统为所有孤立部分的传递函数都正实或所有孤立部分的传递函数都严格正实.

显然, 对于图 2 和图 3 所示系统, 当其中任意 k ($0 < k < m$) 个时变非线性取为任意正常数增益时, 仍可等效为图 2 和图 3 所示的结构, 等效后的传递函数有 $m - k$ 个. 而根据文献 [9], 所有孤立部分的传递函数都正实 (严格正实) 的条件, 保证了这 $m - k$ 个传递函数都正实 (严格正实).

以图 2 所示系统 $m = 3$ 为例, 当其中任意 1 个时变非线性取为任意正常数增益时, 以时变非线性 $f_1(\cdot)$ 取为任意正常数增益 $k_1^* > 0$ 为例, 有图 4 所示系统, 所有孤立部分的传递函数都正实 (严格正实) 的条件保证了传递函数 $W_2(s)/(1 + k_1^*W_1(s))$ 和 $W_3(s)/(1 + k_1^*W_1(s))$ 是正实 (严格正实) 的. 同样也可以对 $f_2(\cdot)$ 或 $f_3(\cdot)$ 取为任意正常数增益的情况进行分析. 当其中任意 2 个时变非线性取为任意正常数增益时, 以时变非线性 $f_1(\cdot)$ 取为任意正常数增益 $k_1^* > 0$, 时变非线性 $f_2(\cdot)$ 取为任意正常数增益 $k_2^* > 0$ 为例, 有图 5 所示系统, 所有孤立部分的传递函数都正实 (严格正实) 的条件保证了传递函数 $W_3(s)/(1 + k_1^*W_1(s) + k_2^*W_2(s))$ 是正实 (严格正实) 的. 同样也可以对 $f_1(\cdot)$ 和 $f_3(\cdot)$ 取为任意正常数增益以及 $f_2(\cdot)$ 和 $f_3(\cdot)$ 取为任意正常数增益的情况进行分析.

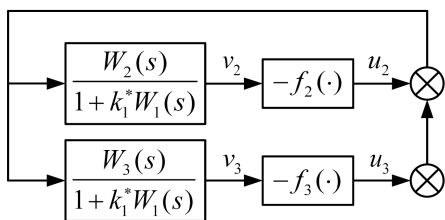


图 4 $f_1(\cdot)$ 取为任意正常数增益时的等效系统

Fig. 4 The equivalent system of Fig.2 when $f_1(\cdot) = k_1^*v_1$

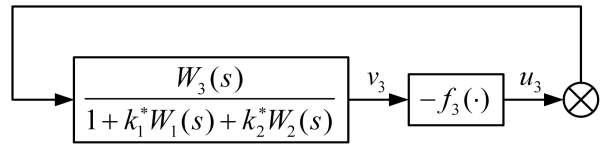


图 5 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$ 取为任意正常数增益时的等效系统

Fig. 5 The equivalent system of Fig.2 when

$$f_1(\cdot) = k_1^*v_1 \text{ and } f_2(\cdot) = k_2^*v_2$$

根据正实函数的定义, 容易验证下面的性质 1.

性质 1. 对于图 2 和图 3 所示系统, 传递函数 $W_i(s) \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 若满足式 (7) 的条件, 则 $W_i(s)$ 与任意正的常数 k_i 并联后的传递函数满足

$$W_i(s) + k_i \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\}$$

以及 $W_i(s)$ 与任意正的常数增益 z_i 反馈连接后的传递函数满足

$$\frac{W_i(s)}{1 + z_i W_i(s)} \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\}$$

同时, 它们也满足式 (7), 即有

$$\frac{W_i(s) + k_i}{W_j(s) + k_j} \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\}, \quad k_i > 0, k_j > 0 \\ (i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

$$\frac{\frac{W_i(s)}{1 + z_i W_i(s)}}{\frac{W_j(s)}{1 + z_j W_j(s)}} \in \{\text{PR}\} \text{ or } \{\text{SPR}\}, \quad z_i > 0, z_j > 0 \\ (i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

现将图 2 和图 3 所示系统中的非线性函数扩展为任意正的有界时变增益, 即令其中的

$$f_i(t, v_i) = \left\{ \begin{array}{l} f_i(t, v_i) \\ v_i \end{array} \right\} v_i = y_i^2(t)v_i$$

得到图 6 和图 7 所示的系统.

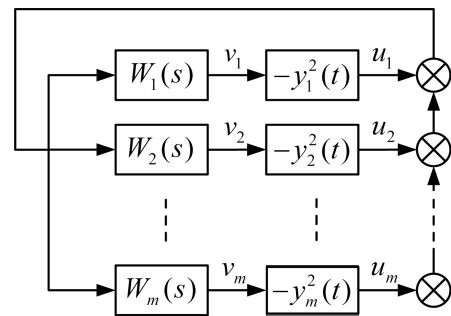


图 6 具有时变增益的系统

Fig. 6 The SIMO feedback system with several time-varying gains

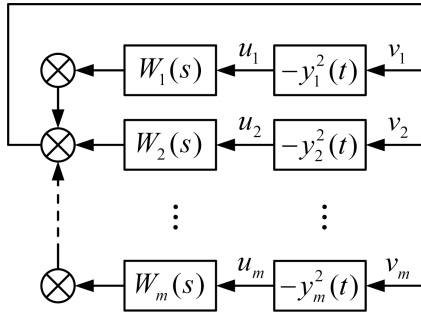


图 7 图 6 系统的对偶系统

Fig. 7 The dual system of the system in Fig. 6

对图 6 和图 7 所示系统的稳定性问题, 本文作出下面的猜想 1.

猜想 1. 图 6 和图 7 所示系统, 对于任意正有界时变增益 $y_i^2(t)$ 为稳定 (渐近稳定) 的一个充分条件是所有孤立部分的传递函数都正实 (严格正实), 即 $W_i(s) \in \{PR\}$ ($W_i(s) \in \{SPR\}$) 以及式 (7) 成立.

显然, 如果猜想 1 是对的, 则相同的条件也是图 2 和图 3 所示系统关于非线性函数类 $F_2(0, \infty)$ 为绝对稳定的充分条件.

根据电路学的基本知识, 设 $W_i(s) \in \{PR\}$, 且 $W_i(s)$ 的零极点在虚轴上是相间分布的, 则 $W_i(s)$ 是定常 LC 网络的端口阻抗函数或导纳函数; 设 $W_i(s) \in \{SPR\}$, 且 $W_i(s)$ 的零极点在负实轴上是相间分布的, 则 $W_i(s)$ 是定常 RC 或 RL 网络的端口阻抗函数或导纳函数. 在这两种情况下, 关于猜想 1, 有下面的结论 1 和结论 2.

结论 1. 图 6 和图 7 所示系统, 当 $W_i(s)$ 的所有零极点都位于复平面的虚轴上时, 根据文献 [9] 中定理 2 证明过程中的相关结论, 所有孤立部分传递函数都正实的条件导致 $W_1(s) = W_2(s) = \dots = W_m(s)$, 这时根据本文第 2 节的结论, 图 6 和图 7 所示系统是稳定的.

结论 2. 图 6 和图 7 所示系统, 当 $W_i(s)$ 的所有零极点都位于复平面的负实轴上时, 下面的定理 3 表明, 图 6 和图 7 所示系统是渐近稳定的.

复变量 s 的真有理分式函数 $g(s)$ 被称为是可以拆成正惯性的, 是指 $g(s)$ 可以表示为

$$g(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n}$$

$$k_i > 0, p_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

显然, 如果 $g(s)$ 是可以拆成正惯性的, 则 $g(s) \in \{SPR\}$. 另外, $g(s)$ 可以拆成正惯性的充分必要条件是分母多项式的特征根为负的互异实根且其零

极点在负实轴上是相间分布的, 即

$$g(s) = \frac{k(s + z_1)(z + z_2) + \dots + (s + z_{n-1})}{(s + p_1)(z + p_2) + \dots + (s + p_n)}$$

式中

$$p_1 > p_2 > \dots > p_n > 0$$

$$p_1 > z_1 > p_2 > z_2 > \dots > z_{n-1} > p_n > 0$$

定理 3. 图 6 和图 7 所示系统, 当 $W_i(s)$ 可拆分为正惯性时, 猜想 1 成立.

证明. 设图 7 中的传递函数 $W_i(s)$ 是可拆分为正惯性的, 于是有

$$W_i(s) = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{k_{ij}}{s + p_{ij}} \in \{SPR\}, \quad k_{ij} > 0, p_{ij} > 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

$W_i(s)/W_j(s)$ 的零极点也在负实轴上, 因为频率特性 $W_i(j\omega)$ 只出现在复平面的第四象限上, 于是有

$$0^\circ \leq |\angle W_i(j\omega) - \angle W_j(j\omega)| < 90^\circ, \quad 0 \leq \omega < +\infty$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m)$$

故

$$\frac{W_i(s)}{W_j(s)} \in \{SPR\}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

猜想 1 的条件满足. 设图 7 中的传递函数 $W_i(s)$ 是可拆分为正惯性的, $n = \sum_{i=1}^m n_i$, 则它可表示为图 8 (见下页).

对图 8 所示系统, 按特征值的大小从小到大将它们依次重新标记和排序. 例如, 假设 p_{11} 按其大小被排在第 i 个, 则记 $\lambda_i = p_{11}, z_i = x_1, k_{11}y_1^2(t) = w_i^2(t)$ 等等. 重新排序和标记后的系统可表示为

$$\dot{z}_i = -\lambda_i z_i - w_i^2(t) \sum_{j=1}^n z_j$$

$$(i = 1, 2, \dots, n, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n)$$

显然, 当系统 (8) 对于任意有界的时间函数 $w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)$ 为全局渐近稳定时, 图 8 所示系统对于任意有界的时间函数 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ 也是全局渐近稳定的.

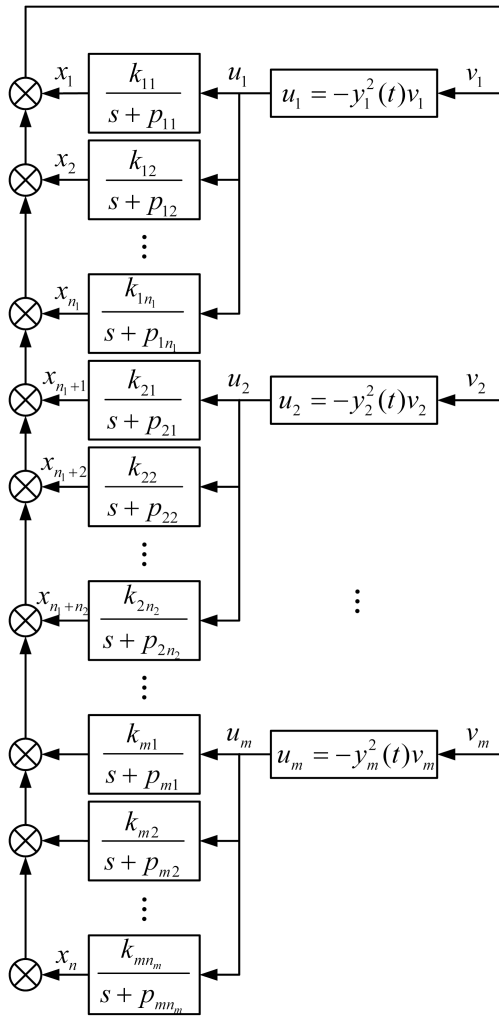


图 8 图 7 系统的等价形式

Fig. 8 The equivalent form of Fig. 7 when $W_i(s)$ is separable in terms of the first-order stable transfer function

系统 (8) 的状态方程描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - w_1^2(t) \\ -w_2^2(t) \\ \vdots \\ -w_n^2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -w_1^2(t) & \cdots & -w_1^2(t) \\ -\lambda_2 - w_2^2(t) & \cdots & -w_2^2(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_n^2(t) & \cdots & -\lambda_n - w_n^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

作状态变换

$$\xi = Tz$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \sum_{i=1}^n w_i^2(t) & \lambda_1 - \lambda_2 \\ -w_2^2(t) & -\lambda_2 \\ -w_3^2(t) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ -w_n^2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \cdots & \lambda_1 - \lambda_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

对于矩阵 $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 有矩阵测度函数的计算式^[10] $\mu_1(A(t)) = \max_j \{a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|\}$. 对于系统 (9), 因为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, 于是

$$\begin{aligned} -\lambda_1 - \sum_{i=1}^n w_i^2 + \sum_{i=2}^n |-w_i^2| &= -\lambda_1 - w_1^2 < 0 \\ -\lambda_2 + |\lambda_1 - \lambda_2| &= -\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda_1 < 0 \\ &\vdots \\ -\lambda_n + |\lambda_1 - \lambda_n| &= -\lambda_n - \lambda_1 + \lambda_n = -\lambda_1 < 0 \end{aligned}$$

故其矩阵测度函数等于 $-\lambda_1 < 0$, 系统 (9) 的解满足

$$0 \leq \|\xi(t)\|_1 = \sum_{i=1}^n |\xi_i(t)| \leq \|\xi(t_0)\|_1 e^{\int_{t_0}^t -\lambda_1 d\tau}$$

即系统 (9) 和图 8 所示系统是全局渐近稳定的。

图 6 系统是图 7 系统的对偶系统, 其状态矩阵为上述状态矩阵的转置, 则状态变换阵取为 $(T^{-1})^T$,

相应的矩阵测度函数取为

$$\mu_\infty(A(t)) = \max_i \{a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\}$$

证明步骤是相同的. □

最后, 对于图 6 和图 7 所示系统, 当 $W_i(s)$ 有位于复平面上的零极点时 (对应为 RLC 无源网络的端口阻抗函数或导纳函数), 讨论起来相当困难. 下面给出这方面的一个例子.

对于图 7 所示系统, 设 $W_1(s) = W_2(s) = \dots = W_m(s) = W(s) = s/(s^2 + \omega^2) \in \{PR\}$, 每个传递函数 $W_i(s)$ 通过常值增益 $z_i > 0$ 引入反馈, 得图 9 所示系统, 其中各个小闭环等效后的传递函数有复平面上不同位置的极点.

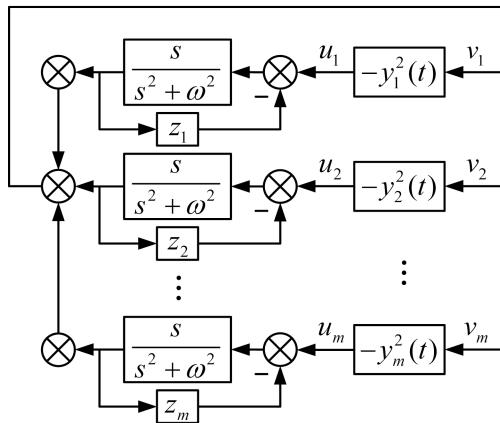


图 9 线性传递函数有复平面上根的例子
Fig. 9 The example with the poles existing on the complex plane

对于图 9 所示系统, 根据前面的性质 1, 有

$$\frac{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}{1 + z_i \frac{s}{s^2 + \omega^2}} \in \{PR\}, \quad z_i > 0, z_j > 0$$

$$\frac{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}{1 + z_j \frac{s}{s^2 + \omega^2}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j)$$

故猜想 1 的条件满足. 易验证, 这一系统的稳定性问

题, 等价于系统

$$\dot{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} z_1 + y_1^2(t) & y_1^2(t) & \cdots & y_1^2(t) \\ y_2^2(t) & z_2 + y_2^2(t) & \cdots & y_2^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m^2(t) & y_m^2(t) & \cdots & z_m + y_m^2(t) \end{bmatrix} \mathbf{y} + \omega^2 I \mathbf{y} = 0 \tag{10}$$

题的稳定性问题. 式 (10) 是一个时变系数矩阵的振动方程, 若进一步假设它可以表示成

$$\dot{\mathbf{y}} + D(t)C\dot{\mathbf{y}} + I\omega^2\mathbf{y} = 0 \tag{11}$$

式中, $D(t) = D^T(t) > 0, C = C^T > 0$, 则可以证明系统是稳定的, 因为 $C = C^T > 0$, 故存在非奇异矩阵 Q , 使 $C = Q^T Q$, 令 $Q\mathbf{y} = \mathbf{x}$, 式 (11) 变为

$$Q^{-1}\dot{\mathbf{x}} + D(t)Q^T\dot{\mathbf{x}} + \omega^2Q^{-1}\mathbf{x} = 0$$

取李亚普诺夫函数 $V(t) = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \omega^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, 则可证明它的稳定性. 更一般条件下, 若进一步假设 $y_i^2(t) > 0$, 方程式 (10) 左乘上矩阵

$$\text{diag}[\frac{1}{y_1^2(t)}, \frac{1}{y_2^2(t)}, \dots, \frac{1}{y_m^2(t)}]$$

后变为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y_1^2(t)} & & & & \\ & \frac{1}{y_2^2(t)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{y_m^2(t)} & \\ \frac{z_1}{y_1^2(t)} + 1 & 1 & \cdots & 1 & \\ 1 & \frac{z_2}{y_2^2(t)} + 1 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & \frac{z_m}{y_m^2(t)} + 1 & \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} + \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{y_1^2(t)} & & & & \\ & \frac{1}{y_2^2(t)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{y_m^2(t)} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 0 \tag{12}$$

(12)

即形式为

$$\begin{aligned} A(t)\ddot{\mathbf{y}} + B(t)\dot{\mathbf{y}} + C(t)\mathbf{y} &= 0 \\ A(t) &= A^T(t) > 0 \\ B(t) &= B^T(t) > 0 \\ C(t) &= C^T(t) > 0 \end{aligned}$$

的振动方程, 对于它的稳定性问题, 目前可用的结果并不多. 根据猜想 1, 系统 (12) 是稳定的, 这一点如果能被证实, 对猜想 1 将是一个极有力的支持. 由于时变系统稳定性问题研究上的困难, 这项工作有相当的难度, 而且, 由于时变增益的任意性, 仿真实验的验证作用也很有限.

4 结 论

正如大家所熟知的, 由于正实传递函数的引入, 有关系统绝对稳定的判据被表示成某种频率特性的形式, 这极大地刺激了人们对这一问题研究的兴趣. 然而, 这方面的已知结果对于解决 SIMO 和 MISO 系统的绝对稳定性问题, 却导致了过强的限制条件.

本文用一种不同的方法来解决这一问题, 并得到一些新的结果. 猜想 1 极具吸引力的原因在于, 判定简单方便, 大大放宽了对系统线性部分传递函数的约束条件, 有明显的频域解释, 可以为设计者指出改进设计以使系统稳定的途径和方向.

References

- 1 Popov V M. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automation and Remote Control*, 1962, **22**(8): 857–875
- 2 Moore J B, Anderson B D O. A generalization of the Popov criterion. *Journal of the Franklin Institute*, 1968, **285**(6): 488–492
- 3 Sandberg I W. A frequency-domain condition for the stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element. *Bell System Technical Journal*, 1964, **43**: 1601–1608

- 4 Liao Xiao-Xin. *Theory and Application of Stability for Dynamical Systems*. Beijing: National Defence Industry Press, 2000
(廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京: 国防工业出版社, 2000)
- 5 Safonov M, Athans M. A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(2): 415–422
- 6 Megretski A. Necessary and sufficient conditions of stability: a multiloop generalization of the circle criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(5): 753–756
- 7 Narendra K S, Taylor J H. *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*. New York: Academic Press, 1973
- 8 Xie Hui-Min. *Absolute Stability Theory and Application*. Beijing: Science Press, 1986
(谢惠民. 绝对稳定性理论与应用. 北京: 科学出版社, 1986)
- 9 Xia Chao-Ying. Multi-adding-point error model and a conjecture about the sufficient condition of its stability. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(2): 183–191
(夏超英. 多综合点误差模型及其稳定性充分条件的一个猜想. 自动化学报, 2002, **28**(2): 183–191)
- 10 Vidyasagar M [Author], Xu De-Min [Translator]. *Nonlinear System Analysis*. Beijing: National Defence Industry Press, 1983
(维德雅瑟格 [著], 徐德民 [译]. 非线性系统分析. 北京: 国防工业出版社, 1983)



夏超英 天津大学电气与自动化工程学院教授. 主要研究方向为控制理论与应用, 电力电子技术及装置, 电动汽车和混合动力汽车.

E-mail: xiachaoying@126.com

(**XIA Chao-Ying** Professor at School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University. His

research interest covers control theory and applications, power electronic technology and equipments, and electric vehicle and hybrid electric vehicle.)