覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集模型

巩增泰,马　延
GONG Zeng-tai,MA Yan

西北师范大学 数学与信息科学学院,兰州 730070
College of Mathematics and Information Science,Northwest Normal University,Lanzhou 730070,China
E-mail:zt-gong@163.com

GONG Zeng-tai,MA Yan.Covering rough intuitonistic fuzzy set model.Computer Engineering and Applications,2010,46(3):42-45.

Abstract: Considering the defect of equivalence relation which is too stringent in Pawlak's rough set models and the advantage of intuitionistic fuzzy sets in dealing with the uncertain information,the covering rough-intuitonistic fuzzy set models is built.In additions,the concept of roughness and rough entropy of the covering rough intuitonistic fuzzy set model are introduced to describe the uncertainty.Finally,an example is given.

Key words: rough sets;intuitonistic Fuzzy sets;covering;rough degree;rough entropy

摘　要:考虑到经典粗糙集模型中等价关系过于严格的缺陷和直觉 Fuzzy 集在处理不确定信息时所具有的表达力,建立了覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集模型,并给出了该模型下的一些性质;接着引入了覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集模型的粗糙度和粗糙熵的概念,讨论其不确定性度量;最后给出了算例。

关键词:粗糙集;直觉 Fuzzy 集;覆盖;粗糙度;粗糙熵
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2010.03.013　　**文章编号:**1002-8331(2010)03-0042-04　　**文献标识码:**A　　**中图分类号:**O159

1　引言

自从波兰数学家 Pawlak[1]于 1982 年提出粗糙集的概念以来,粗糙集理论作为一种处理不确定性知识系统的数学工具,已被广泛应用于机器学习、决策分析、过程控制、模式识别与数据挖掘等领域。直觉 Fuzzy 集最早是由 Atanassov[2]于 1986 年提出的,由于直觉 Fuzzy 集同时考虑隶属度与非隶属度两方面的信息,这使得直觉 Fuzzy 集在处理不确定信息时比传统的模糊集具有更好的表达能力和灵活性,因而是对 Zadeh[3]模糊集的补充和发展。而后,Dubois 和 Prade 考虑到论域中对象或等价关系的不确定性,提出和建立了粗糙模糊集理论[4]。由于直觉 Fuzzy 集在处理不确定信息时所具有的强表达力,2006 年,朱六兵等人讨论了粗糙直觉 Fuzzy 集[5]的性质。众所周知,经典粗糙集模型中等价关系由于过于严格以致于在应用中很难把握,2008 年,作者等人给出了基于覆盖的概率粗糙集模型及其 Bayes 决策[6]和基于覆盖的区间值粗糙模糊集模型[7]。考虑到经典粗糙集模型中等价关系过于严格的缺陷和直觉 Fuzzy 集在处理不确定信息时所具有的表达力,建立了覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集模型,并给出了该模型下的一些性质;接着引入了覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集模型的粗糙度和粗糙熵的概念,讨论其不确定性度量;最后给出了算例。

2　预备知识

定义 1[8]　设 U 是非空有限论域,$C=\{X|X\subseteq U\}$是 U 的子集族,如果 C 中的子集非空且$\cup C=U$,则称 C 是 U 的一个覆盖,称序对(U,C)为一个覆盖近似空间。

显然,论域 U 的划分是 U 的一个覆盖,所以覆盖是划分的推广。

定义 2[9]　设(U,C)为一个覆盖近似空间 $x\in U$,称

$$Md(x)=\{K\in C|x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$$

为 x 的最小描述。

定义 3[8]　设 U 为非空有限论域,C 是 U 的一个覆盖,$K\in C$,如果 K 是 $C-\{K\}$中某些集合的并,则称 K 是 C 的一个可约简元素,否则称 K 是 C 的一个不可约简元素。

定义 4[8]　设 U 为非空有限论域,C 是 U 的一个覆盖,C 中去掉所有可约简的元素后所得到的覆盖称为覆盖的约简,也称为最简覆盖,记为 reduct(C)。

定义 5[10]　设(U,R)是 Pawlak 近似空间,其中 U 为非空有限论域,R 为论域 U 上的等价关系,对任意的 $X\subseteq U$,称

$$\underline{R}X=\{x\in U|[x]_R\subseteq X\},\overline{R}X=\{x\in U|[x]_R\cap X\neq\varnothing\}$$

分别为 X 的 R 下近似与 R 上近似,其中$[x]_R$表示包含元素 $x\in U$ 的 R 等价类。

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771171);甘肃省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Gansu Province of China under Grant No.0803RJZA108)。
作者简介:巩增泰,男,教授,博士,主要研究方向为模糊分析学与粗糙集理论。
收稿日期:2009-02-16　　**修回日期:**2009-04-01

如果 $\underline{R}X=\overline{R}X$，则称 X 关于近似空间 (U,R) 是 R 可定义集，否则称 X 关于近似空间 (U,R) 是 R 粗糙集。

定义 6[2] 设 U 是一给定论域，则 U 上的一个直觉 Fuzzy 集 A 表示为

$$A=\{(x,u_A(x),v_A(x))|x\in U\}$$

其中 $u_A:U\to[0,1]$ 和 $v_A:U\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数 u_A 和非隶属函数 v_A，且对于 A 上的所有 $x\in U$，$0\leqslant u_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$，成立。

显然，每一个一般模糊子集对应于下列直觉 Fuzzy 子集

$$A=\{(x,u_A(x),1-u_A(x))|x\in U\}$$

对于 U 中的任一直觉 Fuzzy 子集 A，称 $\pi_A(x)=1-u_A(x)-v_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数。显然，对任意的 $x\in U$，$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$。如果对任意的 $x\in U$，$\pi_A(x)=v_A(x)=0$，则称 A 是完全直觉的，对于 U 中的每一个普通模糊子集 A，$\pi_A(x)=1-u_A(x)-[1-u_A(x)]=0$。

定义 7[11] 设 A 和 B 是给定论域 U 上的直觉 Fuzzy 子集，则有

(1) $A=B$ 当且仅当 $u_A(x)=u_B(x)$ 且 $v_A(x)=v_B(x)$，$x\in U$；

(2) $A\subseteq B$ 当且仅当 $u_A(x)\leqslant u_B(x)$ 且 $v_A(x)\geqslant v_B(x)$，$x\in U$；

(3) $A\cap B=\{(x,u_A(x)\wedge u_B(x),v_A(x)\vee v_B(x))|x\in U\}$；

(4) $A\cup B=\{(x,u_A(x)\vee u_B(x),v_A(x)\wedge v_B(x))|x\in U\}$；

(5) $\neg A=\{(x,v_A(x),u_A(x))|x\in U\}$。

3 覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集及其性质

定义 8 设 (U,C) 是一个覆盖近似空间，其中 U 为非空有限论域，C 为 U 的一个覆盖。若 A 是 U 上的一个直觉 Fuzzy 集，则 A 关于 (U,C) 的一对下近似 $\underline{C}(A)$ 和上近似 $\overline{C}(A)$ 定义为 U 上的一对直觉 Fuzzy 集合，其隶属函数和非隶属函数分别定义为：

$$u_{\underline{C}(A)}(x)=\inf\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\},\ v_{\underline{C}(A)}(x)=\sup\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\},\ x\in U$$

$$u_{\overline{C}(A)}(x)=\sup\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\},\ v_{\overline{C}(A)}(x)=\inf\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\},\ x\in U$$

其中 $0\leqslant u_{\underline{C}(A)}(x)+v_{\underline{C}(A)}(x)\leqslant 1$，$0\leqslant u_{\overline{C}(A)}(x)+v_{\overline{C}(A)}(x)\leqslant 1$。若对任意的 $x\in U$，$\underline{C}(A)(x)=\overline{C}(A)(x)$，则称 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 是可定义的，否则称 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 是粗糙的，这时也称 A 为粗糙直觉 Fuzzy 集。

称 $\underline{C},\overline{C}:IF(U)\to IF(U)$ 分别为覆盖广义直觉模糊下近似算子与上近似算子。

注 1 当 A 为分明集时，$\underline{C}(A)$ 和 $\overline{C}(A)$ 就退化为覆盖粗糙集的下近似和上近似[12]。

注 2 当 A 为模糊集时，$\underline{C}(A)$ 和 $\overline{C}(A)$ 就退化为基于覆盖的粗糙模糊集的下近似和上近似[13]。

定理 1 设 (U,C) 为覆盖近似空间，$A,B\in IF(U)$，则覆盖广义直觉模糊下近似算子 $\underline{C}$ 与上近似算子 $\overline{C}$ 满足以下性质：

(1) $\underline{C}(A)\subseteq A\subseteq\overline{C}(A)$

(2) $\underline{C}(U)=U$，$\overline{C}(\varnothing)=\varnothing$

(3) $\underline{C}(A\cap B)=\underline{C}(A)\cap\underline{C}(B)$，$\overline{C}(A\cup B)=\overline{C}(A)\cup\overline{C}(B)$

(4) $\underline{C}(A\cup B)\supseteq\underline{C}(A)\cup\underline{C}(B)$，$\overline{C}(A\cap B)\subseteq\overline{C}(A)\cap\overline{C}(B)$

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $\underline{C}(A)\subseteq\underline{C}(B)$，$\overline{C}(A)\subseteq\overline{C}(B)$

(6) $\underline{C}(\neg A)=\neg\overline{C}(A)$，$\overline{C}(\neg A)=\neg\underline{C}(A)$

(7) $\underline{C}(\underline{C}(A))=\underline{C}(A)$，$\overline{C}(A)=\overline{C}(\overline{C}(A))$

证明 (1) 由于 $u_{\underline{C}(A)}(x)=\inf\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\leqslant u_A(x)\leqslant\sup\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\overline{C}(A)}(x)$，$v_{\underline{C}(A)}(x)=\sup\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\geqslant v_A(x)\geqslant\inf\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}=v_{\overline{C}(A)}(x)$

所以 $\underline{C}(A)\subseteq A\subseteq\overline{C}(A)$。

(2) 由于对任意的 $x\in U$，$u_{\underline{C}(U)}(x)=\inf\{u_U(y)|y\in\cap Md(x)\}=1=u_U(x)$，$v_{\underline{C}(U)}(x)=\sup\{v_U(y)|y\in\cap Md(x)\}=0=v_U(x)$。

所以 $\underline{C}(U)=U$。同理可证 $\overline{C}(A)=\varnothing$。

(3) 因为 $u_{\underline{C}(A\cap B)}(x)=\inf\{u_{A\cap B}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\inf\{u_A(y)\wedge u_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=\inf\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\wedge\inf\{u_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\underline{C}(A)}(x)\wedge u_{\underline{C}(B)}(x)=u_{(\underline{C}(A)\cap\underline{C}(B))}(x)$

又 $v_{\underline{C}(A\cap B)}(x)=\sup\{v_{A\cap B}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\sup\{v_A(y)\wedge v_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=\sup\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\wedge\sup\{v_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=v_{\underline{C}(A)}(x)\wedge v_{\underline{C}(B)}(x)=v_{(\underline{C}(A)\cap\underline{C}(B))}(x)$

所以 $\underline{C}(A\cap B)=\underline{C}(A)\cap\underline{C}(B)$。同理可证 $\overline{C}(A\cup B)=\underline{C}(A)\cup\underline{C}(B)$。

(4) 因为 $u_{\underline{C}(A\cup B)}(x)=\inf\{u_{A\cup B}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\inf\{u_A(y)\vee u_B(y)|y\in\cap Md(x)\}\geqslant\inf\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\vee\inf\{u_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\underline{C}(A)}(x)\vee u_{\underline{C}(B)}(x)=u_{(\underline{C}(A)\cup\underline{C}(B))}(x)$

再注意到 $u_{\underline{C}(A\cup B)}(x)=\sup\{v_{A\cup B}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\sup\{v_A(y)\vee v_B(y)|y\in\cap Md(x)\}\leqslant\sup\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\vee\sup\{v_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=v_{\underline{C}(A)}(x)\vee v_{\underline{C}(B)}(x)=v_{(\underline{C}(A)\cup\underline{C}(B))}(x)$

所以 $\underline{C}(A\cup B)\supseteq\underline{C}(A)\cup\underline{C}(B)$，同理可证 $\overline{C}(A\cap B)\subseteq\overline{C}(A)\cap\overline{C}(B)$。

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $u_{\underline{C}(A)}(x)=\inf\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\leqslant\inf\{u_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\overline{C}(B)}(x)$，$v_{\underline{C}(A)}(x)=\sup\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}\geqslant\sup\{v_B(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\overline{C}(B)}(x)$

所以 $\underline{C}(A)\subseteq\underline{C}(B)$。同理可证 $\overline{C}(A)\subseteq\overline{C}(B)$。

(6) 因为 $u_{\underline{C}(\neg A)}(x)=\inf\{u_{(\neg A)}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\inf\{v_A(y)|y\in\cap Md(x)\}=v_{\overline{C}(A)}(x)=u_{\neg\overline{C}(A)}(x)$

又 $v_{\underline{C}(\neg A)}(x)=\sup\{v_{(\neg A)}(y)|y\in\cap Md(x)\}=\sup\{u_A(y)|y\in\cap Md(x)\}=u_{\overline{C}(A)}(x)=u_{\neg\overline{C}(A)}(x)$

所以 $\underline{C}(\neg A)=\neg\overline{C}(A)$，同理可证 $\overline{C}(\neg A)=\neg\underline{C}(A)$。

(7) 由 (1) 可知，$\underline{C}(\underline{C}(A))\subseteq\underline{C}(A)$，下证 $\underline{C}(\underline{C}(A))\supseteq\underline{C}(A)$。

由于当 $y\in\cap Md(x)$ 时，对任意的 $K\in\cap Md(x)$，都有 $y\in K$，从而存在 $K'\subseteq K$，使 $K'\in\cap Md(y)$，于是，$\cap Md(y)\subseteq\cap Md(x)$。这样，$u_{\underline{C}(A)}(y)=\inf\{u_A(z)|z\in\cap Md(y)\}\geqslant\inf\{u_A(z)|z\in\cap Md(x)\}=u_{\underline{C}(A)}(x)$，从而，$u_{\underline{C}(\underline{C}(A))}(x)=\inf\{u_{\underline{C}(A)}(y)|y\in\cap Md(x)\}\geqslant u_{\underline{C}(A)}(x)$。

类似地，$v_{\underline{C}(\underline{C}(A))}(x)=\sup\{v_{\underline{C}(A)}(y)|y\in\cap Md(x)\}\leqslant v_{\underline{C}(A)}(x)$。

因此 $\underline{C}(\underline{C}(A))\supseteq\underline{C}(A)$，所以 $\underline{C}(\underline{C}(A))=\underline{C}(A)$。同理可证 $\overline{C}(A)=\overline{C}(\overline{C}(A))$。

4 覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集的粗糙度

定义 9[14] 设为 (U,R) 近似空间，R 为论域 U 上的一个等价关系，$A\in F(U)$，$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1$，模糊集 A 的粗糙度定义为：$\rho_A^{\alpha,\beta}=1-\dfrac{\underline{A}_\alpha}{\overline{A}_\beta}$。其中 $\underline{A}_\alpha$ 表示 A 的 α-下近似，即 $\underline{A}_\alpha=\{x\in U|u_{\underline{A}}(x)\geqslant\alpha\}$，$\overline{A}_\beta$

表示A的β–上近似,即$\overline{A}_\beta=\{x\in U|u_{\overline{A}}(x)\geqslant\beta\}$,$|\cdot|$表示集合基数。

定义10 设U是非空有限论域,C为U的一个覆盖,$A\in IF(U)$,$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,则有$A$的$\alpha$下近似$\underline{C}_\alpha(A)=\{x\in U|u_{\underline{C}(A)}(x)\geqslant\alpha,v_{\underline{C}(A)}(x)<\alpha\}$,$A$的$\beta$上近似$\overline{C}_\beta(A)=\{x\in U|u_{\underline{C}(A)}(x)\geqslant\beta,v_{\underline{C}(A)}(x)<\beta\}$,于是粗糙直觉Fuzzy集$A$的粗糙度定义为:

$$\rho_A^{\alpha,\beta}=1-\frac{|\underline{C}_\alpha(A)|}{|\overline{C}_\beta(A)|}$$

注 $\underline{C}_\alpha(A)$可以理解为U中肯定属于A的隶属度不小于α,非隶属度不大于α的那些对象的全体,$\overline{C}_\beta(A)$以理解为U中可能属于A的隶属度不小于β,非隶属度不大于β的那些对象的全体。

定理2 粗糙直觉Fuzzy集的粗糙度$\rho_A^{\alpha,\beta}(0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1)$满足:

(1)$0\leqslant\rho_A^{\alpha,\beta}\leqslant1$;

(2)若α保持一定,则$\rho_A^{\alpha,\beta}$随β的增大而减小;

(3)若β保持一定,则$\rho_A^{\alpha,\beta}$随α的增大而增大;

(4)若$\underline{C}_\alpha(A)=U$,则$\rho_A^{\alpha,\beta}=0$;

(5)若A,B粗糙相等(即$\underline{C}(A)=\underline{C}(B)$且$\overline{C}(A)=\overline{C}(B)$),则对于任意的$\alpha,\beta(0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1)$,有$\rho_A^{\alpha,\beta}=\rho_B^{\alpha,\beta}$。

证明 (1)由于$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,故$\underline{C}_\alpha(A)\subseteq\overline{C}_\beta(A)$,于是$0<|\underline{C}_\alpha(A)|\leqslant|\overline{C}_\beta(A)|$,$0\leqslant\frac{|\underline{C}_\alpha(A)|}{|\overline{C}_\beta(A)|}\leqslant1$,所以有$0\leqslant\rho_A^{\alpha,\beta}\leqslant1$。

(2)α保持一定,则$|\underline{C}_\alpha(A)|$不变,$\beta$增大,则$|\overline{C}_\beta(A)|$减小,于是$\frac{|\underline{C}_\alpha(A)|}{|\overline{C}_\beta(A)|}$增大,所以$\rho_A^{\alpha,\beta}$减小。

(3)证明同(2)。

(4)由于$\underline{C}_\alpha(A)\subseteq\overline{C}_\beta(A)$,又$\underline{C}_\alpha(A)=U$,故$\overline{C}_\beta(A)=U$,$\frac{|\underline{C}_\alpha(A)|}{|\overline{C}_\beta(A)|}=1$,所以$\rho_A^{\alpha,\beta}=0$。

定理3 设$A,B\in IF(U)$,$A\subseteq B$,$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,则下列事实成立:

(1)当$\overline{C}_\beta(A)=\overline{C}_\beta(B)$时,有$\rho_B^{\alpha,\beta}\leqslant\rho_A^{\alpha,\beta}$;

(2)当$\underline{C}_\alpha(A)=\underline{C}_\alpha(B)$时,有$\rho_B^{\alpha,\beta}\geqslant\rho_A^{\alpha,\beta}$。

证明 只证式(1),式(2)类似可证。

因为$A\subseteq B$,所以有$\underline{C}(A)\subseteq\underline{C}(B)$且$\overline{C}(A)\subseteq\overline{C}(B)$,故$\underline{C}_\alpha(A)\subseteq\underline{C}_\alpha(B)$,$\overline{C}_\beta(A)\subseteq\overline{C}_\beta(B)$,由于$\overline{C}_\beta(A)=\overline{C}_\beta(B)$,所以$\rho_B^{\alpha,\beta}=1-\frac{|\underline{C}_\alpha(B)|}{|\overline{C}_\beta(B)|}\leqslant1-\frac{|\underline{C}_\alpha(A)|}{|\overline{C}_\beta(A)|}=\rho_A^{\alpha,\beta}$。

定理3表明,满足条件$A\subseteq B$,并不能简单地得到$\rho_B^{\alpha,\beta}\leqslant\rho_A^{\alpha,\beta}$或$\rho_B^{\alpha,\beta}\geqslant\rho_A^{\alpha,\beta}$,只有在一定的条件下,覆盖粗糙直觉Fuzzy集的粗糙度才具有单调性。

引理1 设U是非空有限论域,C_1,C_2是U的两个覆盖,$A\in IF(U)$,且$C_1\subseteq C_2$(C_1比C_2细),则对任意的$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,有$\underline{C_1}_\alpha(A)\supseteq\underline{C_2}_\alpha(A)$,$\overline{C_1}_\beta(A)\subseteq\overline{C_2}_\beta(A)$。

证明 记$C_2=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,$C_1=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_m\}$,由$C_1\subseteq C_2$知,对任意的$Y_j$,必存在$X_i$,使得$Y_j\subseteq X_i$。对任意的$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,设$x\in\underline{C_2}_\alpha(A)$,且$x\in X_i$,则存在$Y_j$,使得$x\in Y_j\subseteq X_i$,于是$\underline{C_2}_\alpha(A)=\{x\in U|u_{\underline{C}(A)}(x)\geqslant\alpha,v_{\underline{C}(A)}(x)<\alpha\}=\{x\in U|\inf\{u_A(x)|x\in X_i\}\geqslant\alpha,\sup\{v_A(y)|y\in X_i\}<\alpha\}\subseteq\{x\in U|\inf\{u_A(x)|x\in Y_j\}\geqslant\alpha,\sup\{v_A(y)|y\in Y_j\}<\alpha\}=\underline{C_1}_\alpha(A)$,即$\underline{C_1}_\alpha(A)\supseteq\underline{C_2}_\alpha(A)$。同理可证$\overline{C_1}_\beta(A)\subseteq\overline{C_2}_\beta(A)$。

定理4 设U是非空有限论域,C_1,C_2是U的两个覆盖,且$C_1\subseteq C_2$,$A\in IF(U)$,则对任意的$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,有$(C_1)\rho_A^{\alpha,\beta}\geqslant(C_2)\rho_A^{\alpha,\beta}$。其中$(C)\rho_A^{\alpha,\beta}$表示$A$在覆盖$C$下的粗糙度。

证明 由上述引理知,$\underline{C_1}_\alpha(A)\supseteq\underline{C_2}_\alpha(A)$,$\overline{C_1}_\beta(A)\subseteq\overline{C_2}_\beta(A)$。所以,$(C_1)\rho_A^{\alpha,\beta}=1-\frac{|\underline{C_1}_\alpha(A)|}{|\overline{C_1}_\beta(A)|}\leqslant1-\frac{|\underline{C_2}_\alpha(A)|}{|\overline{C_2}_\beta(A)|}=(C_2)\rho_A^{\alpha,\beta}$。

定理4表明,随着覆盖的变细,粗糙度将会变小。

5 覆盖粗糙直觉Fuzzy集的粗糙熵

覆盖粗糙直觉Fuzzy集的粗糙度在一定程度上可以用来衡量其不确定性程度,但在有些情况下它并不能精确地反映出覆盖粗糙直觉Fuzzy集的不确定性程度。

例1 设(U,C)为覆盖近似空间,非空有限论域$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$有两个覆盖:

$C_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_6,x_7\},\{x_3,x_7\},\{x_4,x_5,x_6\}\}$

$C_2=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3,x_6\},\{x_3,x_7\},\{x_4,x_5\},\{x_6\},\{x_7\}\}$

设直觉Fuzzy集$A=\{(0.5,0.1)/x_1,(0.6,0.1)/x_2,(1,0)/x_3,(0.7,0.1)/x_4\}$。根据覆盖粗糙直觉Fuzzy集的下近似及上近似的定义,可以得到:

$\underline{C_1}(A)=\{(0.5,0.1)/x_1,(0.5,0.1)/x_2\}$

$\overline{C_1}(A)=\{(0.6,0.1)/x_1,(0.6,0.1)/x_2,(1,0)/x_3,(0.7,0.1)/x_4,(0.7,0.1)/x_5,(1,0)/x_6,(1,0)/x_7\}$

$\underline{C_2}(A)=\{(0.5,0.1)/x_1,(0.6,0.1)/x_2\}$

$\overline{C_2}(A)=\{(0.5,0.1)/x_1,(0.6,0.1)/x_2,(1,0)/x_3,(0.7,0.1)/x_4,(0.7,0.1)/x_5,(1,0)/x_6,(1,0)/x_7\}$

若取$\alpha=0.3$,$\beta=0.2$,则

$$(C_1)\rho_A^{\alpha,\beta}=1-\frac{|\{x_1,x_2\}|}{|\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}|}=\frac{5}{7}$$

$$(C_2)\rho_A^{\alpha,\beta}=1-\frac{|\{x_1,x_2\}|}{|\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}|}=\frac{5}{7}$$

很明显覆盖C_2要比覆盖C_1细,但A在覆盖C_1和覆盖C_2下的粗糙度却一样.。因此,有必要定义一个新的关于覆盖粗糙直觉Fuzzy集的不确定性度量标准。下面引入覆盖粗糙直觉Fuzzy集的粗糙熵。

在引入覆盖粗糙直觉Fuzzy集的粗糙熵之前,先介绍一下知识的粗糙熵的概念。

定义11[5] 设(U,C)是覆盖近似空间,其中U是非空有限论域,C是U的一个覆盖,$C=\{C_{01},C_{02},\cdots,C_{0m}\}$,则知识的粗糙熵定义为:

$$E(C)=\sum_{i=1}^{m}\frac{|C_{0i}|}{m}\mathrm{lb}|C_{0i}|$$

信息熵表示信息源提供的平均信息量的大小,即信息源提供的平均信息量越大,则信息源的不确定性也就越大,熵也就

越大,但从知识的粗糙性来看,知识粗糙性越小,即颗粒越小,则不确定性就越小。因此,将信息熵和粗糙熵作为知识粗糙性度量,就会得出相反的结果。然而,这两种度量标准是从不同的角度考察知识的不确定性,事实上并不矛盾。

对前面的例子来说,覆盖 C_1 与 C_2 的粗糙熵分别为:

$$E(C_1)=\frac{2}{4}\mathrm{lb}2+\frac{3}{4}\mathrm{lb}3+\frac{2}{4}\mathrm{lb}2+\frac{3}{4}\mathrm{lb}3=1+\frac{3}{2}\mathrm{lb}3$$

$$E(C_2)=4\times\frac{1}{7}\mathrm{lb}1+3\times\frac{2}{7}\mathrm{lb}2=\frac{6}{7}$$

显然,$E(C_1)>E(C_2)$。

定理 5　设(U,C)是覆盖近似空间,则 C 的粗糙熵 $E(C)$满足以下性质:

(1)$E(C)=0$ 当且仅当$|C_{0i}|=1$;

(2)$E(C)=\mathrm{lb}|U|$当且仅当 $m=1,X_1=U$。

定理 6[15]　设 C_1,C_2是 U 的两个覆盖,且 $C_1\subseteq C_2$,则 $E(C_1)\leqslant E(C_2)$,特别地,当 $C_1\subset C_2$时 $E(C_1)<E(C_2)$。这表明知识的粗糙熵随着知识粒度的变小而单调减少。

由于论域中给定对象的不确定性不仅与其本身粗糙度有关,同时还与知识的不确定性有关,为此给出覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集的粗糙熵如下:

定义 12　设(U,C)是一个覆盖近似空间,$A\in IF(U)$,$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,则 A 在(U,C)中的粗糙熵定义为:$E_C(A)=(C)\rho_A^{\alpha,\beta}E(C)$。其中$(C)\rho_A^{\alpha,\beta}$为 A 在覆盖 C 下的粗糙度,$E(C)$为覆盖 C 的粗糙熵。

根据上述覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集的粗糙熵的定义,对前面的例子,得在覆盖 C_1下 A 的粗糙熵为:$E_{C_1}(A)=(C_1)\rho_A^{\alpha,\beta}E(C_1)=\frac{5}{7}\times(1+\frac{3}{2}\mathrm{lb}3)=\frac{5}{7}+\frac{15}{14}\mathrm{lb}3$,在覆盖 C_2下 A 的粗糙熵为:$E_{C_2}(A)=(C_2)\rho_A^{\alpha,\beta}E(C_2)=\frac{5}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{30}{49}$。

显然 $E_{C_1}(A)>E_{C_2}(A)$,即覆盖越细,覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集粗糙熵越小。

事实上,由定理 4 及定理 6,有如下结论:

定理 7　设(U,C)是一个覆盖近似空间,C_1,C_2是 U 的两个覆盖,$A\in IF(U)$,$0<\beta\leqslant\alpha\leqslant1$,如果 $C_1\subseteq C_2$,则 $E_{C_1}(A)\leqslant E_{C_2}(A)$。

由此定理表明,覆盖粗糙直觉 Fuzzy 集的粗糙熵随着覆盖的变细而减小,同时它能更精确地描述粗糙直觉 Fuzzy 集的不确定性。

参考文献:

[1] Pawlak Z.Rough sets[J].International Journal of Computer and Science,1982,11:341-356.

[2] Atanassov K.Intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):87-96.

[3] Zadeh L A.Fuzzy sets[J].Inform and Control,1965,8(3):338-356.

[4] Dubois D,Prade H.Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J].International Journal of General System 1990,17:191-209.

[5] 朱六兵,王迪焕.粗糙 Vague 集及其相似性度量[J].模糊系统与数学,2006,20(6):130-134.

[6] 巩增泰,史战红.基于覆盖的概率粗糙集模型及其 Bayes 决策[J].模糊系统与数学,2008,22(4):142-148.

[7] 史战红,巩增泰.基于覆盖的区间值粗糙模糊集模型[J].西北师范大学学报,2008,44(1):15-20.

[8] Zhu W,Wang Fei-xue.Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J].Information Science,2003,152(1):217-230.

[9] Bonikowski Z,Bryniarski E,Wybraniec-Skardowska U.Extensions and intentions in the rough set theory[J].Information Science,1998,107(1):149-167.

[10] 张文修,吴伟志,梁吉业,等.粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社,2001.

[11] Atanassov K.More on intuitionistic fuzzy sets[J].Fuzzy Sets and Systems,1989,33(1):37-46.

[12] Zakowski W.Approximations in the space (U,Π)[J].Demonstration Mathematica,1983(16):761-769.

[13] 魏莱,苗夺谦.基于覆盖的粗糙模糊集模型研究[J].计算机研究与发展,2006,43(10):1917-1723.

[14] Banerjee M,Pal S K.Roughness of a fuzzy set[J].Information and Computer Science,1996,93(3):235-245.

[15] Huang B,He X,Zhou X Z.Rough entropy based on generalized rough sets covering reduction[J].Journal of Software,2004,15(2):215-220.

(上接 35 页)

[5] Shlomi T,Segal D,Ruppin E,et al.Qpath-A method for querying pathways in a protein-protein interaction network[J].BMC Bioinformatics,2006,7:199.

[6] Li Zhenping,Zhang Shihua,Wang Yong,et al.Alignment of molecular networks by integer quadratic programming[J].Bioinformatics,2007,23:1631-1639.

[7] Ferro A,Giugno R,Pigola G,et al.Net match-A Cytoscape plugin for searching biological networks[J].Bioinformatics,2007,23(7):910-912.

[8] Sjolander K.Phylogenomic inference of protein molecular function[J].Bioinformatics,2004,20:170-179.

[9] Altschul S F,Gish W,Miller W,et al.Basic local alignment search tool[J].Journal of Molecular Biology,1990,215:403-410.

[10] Altschul S F,Madden T L,Schaffer A A,et al.Gapped BLAST and PSI-BLAST:A new generation of protein database search programs[J].Nucleic Acids Research,1997,25(17):3389-3402.

[11] Heymans M,Singh A K.Building phylogenetic trees from the similarity analysis of metabolic pathways,Technical Report 2002-33[R].Department of Computer Science,University of California,Santa Barbara,2002.

[12] He Huahai,Singh A K.Closure-tree:An index structure for graph queries[C]//Proceedings of the 22nd International Conference on Data Engineering(ICDE'06).Washington,DC,USA:IEEE Computer Society,2006:38.

[13] Bandyopadhyay S,Sharan R,Ideker T.Systematic identification of functional orthologs based on protein network comparison[J].Genome Research,2006,16:428-435.

[14] Vlasblom J,Wu S,Pu S,et al.GenePro:A cytoscape plug-in for advanced visualization and analysis of interaction networks[J].Bioinformatics,2006,22(17):2178-2179.

[15] MIPS[EB/OL].http://mips.gsf.de/genre/proj/yeast/Search/Catalogs/catalog.jsp.

[16] Maslov S,Sneppen K.Specificity and stability intopology of protein networks[J].Science,2002,296:910-913.