

# PUMA 机器人逆运动模拟退火粒子群求解方法

芮 挺, 朱经纬, 蒋新胜, 廖 明

RUI Ting, ZHU Jing-wei, JIANG Xin-sheng, LIAO Ming

解放军理工大学 工程兵工程学院, 南京 210007

Engineering Institute of Engineering Corps, PLA Univ. of Sci. & Tech., Nanjing 210007, China

E-mail: rtinguu@sohu.com

**RUI Ting, ZHU Jing-wei, JIANG Xin-sheng, et al. Solving PUMA robot inverse kinematics based on simulated annealing particle swarm optimization. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(3): 27-29.**

**Abstract:** With the increase of joint number, inverse kinematics analysis of robot becomes more complex. So to establish a common analytic algorithm of inverse kinematics is very difficult. Using simulated annealing particle swarm optimization algorithm to get the solution of the robot joint variables directly from the equations of kinematics is proposed. The method to establish objective function and algorithm steps is discussed in this paper. Experimental results demonstrate the accuracy of the proposed algorithm both in position and attitude.

**Key words:** PUMA robot; inverse kinematics; simulated annealing particle swarm optimization; objective function

**摘 要:** 机器人逆运动问题随着运动关节的增多而越来越复杂, 要建立逆运动通用的解析算法相当困难。提出利用模拟退火粒子群优化算法在解空间的搜索能力, 直接从正向运动方程出发求解机器人关节变量的方法, 讨论了目标函数的建立方式及算法实现步骤。实验分析该方法在位置和姿态方面的求解精度, 并证实了算法的有效性。

**关键词:** PUMA 机器人; 逆运动学; 模拟退火粒子群优化; 目标函数

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.03.008 **文章编号:** 1002-8331(2010)03-0027-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP183

## 1 引言

机器人运动学包括正向运动学, 即给定机器人各关节变量, 计算机器人末端的位置与姿态; 逆向运动学即已知机器人末端的位置与姿态, 计算机器人对对应姿的全部关节变量。一般正向运动学的解是唯一和容易获得的, 而逆向运动学往往有多个解且分析方法更为复杂。

机器人逆运动分析是运动规划与控制中的重要问题, 但由于机器人逆运动问题的复杂性和多样性, 无法建立通用的解析算法。机构逆运动学问题实际上是一个非线性超越方程组的求解问题, 其中包括解的存在性、唯一性及求解的方法等一系列复杂问题<sup>[1]</sup>。

目前, 对逆运动求解的一般方法是根据逆运动方程组求出各关节变量的解析解。在通常情况下, 这种方法可以解决逆运动求解问题, 但在对关节变量运动范围加以约束或方程个数小于关节变量数等情况下, 采用这种方法将很不方便或根本无法求解。近年来, 采用神经网络理论求解逆运动<sup>[2-3]</sup>的研究较多, 但由于神经网络结构对最终结果影响的不确定性及需要大量已知训练样本, 使这类方法的应用受到限制。文献[4]采用的搜索机制效率低, 难以满足机器人运动规划与控制的实时性要求, 同时没有考虑位置和姿态参数对目标函数的不同贡献, 难以实现位置和姿态同时精确求解。

以应用广泛、结构复杂的 PUMA 型机器人为例, 提出采用模拟退火粒子群优化方法, 分析了位置和姿态参数对目标函数的不同影响, 从正向运动方程出发, 直接获得各关节变量值, 避免了对复杂的逆运动方程的分析与求解, 并可以保证所得解即是所求的实际解。实验证实, 采用这种方法可以获得高精度的关节变量解。

## 2 关节运动模型

为描述相邻杆件间平移和转动的关系, Denavit 和 Hartenberg<sup>[5]</sup>于 1955 年提出了一种为关节链中的每一杆件建立附体坐标系的矩阵方法, D-H 方法是为每个关节处的杆件坐标系建立 4x4 齐次变换矩阵来表示它与前一杆件坐标系的关系。

PUMA 型机器人具有 6 个自由度, 而且 6 关节均为旋转关节。基于 D-H 法的运动学描述, 只需给出机器人各关节变量就可根据式(1)得到机器人末端的位置和姿态:

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad (1)$$

$$\text{式(1)中, } T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; n \text{ 为机械手法向向量, } o \text{ 为机械手}$$

**基金项目:** 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.50608069)。

**作者简介:** 芮挺(1972-), 男, IEEE 高级会员, 博士, 副教授, 主要研究方向: 模式识别, 控制系统, 智能计算; 朱经纬(1975-), 博士, 讲师, 主要研究方向: 智能计算; 蒋新胜(1968-), 博士, 副教授, 主要研究方向: 电子技术; 廖明(1978-), 博士, 讲师, 主要研究方向: 系统仿真。

**收稿日期:** 2009-10-13 **修回日期:** 2009-12-09

滑动向量,  $\mathbf{a}$  为机械手接近向量;  $\mathbf{p}$  为机械手末端位置。

对于 PUMA 型机器人, 关节位姿变换矩阵如下:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $a_2, a_3$  是第 3、4 关节的长度,  $d_2, d_4, d_6$  是关节 2、4 和 6 的偏距,  $s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i, \theta_i$  是关节  $i$  的旋转角 ( $i=1, 2, \dots, 6$ )。

通过对 PUMA 型机器人关节运动模型的分析可以看出, 如果已知杆件几何参数及各关节变量, 由式(1)求末端位姿矩阵(正解)是很容易的, 但如果给定机器人末端位姿, 要确定此位姿下各关节变量的值(逆解)则很困难。

### 3 模拟退火粒子群逆运动求解

粒子群优化算法<sup>[6]</sup>(Particle Swarm Optimization, PSO)最早是由 Kennedy 和 Eberhard 于 1995 年提出的, 粒子群算法是一种基于群智能(Swarm Intelligence)方法的高效演化计算技术。

在每一次迭代中, 粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己。第一个极值就是粒子本身所找到的最优解, 叫做个体极值  $pBest$ ; 另一个极值是整个种群目前找到的最优解, 这个极值是全局极值  $gBest$ 。在找到这两个最优值时, 粒子根据如下公式更新自己的速度和位置:

$$v(t+1) = W \cdot v(t) + C_1 \cdot rand() \cdot [pBest(t) - x(t)] + C_2 \cdot rand() \cdot [gBest(t) - x(t)] \quad (2)$$

$$x(t+1) = x(t) + v(t+1) \quad (3)$$

其中,  $v(t+1)$  是粒子下一时刻的速度;  $x(t+1)$  是粒子下一时刻的位置;  $C_1$  和  $C_2$  是学习因子;  $W$  为惯性权重, 一般取惯性权重  $W \in [0, 1]$ 。PSO 与遗传算法、蚁群算法等智能算法相比具有更高的搜索效率, 但也存在容易陷入局部最优的问题。

在模拟退火算法(Simulated Annealing Algorithm, SA)中, 以 Metropolis 准则接受搜索结果, 使算法呈现跳跃性, 从而保证了全局最优性, 同时也降低了对初始解的依赖性。因此模拟退火算法求得的解与初始解状态无关, 并具有渐近收敛性, 已在理论上被证明是一种以概率 1 收敛于全局最优解的全局优化算法。

将 PSO 的高效与 SA 的稳定相结合, 就得到模拟退火粒子群优化算法(SA-PSO)。

在搜索算法中, 目标函数构造方式对求解的效率和精度有非常大的影响。该方法中, 目标函数定义为指定机器人位姿矩阵  $T$  与第  $t$  次搜索到的关节变量解所对应的位姿矩阵  $\bar{T}$  之间的空间距离, 搜索的目标是使式(4)取得极小值。

$$f(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |T_{ij} - \bar{T}_{ij}| \quad (4)$$

分析位姿矩阵,  $T$  和  $\bar{T}$  中  $3 \times 3$  的姿态矩阵为余弦函数值, 绝

对值均不大于 1, 而  $T$  和  $\bar{T}$  的位置向量取值可能比姿态矩阵取值大几个数量级, 因此位置参数微小的变化可能“淹没”姿态参数的变化。实验表明, 在这样的情况下, 只能实现对机器人末端位置的求解, 对姿态参数的最优搜索很可能失败。为了使姿态矩阵和位置向量对目标函数具有相同的贡献, 将  $T$  和  $\bar{T}$  中姿态矩阵元素取反余弦, 并用角度表示, 这样可使姿态和位置描述处在同一数量级, 这样不仅有利于提高搜索的效率同时还可以保证精度。

基于模拟退火粒子群优化的逆运动关节变量求解实现步骤如下:

**步骤 1** 根据所需求解关节变量的个数设置粒子的维数, 并在各关节变量所能达到的空间区域内随机初始化粒子的起始位置和起始速度, 对每个粒子初始化, 设定退火初始温度  $T_0$ , 温度冷却系数  $K$ ;

**步骤 2** 按式(4)计算每个粒子的适应值, 更新个体极值  $pBest$  和出全局极值  $gBest$ ;

**步骤 3** 按式(2)、(3), 更新各粒子的速度与位置;

**步骤 4** 计算两个位置所引起的适应值的变化量  $\Delta E$ , 若  $\Delta E \leq 0$ , 接受新值, 否则根据  $\exp(-\Delta E/T) > rand(0, 1)$  准则接受新值;

**步骤 5** 判断是否满足迭代停止条件, “否”返回步骤 2, “是”转到步骤 6;

**步骤 6** 全局极值对应的粒子为种群的最优解, 即式(4)准则下各关节变量的实际解。

### 4 实验结果与分析

为了验证该方法的有效性, 针对 PUMA 型机器人的逆运动关节变量求解, 取 PUMA 型机器人的杆件参数为:  $a_2 = 341.8$ ,  $a_3 = -20.32$ ,  $d_2 = 149.09$ ,  $d_4 = 433.07$ ,  $d_6 = 56.25$ , 设任意指定状态机器人末端位姿矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} 0.625 & 144 & 0.681 & 532 & 0.380 & 423 & 332.923 \\ 0.108 & 358 & 0.406 & 901 & -0.907 & 023 & -547.859 \\ -0.772 & 951 & 0.806 & 242 & 0.180 & 523 & 59.897 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

采用模拟退火粒子群优化方法从机器人正运动方程式(1)出发, 求解各关节变量。以式(4)作为模拟退火粒子群优化搜索的目标函数, 实验中模拟退火粒子群参数设置: 粒子数为 40, 粒子最大速度为 0.8,  $C_1 = C_2 = 2$ , 惯性权重递减函数为  $W(t) = 1 - t/N \times 0.7$ , 控制温度初值  $T_0 = 20$ ; 退火温度冷却系数  $K = 0.95$ 。

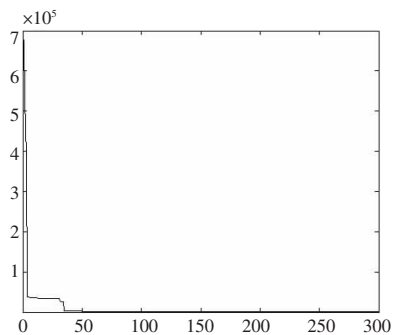


图1 目标函数的收敛过程图

模拟退火粒子群收敛后, 求得的各关节变量的最优值:

$$\theta_1 = -72.639\ 203\ 545\ 687\ 1^\circ \quad \theta_2 = 43.915\ 935\ 221\ 206\ 37^\circ$$

$$\theta_3 = -7.661\ 005\ 019\ 647\ 68^\circ \quad \theta_4 = 7.697\ 512\ 767\ 246\ 30^\circ$$

$$\theta_5 = 43.561\ 022\ 405\ 821\ 23^\circ \quad \theta_6 = 33.584\ 419\ 621\ 192\ 52^\circ$$

目标函数最小值为:  $8.701\ 647\ 306\ 448\ 249 \times 10^{-8}$ 。

下面从位置和姿态两方面分析求解精度。由于关节变量  $\theta_1 - \theta_6$  均已求出, 将各关节变量带入式(1), 通过正运动方程可以求出当前解所对应的机器人末端位置和姿态矩阵为

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0.625\ 197 & 0.681\ 547 & 0.380\ 291 & 332.922\ 90 \\ 0.108\ 324 & 0.406\ 769 & -0.907\ 085 & -547.859\ 03 \\ -0.772\ 912 & 0.608\ 302 & 0.180\ 483 & 59.879\ 66 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

指定机器人末端位置坐标  $[332.923, -547.859, 59.897]$ , 求得关节变量对应的末端位置坐标  $[332.922\ 9, -547.859\ 03, 59.896\ 6]$ , 可以看出两者的误差在  $0.001\ \text{mm}$  数量级。

由  $T$  和  $\bar{T}$  中的姿态矩阵可以求出, 指定机械手法向向量所对应三个方向角分别为  $[51.307\ 2^\circ, 83.779\ 3^\circ, 140.619\ 6^\circ]$ , 所求关节变量对应的机械手法向向量三个方向角分别为  $[51.303\ 327\ 536\ 044^\circ, 83.781\ 263\ 817\ 367^\circ, 140.616\ 176\ 265\ 925^\circ]$ ; 指定机械手滑动向量所对应三个方向角分别为  $[47.037\ 2^\circ, 65.989\ 7^\circ, 52.537\ 5^\circ]$ , 所求关节变量对应机械手滑动向量三个方向角分别为  $[47.035\ 324\ 730\ 464^\circ, 65.997\ 936\ 099\ 420^\circ, 52.533\ 145\ 729\ 307^\circ]$ ; 指定机械手接近向量所对应三个方向角分别为  $[67.460\ 1^\circ, 155.097\ 1^\circ, 79.599\ 8^\circ]$ , 所求各关节变量对应机械手接近向量三个方向角分别为  $[67.648\ 267\ 001\ 321^\circ, 155.105\ 664\ 333\ 514^\circ, 79.602\ 105\ 498\ 273^\circ]$ 。可以看出, 采用该方法求得的关节变量所确定的机器人末端姿态与给定姿态的误差在  $0.01^\circ$  的数量级。

综合位置和姿态两方面的精度分析, 该方法完全可以满足

定位的精度要求。

## 5 结论

机器人工作装置的逆运动求解是机器人机构学中的一个重要问题, 传统的方法都是建立逆运动学方程, 通过解方程的方法来求解各关节变量。但逆运动学方程的建立本身就比较复杂, 另外在关节变量运动范围受约束时, 逆运动学方程的求解就更困难了。

因此直接从正向运动方程出发, 搜索关节变量的最优解是一种更便捷有效的方法, 并且通过设置各关节变量的搜索范围, 就可以描述关节变量运动范围受约束的情况。采用模拟退火粒子群优化这一高效稳定的搜索机制, 充分考虑了机器人末端位置和姿态变量对目标函数的不同贡献, 构建了合理的目标函数。

提出的方法作为一种通用方法, 不仅可用于 PUMA 型机器人, 也可用于其他类型机器人的逆运动求解。

## 参考文献:

- [1] 蔡子兴. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [2] 荣盘祥, 杨晶, 胡林果, 等. 基于 RBF 网络的 SCARA 机器人运动逆解[J]. 电机与控制学报, 2007, 11(3): 304-305.
- [3] 彭疆, 周国荣. 基于神经网络的机器人逆运动学算法[J]. 智能控制技术, 2005, 23(4): 30-32.
- [4] 周骥平, 朱兴龙, 陶晔, 等. 基于小生境遗传算法的机械臂运动学逆解[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2004, 7(1): 28-31.
- [5] Denavit, Hartenberg R. S.A kinematic notation for law pair mechanisms based on matrices[J]. Appl Mech Trans ASME, 1955, 77: 215-221.
- [6] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization[C]//Perth Western Australia: IEEE International Conference on Neural Networks (ICNN'95), 1995, 4: 1942-1948.

(上接 19 页)

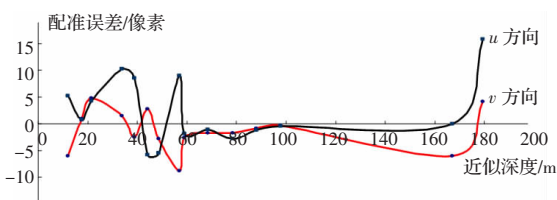


图5 近似深度参数与  $u, v$  方向像素误差关系

## 4 结语

从仿射相机逼近、仿射真实场景中的地理目标、仿射投影变换及投影矩阵几个方面讨论了基于空间仿射变换技术的虚实配准方法, 并通过实例及误差分析验证了其有效性。该方法将虚拟属性信息及虚拟物体与用户近距离范围内感兴趣的地理目标进行叠加、增强显示, 旨在增强人对空间对象的形象和深层认知, 为地理信息科学的发展开辟新的研究方向。

## 参考文献:

- [1] Azuma R. The challenge of making augmented reality work outdoors[C]//Mixed Reality: Merging Real and Virtual Worlds. [S.l.]: Springer Verlag, 1999: 379-390.
- [2] Azuma R, Baillot Y, Behringer R. Recent advances in augmented reality[C]//IEEE Computer Graphics and Applications, 2001: 34-37.
- [3] Durlach N I, Mavor A S. Virtual reality: Scientific and technologi-

cal challengers[M]. Washington, D.C.: National Academy Press, 1995.

- [4] Hedley N R, Billingham M. Explorations in the use of augmented reality for geographic visualization[EB/OL]. (2002). <http://hitl.washington.edu/publications/r-2002-63/r-2002-63.pdf>.
- [5] Holweg D, Kretschmer U. Augmented reality visualization of geospatial data[M]//Sanjay Rana J S. Frontiers of Geographic Information Technology. New York: Springer-Berlin Heidelberg, 2006: 229-240.
- [6] Koenderink J J, Van Doorn A J. Affine structure from motion[J]. Journal of the Optical Society of America, 1991, 8(2): 377-385.
- [7] Piekarski W. Interactive 3d modeling in outdoor augmented reality worlds[D]. South Australia, 2004.
- [8] Uenohara M, Kanade T. Vision-based object registration for real-time image overlay[C]//Proceeding of CVRM'95, 1995.
- [9] Ullman S, Basri R. Recognition by linear combinations of Models[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(10): 992-1006.
- [10] Vallino J R. Interactive augmented reality[D]. Department of Computer Science of the College Arts and Sciences, Rochester, New York, University of Rochester, Doctor of Philosophy, 1998.
- [11] 杜清运, 刘涛. 户外增强现实地理信息系统原型设计与实现[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2007, 32(11): 1046-1049.
- [12] 常勇, 施闯. 基于增强现实的空间信息三维可视化及空间分析[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(9): 1991-1999.
- [13] 孙敏, 陈秀万, 张飞舟, 等. 增强现实地理信息系统[J]. 北京大学学报: 自然科学版, 2004, 40(6): 906-913.