Une identité remarquable en théorie des partitions

Alain Lascoux
Centre National de la Recherche Scientifique
Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée
77454 Marne-la-Vallée Cedex, France
e-mail: Alain.Lascoux @ univ-mlv.fr
Michel Lassalle
Centre National de la Recherche Scientifique
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, France
e-mail: lassalle @ chercheur.com

Abstract

We prove an identity about partitions, previously conjectured in the study of shifted Jack polynomials. The proof given is using λ-ring techniques. It would be interesting to obtain a bijective proof.

1 Notations

Nous démontrons dans cet article une conjecture présentée dans un précédent travail [3]. Il s'agit d'une identité qui se rencontre dans l'étude des polynômes "symétriques décalés" [5, 6], où elle permet le développement explicite de certains "polynômes de Jack décalés", notamment ceux assocés aux partitions lignes et colonnes.

Cette identité se formule de manière extrêmement simple dans le cadre de la théorie classique des partitions. Cependant il nous a semblé que sa preuve ne s'obtient commodément qu'en utilisant la structure (élémentaire) de λ-anneau de l'anneau des polynômes.

Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ. On note $\lambda =$

$(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est le poids de λ, et pour tout entier $i \geq 1$ que $m_i(\lambda) = \mathrm{card}\{j : \lambda_j = i\}$ est la multiplicité de i dans λ. On identifie λ à son diagramme de Ferrers $\{(i,j) : 1 \leq i \ \leq l(\lambda), 1 \ \leq j \ \leq \lambda_i\}$. On pose

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

La généralisation suivante du coefficient binomial classique a été introduite dans [4]. Soient λ une partition et r un entier ≥ 1. On note $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ le nombre de façons dont on peut choisir r points dans le diagramme de λ de telle sorte que *au moins un point soit choisi sur chaque ligne de* λ.

Les coefficients binomiaux généralisés $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ possèdent la fonction génératrice suivante

$$\sum_{r \geq 1} \left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle q^r = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \Big((1+q)^{\lambda_i} - 1 \Big) = \prod_{i \geq 1} \Big((1+q)^{i} - 1 \Big)^{m_i(\lambda)}.$$

Soient z une indéterminée et n un entier ≥ 1. On note désormais

$$(z)_n = z(z+1)...(z+n-1) \quad , \quad [z]_n = z(z-1)...(z-n+1)$$

les factorielles "ascendante" et "descendante" classiques. On pose

$$\binom{z}{n} = \frac{[z]_n}{n!}.$$

Soit $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ une famille (infinie) d'indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $j, k \geq 0$ on pose

$$P_{jk}(X) = \sum_{|\mu| = j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i \geq 1} {X_i}^{m_i(\mu)}. \qquad (1)$$

Comme on a $\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle = 0$ si $k < l(\mu)$, la sommation est limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leq k$. Il en résulte que $P_{jk}(X)$ est un polynôme de degré k. Comme on a $\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle = 0$ si $k > |\mu|$, on a $P_{jk}(X) = 0$ pour tout $k > j$. On pose par convention $P_{00}(X) = 1$.

On a par exemple facilement

$$P_{j1}(X) = X_j,$$

$$P_{j2}(X) = \frac{1}{2}(j-1)X_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j \\ j_1, j_2 \geq 1}} X_{j_1} X_{j_2}.$$

2 Notre résultat

Le but de cet article est de démontrer la conjecture suivante, que l'un de nous a formulée dans un précédent travail ([3], Conjecture 2). Cette conjecture explicite un développement en série formelle.

Théorème 1. *Soient* z, u *et* $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ *des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers* $n, r \geq 1$ *on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i\geq 1} \left(z + \sum_{k\geq 1} u^k \frac{(i)_k}{k!} X_k \right)^{m_i(\mu)} = \sum_{j\geq 0} u^j \binom{n+j-1}{n-r} \left(\sum_{k=0}^{min(r,j)} \binom{z-j}{r-k} P_{jk}(X) \right).$$

Cette conjecture est triviale pour $r > n$ car on a alors $\left\langle \begin{smallmatrix} \mu \\ r \end{smallmatrix} \right\rangle = 0$. Pour $r = n$ on obtient le résultat suivant.

Théorème 2. *Soient* z, u *et* $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ *des indéterminées indépendantes. Pour tout entier* $n \geq 1$ *on a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{i\geq 1} \left(z + \sum_{k\geq 1} u^k \frac{(i)_k}{k!} X_k \right)^{m_i(\mu)} = \sum_{j\geq 0} u^j \left(\sum_{k=0}^{min(n,j)} \binom{z-j}{n-k} P_{jk}(X) \right).$$

Le Théorème 2 avait été auparavant conjecturé dans [4] (Conjecture 4, page 465). Pour $X = 0$ le Théorème 1 redonne le Théorème 1' de [4] (page 462).

3 Fonctions symétriques

Nous donnons d'abord ici les notations dont nous aurons besoin à propos de l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques, considérée d'un point de vue formel.

Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un ensemble de variables, qui peut être infini (nous dirons que A est un alphabet). On introduit les fonctions génératrices

$$\lambda_t(A) = \prod_{a\in A} (1 + ta) \quad , \quad \sigma_t(A) = \prod_{a\in A} \frac{1}{1-ta} \quad , \quad \Psi_t(a) = \sum_{a\in A} \frac{a}{1-ta}$$

dont le développement définit les fonctions symétriques élémentaires $\Lambda^i(A)$, les fonctions complètes $S^i(A)$ et les sommes de puissances $\psi^i(A)$:

$$\lambda_t(A) = \sum_{i\geq 0} t^i\,\Lambda^i(A) \quad , \quad \sigma_t(A) = \sum_{i\geq 0} t^i\,S^i(A) \quad , \quad \Psi_t(A) = \sum_{i\geq 1} t^{i-1}\psi^i(A).$$

Lorsque l'alphabet A est infini, chacun de ces trois ensembles de fonctions forme une base algébrique de $\mathbf{Sym}[A]$, l'algèbre des fonctions symétriques sur A (c'est-à-dire que ses éléments sont algébriquement indépendants).

On peut donc définir l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques, sans référence à l'alphabet A, comme l'algèbre sur $\mathbf{Q}$ engendrée par les fonctions Λ^i, S^i ou ψ^i.

Pour toute partition $\mu = (\mu_i, 1 \leq i \leq l(\mu)) = (i^{m_i(\mu)}, i \geq 1)$, on définit les fonctions Λ^μ, S^μ ou ψ^μ en posant

$$f^\mu = \prod_{i=1}^{l(\mu)} f^{\mu_i} = \prod_{k\geq 1} (f^k)^{m_k(\mu)},$$

où f^i désigne respectivement Λ^i, S^i ou ψ^i. Les fonctions Λ^μ, S^μ, ψ^μ forment une base linéaire de l'algèbre **Sym**.

On a la formule de Cauchy

$$\Lambda^i = \sum_{|\mu|=i} (-1)^{i-l(\mu)} \frac{\psi^\mu}{z_\mu}$$

ou encore

$$S^i = \sum_{|\mu|=i} \frac{\psi^\mu}{z_\mu}.$$

Pour toute partition μ, on peut définir les fonctions symétriques monomiales ψ_μ et les fonctions de Schur S_μ, qui forment également une base linéaire de l'algèbre **Sym**.

Les bases Λ^μ, S^μ, ψ^μ, ψ_μ ou S_μ sont notées respectivement e_μ, h_μ, p_μ, m_μ ou s_μ dans la littérature, notamment dans [7]. Les notations utilisées ici sont celles de [2], qui sont plus adaptées aux λ-anneaux.

4 L'anneau des polynômes comme λ-anneau

Nous allons démontrer le Théorème 1 en utilisant le fait que l'anneau des polynômes possède une structure de λ-anneau.

Un λ-anneau est un anneau commutatif avec unité muni d'opérateurs qui vérifient certains axiomes. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour la théorie générale, et au chapitre 2 de [8] pour leur application à l'analyse multivariée.

Nous n'utiliserons cette théorie que dans le cadre élémentaire suivant. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un alphabet quelconque. On considère l'anneau $\mathbf{R}[A]$ des polynômes en A à coefficients réels. La structure de λ-anneau de $\mathbf{R}[A]$ consiste à définir une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$.

4.1 Action de Sym

Les fonctions ψ^i formant un système de générateurs algébriques de **Sym**, écrivant tout polynôme sous la forme $\sum_{c,u} cu$, avec c constante réelle et u un monôme en $\{a_1, a_2, a_3 \dots\}$, on définit une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$, notée $[.]$, en posant

$$\psi^i[\sum_{c,u} cu] = \sum_{c,u} cu^i.$$

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbf{R}[A]$ on en déduit immédiatement $\psi^i[PQ] = \psi^i[P]\psi^i[Q]$ et $\psi^\mu[PQ] = \psi^\mu[P]\psi^\mu[Q]$.

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. Ainsi on a

$$\lambda_t[\sum_{c,u} cu] = \prod_{c,u}(1+tu)^c \quad , \quad \sigma_t[\sum_{c,u} cu] = \prod_{c,u}(1-tu)^{-c}.$$

On en déduit $S^i[P] = (-1)^i \Lambda^i[-P]$.

On notera le comportement différent des constantes $c \in \mathbf{R}$ et des monômes u :

$$\begin{array}{c} \psi_i[c] = c \quad , \quad S^i[c] = \dfrac{(c)_i}{i!} \quad , \quad \Lambda^i[c] = \dfrac{[c]_i}{i!} \\ \psi_i[u] = u^i = S^i[u] \quad , \quad \Lambda^i[u] = 0,\, i > 1 \quad , \quad \Lambda^1[u] = u. \end{array} \tag{2}$$

Il est plus correct de caractériser les "monômes" u comme éléments *de rang 1* (i.e. les $u \neq 0, 1$ tels que $\Lambda^i[u] = 0$ $\forall i > 1$), et les "constantes" $c \in \mathbf{R}$ comme les éléments invariants par les ψ_i (on dira aussi élément *de type binomial*).

Lorsqu'on utilise la théorie des λ-anneaux pour démontrer une identité algébrique, il est donc *toujours nécessaire de préciser le statut de chaque élément*. En particulier nous aurons à employer des indéterminées de rang 1, et d'autres de type binomial.

4.2 Extension aux séries formelles

On remarquera que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des éléments de rang un, alors

$$\psi^i[a_1 + a_2 + \ldots + a_n] = a_1^i + a_2^i + \ldots + a_n^i$$

est la valeur de la i-ème somme de puissance $\psi^i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dans la suite pour tout alphabet $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, on notera $A^\diamondsuit = \sum_i a_i$ la somme de ses éléments. Lorsque A est formé d'éléments de rang 1, on a ainsi pour toute fonction symétrique f,

$$f[A^\diamondsuit] = f(A). \qquad (3)$$

En particulier si q est de rang 1, on a

$$\psi^i(1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1}) = \psi^i[\sum_{k=0}^{n-1} q^k].$$

Il est naturel de vouloir écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q},$$

et d'étendre ainsi l'action de **Sym** aux fonctions rationnelles. Il est également naturel de considérer un alphabet infini $(1, q, q^2, q^3, \ldots)$, de vouloir sommer la série

$$\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q},$$

et d'étendre ainsi l'action de **Sym** aux séries formelles à coefficients réels.

Pour cela on pose

$$\psi_i\left(\frac{\sum cu}{\sum dv}\right) = \frac{\sum cu^i}{\sum dv^i},$$

avec c, d constantes réelles et u, v des monômes en $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$.

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. On munit ainsi l'anneau des séries formelles à coefficients réels d'une structure de λ-anneau. On a par exemple

$$\lambda_t[\frac{1}{1-q}] = \prod_{i\geq 1}(1+tq^i) = (-t;q)_\infty$$

$$\sigma_t[\frac{1}{1-q}] = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-tq^i} = \frac{1}{(t;q)_\infty},$$

ce qui fait apparaître des quantités bien connues en q-calcul.

4.3 Formulaire

Les relations fondamentales suivantes sont des conséquences directes des relations (2). Certaines nous seront nécessaires. Pour tous P, Q on a d'abord

$$\begin{aligned} S^i[P+Q] &= \sum_{j=0}^{i} S^{i-j}[P] S^j[Q] \\ \Lambda^i[P+Q] &= \sum_{j=0}^{i} \Lambda^{i-j}[P] \Lambda^j[Q], \end{aligned} \tag{4}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} \sigma_t[P+Q] &= \sigma_t[P]\, \sigma_t[Q] \\ \lambda_t[P+Q] &= \lambda_t[P]\, \lambda_t[Q]. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour tous P, Q on a d'autre part

$$\begin{aligned} S^i[PQ] &= \sum_{|\mu|=i} \frac{1}{z_\mu} \psi^\mu[P] \psi^\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=i} \psi_\mu[P] S^\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=i} S_\mu[P] S_\mu[Q], \end{aligned} \tag{6}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{aligned} \Lambda^i[PQ] &= \sum_{|\mu|=i} \frac{(-1)^{i-l(\mu)}}{z_\mu} \psi^\mu[P] \psi^\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=i} \psi_\mu[P] \Lambda^\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=i} S_\mu[P] S_{\mu'}[Q], \end{aligned} \tag{7}$$

où μ' désigne la partition transposée de μ.

Si P est de rang 1 et Q arbitraire, on a

$$\Lambda^i[PQ] = P^i \Lambda^i[Q].$$

Ainsi lorsque P et Q sont de rang 1, on a

$$\lambda_t[PQ] = 1 + tPQ. \tag{8}$$

5 Démonstration du Théorème 1

5.1 Préliminaires

Lemme 1. *Soit q' un élément de rang 1. Si on pose $q = q' - 1$, on a*

$$\psi^{\mu}[q] = \sum_{k \geq 1} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle q^k.$$

Preuve. On a

$$\psi^i[q] = \psi^i[q' - 1] = (q')^i - 1 = (1+q)^i - 1.$$

On applique la fonction génératrice des entiers $\left\langle \begin{smallmatrix} \mu \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$. □

A l'aide des relations (2) et (4) on obtient facilement

$$\Lambda^i[q] = (-1)^{i-1} q \quad , \quad S^i[q] = (1+q)^{i-1} q \quad , \quad i \geq 1. \tag{9}$$

On en déduit

$$\Lambda^{\mu}[q] = (-1)^{|\mu| - l(\mu)} q^{l(\mu)} \quad , \quad S^{\mu}[q] = (1+q)^{|\mu| - l(\mu)} q^{l(\mu)}.$$

On rappelle la définition du polynôme P_{jk} introduit en (1) et de la fonction symétrique monomiale ψ_μ (somme de tous les monômes différents ayant pour exposant une permutation de μ).

Lemme 2. *Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ un alphabet (fini ou infini) quelconque. Pour tout $i \geq 1$ on pose $X_i = \sum_{a \in A} a^i$. Alors pour tous entiers $j, k \geq 0$ on a*

$$P_{jk}(-X) = (-1)^k \sum_{|\mu| = j, l(\mu) = k} \psi_\mu(A).$$

Preuve. L'égalité à établir est une identité algébrique entre polynômes en les a_i. Elle est entièremnt indépendante de la structure de λ-anneau de l'anneau des polynômes. Pour la démontrer dans le cadre de la théorie des λ-anneaux, nous pouvons donc choisir le statut de chacune des indéterminées a_i.

Nous pouvons par exemple supposer que tous les éléments de l'alphabet A sont de rang 1. Compte-tenu de (3), la relation à démontrer devient dans ce cas

$$P_{jk}(-X) = (-1)^k \sum_{|\mu| = j, l(\mu) = k} \psi_\mu[A^{\diamondsuit}]. \tag{10}$$

Compte-tenu de (3), on a aussi dans ce cas

$$\psi^i[A^\diamondsuit] = \psi^i(A) = X_i \quad , \quad i \geq 1,$$

d'où pour toute partition μ,

$$\psi^\mu[A^\diamondsuit] = \psi^\mu(A) = \prod_{i\geq 1} X_i^{m_i(\mu)}.$$

La formule de Cauchy (7) implique alors

$$\begin{aligned}
\Lambda^j[qA^\diamondsuit] &= \sum_{|\mu|=j} \frac{(-1)^{j-l(\mu)}}{z_\mu} \psi^\mu[q]\psi^\mu[A^\diamondsuit] \\
&= \sum_{|\mu|=j} \frac{(-1)^{j-l(\mu)}}{z_\mu} \left(\sum_{k\geq 1} \left\langle \begin{matrix} \mu \\ k \end{matrix} \right\rangle q^k \right) \prod_{i\geq 1} X_i^{m_i(\mu)} \\
&= (-1)^j \sum_{k\geq 1} P_{jk}(-X) q^k.
\end{aligned}$$

Et d'autre part on a aussi

$$\begin{aligned}
\Lambda^j[qA^\diamondsuit] &= \sum_{|\mu|=j} \psi_\mu[A^\diamondsuit] \Lambda^\mu[q] \\
&= \sum_{|\mu|=j} \psi_\mu[A^\diamondsuit] (-1)^{j-l(\mu)} q^{l(\mu)}.
\end{aligned}$$

On en déduit (10) par comparaison. □

5.2 Méthode

Dans toute la suite de cet article, on considère un alphabet (fini ou infini) $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Pour le moment, nous ne faisons aucune hypothèse sur le statut des éléments de A. En particulier nous ne supposons pas que les a_k sont de rang 1. Pour tout $i \geq 1$ on pose

$$X_i = \psi^i(A) = \sum_{a\in A} a^i.$$

On considère quatre éléments q', z, t, u. On suppose que z est de type binomial et que $q' = 1 + q$ est de rang 1.

Pour démontrer l'identité du Théorème 1, on va montrer l'égalité des fonctions génératrices de ses deux membres. Plus précisément on écrit chaque membre de l'identité du Théorème 1 en changeant les X_i en $-X_i$, et on somme sur n et r après avoir multiplié par $(-t)^n\ (-q)^r$.

L'égalité à démontrer devient

$$\sum_{n\geq r\geq 1}\sum_{|\mu|=n}(-1)^{r-l(\mu)}(-t)^n(-q)^r\frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle}{z_\mu}\prod_{i\geq 1}\left(z-\sum_{k\geq 1}u^k\frac{(i)_k}{k!}\,X_k\right)^{m_i(\mu)}=$$

$$\sum_{n\geq r\geq 1}\sum_{j\geq 0}(-t)^n(-q)^r u^j\binom{n+j-1}{n-r}\left(\sum_{k=0}^{min(r,j)}\binom{z-j}{r-k}P_{jk}(-X)\right). \quad (11)$$

5.3 Membre de droite

Compte tenu du Lemme 2, le membre de droite de (11) s'écrit, en notant $uA=\{ua_1,ua_2,ua_3,\dots\}$,

$$\sum_{n\geq r\geq 1}\sum_{\nu}(-t)^n(-q)^r u^{|\nu|}\binom{n+|\nu|-1}{n-r}\binom{z-|\nu|}{r-l(\nu)}(-1)^{l(\nu)}\psi_\nu(A)=$$

$$\sum_{\nu}(-1)^{l(\nu)}\psi_\nu(uA)\sum_{n\geq r\geq l(\nu)}(-t)^n(-q)^r\binom{n+|\nu|-1}{n-r}\binom{z-|\nu|}{r-l(\nu)}.$$

Mais on a la relation suivante, qui est une autre façon d'écrire la formule classique du binôme :

$$\sum_{i\geq j}\binom{i-1}{j-1}t^{i-j}=\frac{1}{(1-t)^j}.$$

On en déduit immédiatement

$$\sum_{n\geq r}(-t)^n\binom{n+|\nu|-1}{n-r}=\frac{(-t)^r}{(1+t)^{|\nu|+r}}.$$

Le membre de droite de (11) s'écrit donc

$$\sum_{\nu}(-1)^{l(\nu)}\psi_\nu(uA)\left(\sum_{r\geq l(\nu)}\frac{(qt)^r}{(1+t)^{|\nu|+r}}\binom{z-|\nu|}{r-l(\nu)}\right).$$

Ce qui peut se reformuler

$$\sum_{\nu}\psi_\nu(uA)\,\frac{(-qt)^{l(\nu)}}{(1+t)^{|\nu|+l(\nu)}}\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{qt}{1+t}\right)^k\binom{z-|\nu|}{k}\right).$$

Finalement le membre de droite de (11) s'écrit

$$\sum_\nu \psi_\nu(uA)\,\frac{(-qt)^{l(\nu)}}{(1+t)^{|\nu|+l(\nu)}}\left(1+\frac{qt}{1+t}\right)^{z-|\nu|}.$$

Soit encore en posant $y=-qt/(1+t)$,

$$\sum_\nu \psi_\nu(uA)\,\frac{y^{l(\nu)}}{(1+t)^{|\nu|}}\,(1-y)^{z-|\nu|}. \tag{12}$$

5.4 Membre de gauche

Comme on a $X_k=\sum_{a\in A}a^k$, la quantité suivante, écrite au membre de gauche de (11), devient

$$z-\sum_{k\geq 1}u^k\frac{(i)_k}{k!}\,X_k = z-\sum_{k\geq 1}u^k\frac{(i)_k}{k!}\left(\sum_{a\in A}a^k\right).$$

On introduit alors l'alphabet

$$A'=\left\{\frac{1}{1-ua_1},\frac{1}{1-ua_2},\frac{1}{1-ua_3},\dots\right\}=\left\{\frac{1}{1-ua},a\in A\right\}.$$

Nous faisons désormais l'hypothèse suivante : chaque élément $\frac{1}{1-ua}$ est de rang 1. Sous cette hypothèse on a

$$\begin{aligned}\psi^i[\sum_{a\in A}\frac{1}{1-ua}] &= \sum_{a\in A}(1-ua)^{-i}\\ &= \sum_{a\in A}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{(i)_k}{k!}u^ka^k\right)\\ &= \sum_{a\in A}\left(1+\sum_{k\geq 1}\frac{(i)_k}{k!}u^ka^k\right).\end{aligned}$$

On introduit l'élément

$$B=z-\sum_{a\in A}\frac{ua}{1-ua}=z+\sum_{a\in A}\left(1-\frac{1}{1-ua}\right).$$

On a ainsi

$$z-\sum_{k\geq 1}u^k\frac{(i)_k}{k!}\,X_k=\psi^i[B].$$

Pour toute partition μ, on en déduit

$$\prod_{i\geq 1}\left(z-\sum_{k\geq 1}u^k\,\frac{(i)_k}{k!}\,X_k\right)^{m_i(\mu)}=\psi^\mu[B].$$

Compte-tenu de cette relation, le membre de gauche de (11) s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq r\geq 1}\sum_{|\mu|=n}(-1)^{r-l(\mu)}(-t)^n(-q)^r\frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle}{z_\mu}\psi^\mu[B] &= \sum_{n\geq 1}t^n\sum_{|\mu|=n}\frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu}\left(\sum_{r\geq 1}\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle q^r\right)\psi^\mu[B]\\ &= \sum_{n\geq 1}t^n\sum_{|\mu|=n}\frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu}\psi^\mu[q]\ \psi^\mu[B]\\ &= \sum_{n\geq 1}t^n\Lambda^n[qB]\\ &= \lambda_t[qB].\end{aligned}$$

La démonstration sera terminée en prouvant que le développement (12) est exactement la décomposition de $\lambda_t[qB]$ sur la base des fonctions monomiales $\psi_\nu(uA)$.

5.5 Développement de $\lambda_t[qB]$.

On maintient les notations précédentes en faisant le changement de variables $ua\to a$. On considère un alphabet $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$ et trois éléments q',z,t avec les hypothèses suivantes :

- on suppose que z est de type binomial et que $q'=1+q$ est de rang 1,
- on suppose que pour tout $a\in A$, l'élément $a'=\frac{1}{1-a}$ est de rang 1.

On a maintenant

$$B=z-\sum_{a\in A}\frac{a}{1-a}=z+\sum_{a\in A}\left(1-\frac{1}{1-a}\right).$$

Nous allons démontrer le Théorème 1 sous la forme suivante.

Théorème 3. *En posant $y=-qt/(1+t)$, on a*

$$\lambda_t[qB]=\sum_\nu\psi_\nu(A)\,\frac{y^{l(\nu)}}{(1+t)^{|\nu|}}\,(1-y)^{z-|\nu|}.$$

Preuve. On a d'abord

$$\lambda_t[qB] = \lambda_t[qz + q\sum_{a\in A}(1-a')]$$

Comme z est de type binomial, on a

$$\lambda_t[qz] = (\lambda_t[q])^z.$$

Et d'autre part la relation (9) implique

$$\lambda_t[q] = 1 + q\sum_{i\geq 1}(-1)^{i-1}t^i = 1 + \frac{qt}{1+t}.$$

Compte-tenu de (5) on en déduit

$$\begin{aligned}
\lambda_t[qB] &= \lambda_t[qz]\,\lambda_t[q\sum_{a\in A}(1-a')] \\
&= (1-y)^z\,\lambda_t[q\sum_{a\in A}(1-a')] \\
&= (1-y)^z\prod_{a\in A}\lambda_t[q(1-a')].
\end{aligned}$$

Maintenant on a $q(1-a') = (q'-1)(1-a') = q' - 1 - q'a' + a'$. Les éléments q' et a' étant de rang 1, les relations (5) et (8) impliquent

$$\lambda_t[q(1-a')] = \frac{\lambda_t[q']}{\lambda_t[1]}\,\frac{\lambda_t[a']}{\lambda_t[q'a']} = \frac{1+tq'}{1+t}\,\frac{1+ta'}{1+tq'a'} = (1-y)\frac{1+ta'}{1+t(1+q)a'}\,.$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_t[qB] &= (1-y)^z\prod_{a\in A}(1-y)\frac{1+t-a}{1+t(1+q)-a} \\
&= (1-y)^z\prod_{a\in A}(1-y)\left(1-\frac{qt}{1+t+qt-a}\right).
\end{aligned}$$

Posons alors

$$v = \frac{1}{(1+t)(1-y)} = \frac{1}{1+t+qt}.$$

La relation précédente devient

$$\lambda_t[qB] = (1-y)^z\prod_{a\in A}\left(1+y\frac{va}{1-va}\right).$$

Maintenant on a

$$\prod_{a\in A}\left(1+y\frac{va}{1-va}\right)=\sum_{N\subset A}\prod_{a\in N}y\frac{va}{1-va}.$$

Nous allons utiliser la propriété suivante, qui se vérifie facilement :

$$\sum_{\substack{N\subset A\\ \mathrm{card}N=n}}\prod_{a\in N}y\frac{va}{1-va}=y^n\sum_{l(\nu)=n}v^{|\nu|}\psi_\nu(A).$$

Soit encore

$$\lambda_t[qB]=(1-y)^z\sum_{\nu}\frac{y^{l(\nu)}}{(1+t)^{|\nu|}(1-y)^{|\nu|}}\,\psi_\nu(A).$$

On conclut immédiatement. □

6 Application

Les Théorèmes 1 et 2 peuvent permettre d'obtenir des identités remarquables en spécialisant les indéterminées X_i et z.

Nous revenons seulement ici sur les conjectures de [4], rencontrées en étudiant les polynômes symétriques décalés [5, 6]. Soit α un nombre réel positif. Pour toute partition λ et tout entier $k\geq 0$, on note

$$d_k(\lambda)=\sum_{(i,j)\in\lambda}\left(j-1-\frac{i-1}{\alpha}\right)^k.$$

On introduit la généralisation suivante de la "factorielle ascendante":

$$(z)_\lambda=\prod_{(i,j)\in\lambda}\left(z+j-1-\frac{i-1}{\alpha}\right).$$

Pour tous entiers $j,k\geq 0$ on pose

$$F_{jk}(\lambda)=P_{jk}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),d_3(\lambda),\dots).$$

C'est-à-dire qu'on choisit la spécialisation suivante

$$X_k=d_k(\lambda)\quad,\quad k\geq 1.$$

En d'autres termes, l'alphabet A tel que $X_k=\sum_{a\in A}a^k$ est alors

$$A_\lambda=\left\{j-1-\frac{i-1}{\alpha},(i,j)\in\lambda\right\}.$$

Théorème 4. *Soient x, y deux indéterminées indépendantes. Pour toute partition λ on a*

$$\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}(-1)^{i+j}\frac{x^i}{y^{i+j}}\left(\sum_{k=0}^{min(i,j)}\binom{|\lambda|-j}{i-k}F_{jk}(\lambda)\right).$$

Preuve. On montre comme dans [4] (p. 464) que

$$\frac{(y-x)_\lambda}{(y)_\lambda} = \sum_{\mu} v^{|\mu|}\frac{(-1)^{|\mu|-l(\mu)}}{z_\mu}\prod_{i\geq 1}\left(\sum_{p\geq 0}u^p\frac{(i)_p}{p!}\,d_p(\lambda)\right)^{m_i(\mu)},$$

avec $v = -x/y$ et $u = -1/y$. On écrit le Théorème 2 spécialisé avec $X_k = d_k(\lambda)$ et $z = d_0(\lambda) = |\lambda|$. □

Il est important de noter que la sommation a lieu sur tout $j \geq 0$ et pas seulement sur $|\lambda| - j \geq 0$. Le degré en x du membre de gauche étant clairement $\leq |\lambda|$, on obtient pour tout $i > |\lambda|, j \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{min(i,j)}\binom{|\lambda|-j}{i-k}F_{jk}(\lambda) = 0.$$

En effet c'est seulement lorsque l'alphabet A_λ est infini que les indéterminées $d_k(\lambda)$ sont indépendantes.

Le cas où λ est une partition-ligne (n) correspond au développement en série de la formule classique de Chu-Vandermonde [4].

References

[1] D. Knutson, *λ-rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Mathematics **308**, Springer (1973).

[2] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Formulaire raisonné de fonctions symétriques*, Université Paris 7 (1985).

[3] M. Lassalle, *Une identité en théorie des partitions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **89** (2000), ?–?.

[4] M. Lassalle, *Quelques conjectures combinatoires relatives à la formule classique de Chu -Vandermonde*, Adv. in Appl. Math. **21** (1998), 457–472.

[5] M. Lassalle, *Some combinatorial conjectures for Jack polynomials*, Ann. Combin. **2** (1998), 61–83.

[6] M. Lassalle, *Some combinatorial conjectures for shifted Jack polynomials*, Ann. Combin. **2** (1998), 145–163.

[7] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon Press, second edition, Oxford, 1995.

[8] V. Prosper, *Combinatoire des polynômes multivariés*, Thèse, Université Paris 7 (1999), ftp://schubert.univ-mlv.fr/pub/thesis/Vincent.Prosper/vpthesis.html.