

UNE FORMULE DU TYPE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF POUR LES GROUPOÏDES DE LIE

BIRANT RAMAZAN

RÉSUMÉ. On démontre dans le contexte d'un groupoïde de Lie G un analogue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Comme application on calcule les fonctions de structure de l'algèbroïde de Lie associé à G .

2000 Mathematics Subject Classification : Primary 22A22; Secondary 58H05, 20L05

1. INTRODUCTION

Cet article est consacré à l'étude locale d'un groupoïde de Lie G dans des cartes convenablement choisies. En particulier on obtient dans le théorème 2.4 le développement de la multiplication ce qui constitue un analogue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff du cas des groupes de Lie (cf. [K] par exemple). Ce résultat a été présenté brièvement dans [Ra1], [LR] où il est utilisé pour démontrer que le groupoïde tangent \tilde{G} associé à un groupoïde de Lie G est lui aussi un groupoïde de Lie. Il intervient aussi de manière essentielle dans le calcul du commutateur dans l'algèbre de convolution du groupoïde tangent \tilde{G} , ce qui permet de quantifier la structure de Poisson canonique du dual de l'algèbroïde de Lie associé à G .

L'article est structuré comme il suit. Après avoir fixés la terminologie et les notations, on rappelle pour le bénéfice du lecteur les différentes constructions de l'algèbroïde de Lie \mathcal{G} associé à un groupoïde de Lie G . Dans la suite on explicite la structure locale de G dans une carte et on montre comment on associe à une carte de G choisie convenablement, une carte de son algèbroïde de Lie \mathcal{G} . On écrit la multiplication et l'inversion de G dans ces cartes et on les développe en séries de Taylor pour obtenir l'analogue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Enfin, comme application, on calcule les fonctions de structure de \mathcal{G} .

Rappelons brièvement les principaux faits sur les groupoïdes de Lie et les algèbroïdes de Lie associés. Pour une présentation détaillée de la théorie des groupoïdes de Lie on pourra se reporter aux ouvrages de A. Weinstein, P. Dazord et A. Coste [CDW], où K. Mackenzie [M]. Les notations et les définitions de la théorie des groupoïdes seront celles données dans [Re] par J. Renault. Par définition un groupoïde est un ensemble G muni d'un produit $G \times G \supset G^{(2)} \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$ défini sur un sous-ensemble $G^{(2)}$ de $G \times G$, et une application inverse $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ vérifiant:

1. $(g^{-1})^{-1} = g$
2. Si $(g_1, g_2), (g_2, g_3) \in G^{(2)}$ alors $(g_1 g_2, g_3), (g_1, g_2 g_3) \in G^{(2)}$ et $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
3. $(g^{-1}, g) \in G^{(2)}$. Si $(g_1, g_2) \in G^{(2)}$ alors $g_1^{-1} (g_1 g_2) = g_2$
4. $(g, g^{-1}) \in G^{(2)}$. Si $(g_2, g_1) \in G^{(2)}$ alors $(g_2 g_1) g_1^{-1} = g_2$

$G^{(2)}$ s'appelle l'ensemble des paires composables et pour $g \in G$ on appelle $s(g) = g^{-1}g$ le domaine de g et $r(g) = gg^{-1}$ l'image de g . La composition g_1g_2 est bien définie si et seulement si $r(g_2) = s(g_1)$. L'ensemble $s(G) = r(G)$, noté $G^{(0)}$, sera identifié à une partie de G et appelé espace des unités. Pour $x \in G^{(0)}$, on notera $G^x = r^{-1}(x)$, $G_x = s^{-1}(x)$.

Un groupoïde de Lie est un groupoïde G qui a une structure de variété différentiable compatible avec la structure algébrique :

1. $G^{(0)}$ est une sous-variété de G
2. $r, s : G \rightarrow G^{(0)}$ sont des submersions
3. la multiplication : $G^{(2)} \rightarrow G$ est différentiable

Comme conséquences de la définition il faut noter que l'application $i : G \rightarrow G$, $i(\gamma) = \gamma^{-1}$ est un difféomorphisme (voir [M], p.85), et aussi le fait qu'en notant $m = \dim G$ et $n = \dim G^{(0)}$, pour tout $x \in G^{(0)}$, G^x et G_x sont des sous-variétés de G de dimension $m - n$.

On rappelle maintenant les différentes constructions de l'algébroïde de Lie associé à un groupoïde de Lie G de base $G^{(0)}$. Les algébroïdes de Lie ont été introduits par J. Pradines [P1], et généralisent la notion d'algèbre de Lie dans le cadre de la théorie des groupoïdes de Lie.

Pour fixer les notations, pour toute application différentiable f entre les variétés M et N , Tf désigne l'application tangente et $T_x f$ l'application tangente en x entre les espaces tangents $T_x M$ et $T_{f(x)} N$. Aussi pour E fibré vectoriel de classe C^∞ sur la variété M on notera par $C^\infty(M, E)$ l'ensemble des sections de classe C^∞ de E sur M .

Par définition un algébroïde de Lie sur une variété M est un triplet constitué d'un fibré vectoriel E de base M et classe C^∞ , une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie sur l'espace des sections $C^\infty(M, E)$, dont on note $[\cdot, \cdot]$ le crochet et un morphisme $\rho : E \rightarrow TM$ de fibrés vectoriels C^∞ , appelé ancre tels que:

(i) L'application induite entre les espaces des sections $\bar{\rho} : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, TM)$, $\bar{\rho}(\xi)(x) = \rho(\xi(x))$, $\xi \in C^\infty(M, E)$, $x \in M$, est un morphisme d'algèbres de Lie : $[\bar{\rho}(\xi), \bar{\rho}(\eta)] = \bar{\rho}([\xi, \eta])$

(ii) Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et pour tout couple (ξ, η) de sections C^∞ de E , $[\xi, f\eta] = f[\xi, \eta] + \bar{\rho}(\xi)(f)\eta$

On fixe $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ un repère local sur $U \subset M$ pour E et $(q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ coordonnées locales de E avec les q_i coordonnées locales pour la base M et les λ_j coordonnées dans les fibres associées au repère $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$. Alors, localement, le fait que E est un algébroïde de Lie implique l'existence des fonctions de structure $c_{ijk}, a_{ij} \in C^\infty(U)$ telles

$$\text{que } [e_i, e_j] = \sum_k c_{ijk} e_k \text{ et } \bar{\rho}(e_i) = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial q_j}.$$

Remarquons tout d'abord que pour tout $g \in G$, $R_g : G_{r(g)} \rightarrow G_{s(g)}$, $R_g(h) = hg$ et $L_g : G^{s(g)} \rightarrow G^{r(g)}$, $L_g(h) = gh$ sont des difféomorphismes et que pour tout $g \in G$ on a $T_g G^{r(g)} = \text{Ker} T_g r$ et $T_g G_{s(g)} = \text{Ker} T_g s$. Cela permet de définir les champs invariants à gauche sur G par $L(G) = \{\xi \in C^\infty(G, TG) \mid \xi \in \text{Ker} Tr, TL_g \circ \xi = \xi \circ L_g\}$ et les champs invariants à droite par $R(G) = \{\xi \in C^\infty(G, TG) \mid \xi \in \text{Ker} Ts, TR_g \circ \xi = \xi \circ R_g\}$. Il est facile à voir que $L(G)$ et $R(G)$ sont des algèbres de Lie.

Le fait que $G^{(0)}$ est une sous-variété de G permet de considérer $T_x G^{(0)}$ sous-espace de $T_x G$, pour tout $x \in G^{(0)}$. On note \mathcal{L}, \mathcal{R} , respectivement \mathcal{N} , les fibrés vectoriels sur $G^{(0)}$ dont les fibres au dessus de $u \in G^{(0)}$ sont $\mathcal{L}_u = \text{Ker} T_u r$, $\mathcal{R}_u = \text{Ker} T_u s$, respectivement $\mathcal{N}_u = T_u G / T_u G^{(0)}$.

LEMME 1.1. *On a les isomorphismes des espaces vectoriels $L(G) \simeq C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{L})$ et $R(G) \simeq C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{R})$.*

Preuve. L'application $\Phi : L(G) \rightarrow C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{L})$, $\Phi(\xi) = \xi|_{G^{(0)}}$ est bien définie. Montrons que Φ est injective. Soit $\xi|_{G^{(0)}} = \eta|_{G^{(0)}}$. Alors pour $g \in G$ on a $\xi(g) = \xi(gu) = T_u L_g \xi(u) = T_u L_g \eta(u) = \eta(gu) = \eta(g)$, où $u = s(g)$.

Montrons que Φ est surjective. Soit $\eta \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{L})$. On définit $\xi : G \rightarrow TG$, $\xi(g) = T_u L_g \eta(u)$, pour $u = s(g)$. On voit que $L_u = Id_{G^u}$, d'où $\xi(u) = \eta(u)$ pour $u \in G^{(0)}$, donc $\eta = \xi|_{G^{(0)}}$. Il reste à montrer que $\xi \in L(G)$. On a $T_{g'} L_g \xi(g') = T_{g'} L_g [T_u L_{g'} \xi(u)] = T_u L_{gg'} \xi(u) = \xi(gg')$, où $u = s(g')$. On a utilisé le fait que $T_{g'} L_g \circ T_u L_{g'} = T_u (L_g \circ L_{g'}) = T_u L_{gg'}$. Comme Φ est évidemment linéaire on a démontré le premier isomorphisme. La démonstration du second isomorphisme est analogue. ■

Les fibrés \mathcal{L} , avec le crochet donné par $[\xi, \eta] = \Phi([\Phi^{-1}(\xi), \Phi^{-1}(\eta)])$ et l'ancre $\rho : \mathcal{L} \rightarrow TG^{(0)}$, $\rho_u = T_u s$, respectivement \mathcal{R} , avec le crochet défini de manière analogue à \mathcal{L} et l'ancre $\mu : \mathcal{R} \rightarrow TG^{(0)}$, $\mu_u = T_u r$, sont deux algébroïdes de Lie antiisomorphes par l'application tangente Ti de l'inversion i de G .

L'application $I_x - T_x r : T_x G \rightarrow Ker T_x r$, $X \mapsto X - T_x r X$, est bien définie et surjective. Son noyau est $T_x G^{(0)}$ et par factorisation on obtient l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{N}_x \simeq Ker T_x r$. De la même manière, en considérant $I_x - T_x s : T_x G \rightarrow Ker T_x s$, $X \mapsto X - T_x s X$ on démontre l'isomorphisme $\mathcal{N}_x \simeq Ker T_x s$.

Ces deux isomorphismes définissent sur \mathcal{N} deux structures d'algébroïde de Lie antiisomorphes. Le crochet de Lie sur $C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{N})$ est défini en utilisant l'isomorphisme $L(G) \ni \xi \mapsto [\xi_{G^{(0)}}] \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{N})$, où $[X]$ est l'image de $X \in T_x G$ dans $T_x G / T_x G^{(0)}$. L'ancre sur \mathcal{N} est $\rho : \mathcal{N} \rightarrow TG^{(0)}$, $\rho_x = T_x r - T_x s$.

Dans la suite on appellera algébroïde de Lie du groupoïde de Lie G le fibré \mathcal{L} avec la structure d'algébroïde définie précédemment et pour mettre en évidence qu'il est l'algébroïde associé au groupoïde G il sera noté \mathcal{G} .

2. La structure locale d'un groupoïde de Lie

2.1. Les cartes. Soit G un groupoïde de Lie et \mathcal{G} son algébroïde de Lie. On va expliciter dans cette section la structure de G dans une carte convenablement choisie au voisinage d'un point $x_0 \in G^{(0)} \subset G$. Des cartes de ce genre ont été utilisées aussi dans [NWX].

Comme r est une submersion au point x_0 appartenant à la sous-variété $G^{(0)}$ de G , il existe U voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n , V voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^m et les cartes $\psi : U \times V \rightarrow G$, $\varphi : U \rightarrow G^{(0)}$ vérifiant:

1. $\psi(0, 0) = x_0$
2. $r(\psi(u, v)) = \varphi(u)$
3. $\psi(U \times \{0\}) = \psi(U \times V) \cap G^{(0)}$

La deuxième condition revient au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G \supset \psi(U \times V) & \xrightarrow{\quad r \quad} & \varphi(U) \subset G^{(0)} \\
 \psi \uparrow & & \uparrow \varphi \\
 U \times V & \xrightarrow{\quad pr_1 \quad} & U
 \end{array}$$

Des deux dernières conditions on déduit $\varphi(u) = \psi(u, 0)$, et en conséquence on pourra exprimer la structure de G en utilisant seulement la carte ψ . Toutefois pour la simplicité des notations on gardera $\varphi = \psi(\cdot, 0)$.

A la carte ψ de G s'associe canoniquement une carte de l'algèbroïde de Lie \mathcal{G} . Plus précisément on a :

LEMME 2.1. *L'application $\theta : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{G}$, $\theta(u, v) = (\varphi(u), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0)v)$ est une carte de \mathcal{G} au voisinage de la fibre \mathcal{G}_{x_0} et la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ définie par $e_i(\varphi(u)) = \theta(u, f_i)$, $i = \overline{1, m}$, où $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^m , est un repère mobile de \mathcal{G} sur $\varphi(U)$.*

Preuve. Pour tout $u \in U$ on a
 $G^{\varphi(u)} \cap \psi(U \times V) = \{\gamma \in \psi(U \times V) | r(\gamma) = \varphi(u)\} = \psi(\{u\} \times V)$
L'application $\psi(u, \cdot) : V \rightarrow G^{\varphi(u)}$ est alors une carte de la sous-variété $G^{\varphi(u)}$, qui associe $0 \in V$ à $\varphi(u)$. On peut identifier $\{u\} \times \mathbb{R}^m$ avec $T_{\varphi(u)}G^{\varphi(u)}$ par l'isomorphisme $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0) : T_{(u,0)}(\{u\} \times V) = \{u\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\varphi(u)}G^{\varphi(u)}$. L'image de θ est le voisinage $\theta(U \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{G}_{\varphi(U)}$ de la fibre \mathcal{G}_{x_0} . ■

Remarque. Dans un groupe de Lie il existe un voisinage de l'unité diffeomorphe avec un voisinage de l'élément nul de l'algèbre de Lie associé. Le lemme précédent permet de donner la généralisation suivante pour les groupoïdes de Lie :

Pour tout $x_0 \in G^{(0)}$ il existe un voisinage de x_0 dans G qui est diffeomorphe avec un voisinage de $(x_0, 0)$ dans \mathcal{G} .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \supset \theta(U \times V) & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \psi(U \times V) \subset G \\
 & \searrow \theta & \nearrow \psi \\
 & U \times V &
 \end{array}$$

En effet avec les notations précédentes, $\alpha = \psi \circ \theta^{-1}$ est un diffeomorphisme entre le voisinage $\theta(U \times V)$ de $(x_0, 0) \in \mathcal{G}$ et le voisinage $\psi(U \times V)$ de x_0 dans G . On remarque de plus que pour tout $x \in \varphi(U)$, $\alpha(\mathcal{G}_x) \subset G^x$.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante qui est basée sur l'existence d'une application exponentielle pour tout groupoïde de Lie. Cette application exponentielle introduite par Pradines dans [P2] généralise à la fois l'exponentielle d'un groupe de Lie et l'exponentielle d'une variété munie d'une connexion.

PROPOSITION 2.2. *Soit G un groupoïde de Lie et \mathcal{G} son algèbroïde de Lie. Il existe alors un voisinage V de $G^{(0)}$ vu comme la section nulle $\{(x, 0) | x \in G^{(0)}\}$ dans \mathcal{G} , un voisinage W de $G^{(0)}$ dans G et un diffeomorphisme $\alpha : V \rightarrow W$ tel que $\alpha(\mathcal{G}_x \cap V) = G^x \cap W$ et $\alpha'_x(0)$ est l'identité de \mathcal{G}_x , où α_x est la restriction de α sur $\mathcal{G}_x \cap V$.*

L'idée de la démonstration est la suivante. Soit ∇ une connexion sur l'algèbroïde de Lie \mathcal{G} . On associe à ∇ une connexion invariante à gauche sur G , dont la restriction à G^x est une connexion linéaire ∇_x . On peut alors définir fibre par fibre une application exponentielle, et prendre comme α cette exponentielle. Pour les détails voir [L] ou [NWX].

2.2. La multiplication et l'inversion. Pour exprimer le produit et l'inversion de G dans la carte ψ on a besoin de la forme de l'application source s dans cette carte, forme qui est explicitée dans le lemme suivant.

LEMME 2.3. *Il existe une submersion $\sigma : U \times V \rightarrow U$ telle que $s(\psi(u, v)) = \varphi(\sigma(u, v))$. De plus $\sigma(u, 0) = u$.*

Preuve. En réduisant éventuellement V , on peut supposer que $s(\psi(u, v)) \in \varphi(U)$, pour $(u, v) \in U \times V$. Il existe alors un élément $\sigma(u, v) \in U$ tel que $s(\psi(u, v)) = \varphi(\sigma(u, v))$. Evidemment $\sigma = \varphi^{-1} \circ s \circ \psi$ est une submersion, comme expression dans les cartes de la submersion s . Enfin $\varphi(\sigma(u, 0)) = s(\psi(u, 0)) = \psi(u, 0) = \varphi(u)$, donc $\sigma(u, 0) = u$. ■

On peut maintenant donner les développements dans la carte ψ de la multiplication et de l'inversion de G . Le résultat suivant représente l'analogue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff pour les groupoïdes de Lie.

PROPOSITION 2.4. *(i) Pour $u, u_1 \in U$ et $v, w \in V$ on a $(\psi(u, v), \psi(u_1, w)) \in G^{(2)}$ si et seulement si $u_1 = \sigma(u, v)$. Dans ce cas le produit est donné par $\psi(u, v)\psi(\sigma(u, v), w) = \psi(u, p(u, v, w))$ où $p : U \times V \times V \rightarrow V$ est une application différentiable qui a un développement de la forme $p(u, v, w) = v + w + B(u, v, w) + O_3(u, v, w)$ avec B bilinéaire en (v, w) et $O_3(u, v, w)$ de l'ordre de $\|(v, w)\|^3$.*

(ii) Soit $(u, v) \in U \times V$ tel que $\psi(u, v)^{-1} \in \psi(U \times V)$. Alors $\psi(u, v)^{-1} = \psi(\sigma(u, v), w)$, où w vérifie $p(u, v, w) = 0$. De plus on a le développement $w = -v + B(u, v, v) + O_3(u, v)$, avec $O_3(u, v)$ de degré d'homogénéité supérieur à 3 en v .

Preuve. (i) Soit $g = \psi(u, v)$ et $h = \psi(u_1, w)$. On a $s(g) = \varphi(\sigma(u, v))$ et $r(h) = \varphi(u_1)$ ce qui montre que $(g, h) \in G^{(2)}$ si et seulement si $u_1 = \sigma(u, v)$. De plus $r(gh) = r(g) = \varphi(u)$ assure l'existence d'un unique $p(u, v, w) \in V$ tel que

$$\psi(u, v)\psi(\sigma(u, v), w) = \psi(u, p(u, v, w))$$

On définit ainsi l'application $p : U \times V \times V \rightarrow V$, qui vérifie en particulier $p(u, 0, w) = w$ et $p(u, v, 0) = v$. En effet

$$\psi(u, p(u, 0, w)) = \psi(u, 0)\psi(\sigma(u, 0), w) = \varphi(u)\psi(u, w) = \psi(u, w)$$

$$\psi(u, p(u, v, 0)) = \psi(u, v)\psi(\sigma(u, v), 0) = \psi(u, v)s(\psi(u, v)) = \psi(u, v).$$

Il s'ensuit que $\frac{\partial p}{\partial v}(u, v, 0) = I$, $\frac{\partial p}{\partial w}(u, 0, w) = I$, $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}(u, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial w^2}(u, 0, 0) = 0$, et

par un développement de Taylor $p(u, v, w) = p(u, 0, 0) + \frac{\partial p}{\partial v}(u, 0, 0)v + \frac{\partial p}{\partial w}(u, 0, 0)w + B(u, v, w) + O_3(u, v, w) = v + w + B(u, v, w) + O_3(u, v, w)$, où $B(u, v, w)$ est pour chaque u bilinéaire en (v, w) et $O_3(u, v, w)$ est homogène d'un degré supérieur à 3 en v et w .

(ii) Soit $g = \psi(u, v)$. On cherche u_1 et w tels que $g^{-1} = \psi(u_1, w)$. D'une part $r(g^{-1}) = \varphi(u_1)$ et $s(g) = \varphi(\sigma(u, v))$ impliquent $u_1 = \sigma(u, v)$. D'autre part comme $gg^{-1} = r(g)$, on déduit $\psi(u, v)\psi(\sigma(u, v), w) = \psi(u, 0)$, donc $p(u, v, w) = 0$. Le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'un f différentiable tel que $w = f(u, v)$. On développe

$$f(u, v) = f(u, 0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0)v + \dots = f_1(u, v) + f_2(u, v) + \dots$$

où $f_k(u, v)$ est de degré d'homogénéité k en v . On va déterminer f_1 et f_2 . Pour cela on utilise $p(u, v, w) = 0$. On a donc

$$0 = p(u, v, w) = v + w + B(u, v, w) + \dots$$

$$= v + f_1(u, v) + f_2(u, v) + \dots + B(u, v, f_1(u, v) + f_2(u, v) + \dots) + \dots$$

Le terme de degré d'homogénéité 1 dans le développement précédant est $v + f_1(u, v)$ donc $f_1(u, v) = -v$. On remplace dans l'équation précédente et on trouve $0 = f_2(u, v) + B(u, v, -v) + \dots$. En identifiant le terme de degré 2 on obtient $f_2(u, v) = B(u, v, v)$. ■

3. Le calcul des fonctions de structure de \mathcal{G}

On se propose de calculer les fonctions de structure de l'algèbroïde de Lie \mathcal{G} . On rappelle que $a_{ij} = \bar{\rho}(e_i)(q_j)$ et les c_{ijk} sont données par $[e_i, e_j] = \sum c_{ijk}e_k$, où $\rho = Ts$ est

l'ancre de \mathcal{G} , $\{e_1, \dots, e_m\}$ le repère mobile de \mathcal{G} défini dans le lemme 2.1 et $q_j = pr_j \circ \varphi^{-1}$ sont les fonctions de coordonnées de $G^{(0)}$. On notera par B_1, \dots, B_m les coordonnées de l'application $B : U \times V \times V \rightarrow V$ dans la base $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ de \mathbb{R}^m .

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $u \in U$, les fonctions de structure de l'algebroid \mathcal{G} sont données par $a_{ij}(\varphi(u)) = \frac{\partial \sigma_j}{\partial v_i}(u, 0)$ et $c_{ijk}(\varphi(u)) = B_k(u, f_i, f_j) - B_k(u, f_j, f_i)$.*

Preuve. (i) Le calcul de a_{ij}

On obtient la forme de a_{ij} par le calcul suivant

$$\begin{aligned} a_{ij}(\varphi(u)) &= \bar{\rho}(e_i)(q_j)(\varphi(u)) = \rho(e_i(\varphi(u)))(q_j) = (T_{\varphi(u)}s)(e_i(\varphi(u)))(q_j) \\ &= e_i(\varphi(u))(q_j \circ s) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0) f_i \right) (pr_j \circ \varphi^{-1} \circ s) \\ &= \frac{\partial}{\partial v_i}(pr_j \circ \varphi^{-1} \circ s \circ \psi)(u, 0) = \frac{\partial \sigma_j}{\partial v_i}(u, 0). \end{aligned}$$

(ii) Le calcul de c_{ijk}

1. On explicite d'abord la forme d'une section $\xi \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{G})$ dans les cartes de $G^{(0)}$ et \mathcal{G} engendrées par ψ .

$$\begin{array}{ccc} G^{(0)} \supset \varphi(U) & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{G}_{\varphi(U)} \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \theta \\ \mathbb{R}^n \supset U & \xrightarrow{\Xi} & U \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

Cette forme est donnée par $\Xi(u) = \theta^{-1} \circ \xi \circ \varphi(u) = (u, \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0)^{-1}(\xi(\varphi(u))))$. On note $\xi_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\xi_0(u) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0)^{-1}(\xi(\varphi(u)))$ et on a $\Xi(u) = (u, \xi_0(u))$.

2. Par le lemme 1.1, on associe à tout $\xi \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{G})$ une section équivariante à gauche $\Phi^{-1}(\xi) \in C^\infty(G, TG)$, définie par $\Phi^{-1}(\xi)(\gamma) = (T_{s(\gamma)}L_\gamma)\xi(s(\gamma))$ et le crochet de Lie sur $C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{G})$ est donné par $[\xi, \eta] = \Phi([\Phi^{-1}(\xi), \Phi^{-1}(\eta)])$.

On note $\Omega(\xi) = (\psi')^{-1} \circ \Phi^{-1}(\xi) \circ \psi$ la forme de $\Phi^{-1}(\xi)$ dans les cartes.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi^{-1}(\xi)} & TG \\ \uparrow \psi & & \uparrow \psi' \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \times V & \xrightarrow{\Omega(\xi)} & T(U \times V) \end{array}$$

On montre dans cette étape que

$$(2) \quad \Omega(\xi)(u, v) = (0, \xi_0(\sigma(u, v)) + B(u, v, \xi_0(\sigma(u, v))))$$

Par définition

$$\Phi^{-1}(\xi)(\psi(u, v)) = (T_{s(\psi(u, v))}L_{\psi(u, v)})\xi(s(\psi(u, v)))$$

$$\begin{aligned}
&= (T_{s(\psi(u,v))} L_{\psi(u,v)}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(\sigma(u,v), 0) \xi_0(\sigma(u,v)) \right) \\
&= T_0 (L_{\psi(u,v)} \psi(\sigma(u,v), \cdot)) \xi_0(\sigma(u,v))
\end{aligned}$$

Mais $L_{\psi(u,v)} \psi(\sigma(u,v), w) = \psi(u,v) \psi(\sigma(u,v), w) = \psi(u, p(u,v,w))$, ce qui par dérivation conduit à $T_0 (L_{\psi(u,v)} \psi(\sigma(u,v), \cdot)) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \frac{\partial p}{\partial w}(u,v,0)$, donc

$$(3) \quad \Phi^{-1}(\xi)(\psi(u,v)) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \frac{\partial p}{\partial w}(u,v,0) \xi_0(\sigma(u,v))$$

Comme $p(u,v,w) = v + w + B(u,v,w) + O_3(u,v,w)$ on a

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial w}(u,v,0) = I + \begin{pmatrix} B_1(u,v,f_1) & B_1(u,v,f_2) & \dots & B_1(u,v,f_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_m(u,v,f_1) & B_m(u,v,f_2) & \dots & B_m(u,v,f_m) \end{pmatrix}$$

En remplaçant 4 dans 3 on obtient

$$(5) \quad \Phi^{-1}(\xi)(\psi(u,v)) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \xi_0(\sigma(u,v)) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) B(u,v, \xi_0(\sigma(u,v)))$$

La formule 2 résulte comme suit :

$$\begin{aligned}
\Omega(\xi)(u,v) &= \psi'(u,v)^{-1} (\Phi^{-1}(\xi)(\psi(u,v))) \\
&= \psi'(u,v)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) (\xi_0(\sigma(u,v)) + B(u,v, \xi_0(\sigma(u,v)))) \\
&= (0, \xi_0(\sigma(u,v)) + B(u,v, \xi_0(\sigma(u,v))))
\end{aligned}$$

3. La formule 2 montre en particulier que $\Omega(e_i)(u,v) = (0, f_i + B(u,v, f_i))$. Pour les éléments de cette forme le crochet de Lie dans $T(U \times V)$ est donné par

$$[(0, a(u,v)), (0, b(u,v))] = \left(0, \sum_k \left(a_k(u,v) \frac{\partial b}{\partial v_k}(u,v) - b_k(u,v) \frac{\partial a}{\partial v_k}(u,v) \right) \right)$$

En utilisant la bilinéarité de B on obtient $[\Omega(e_i), \Omega(e_j)](u,v) =$

$$\begin{aligned}
&= \left(0, \sum_k (\delta_{ik} + B_k(u,v, f_i)) B(u, f_k, f_j) - \sum_k (\delta_{jk} + B_k(u,v, f_j)) B(u, f_k, f_i) \right) \\
&= (0, B(u, f_i, f_j) + B(u, B(u,v, f_i), f_j) - B(u, f_j, f_i) - B(u, B(u,v, f_j), f_i))
\end{aligned}$$

et en particulier $[\Omega(e_i), \Omega(e_j)](u,0) =$

$$\begin{aligned}
&= (0, B(u, f_i, f_j) - B(u, f_j, f_i) + B(u, B(u,0, f_i), f_j) - B(u, B(u,0, f_j), f_i)) \\
&= (0, B(u, f_i, f_j) - B(u, f_j, f_i)).
\end{aligned}$$

On peut ainsi conclure

$$\begin{aligned}
[e_i, e_j](\varphi(u)) &= [\Phi^{-1}(e_i), \Phi^{-1}(e_j)](\psi(u,0)) = \psi'(u,0) [\Omega(e_i), \Omega(e_j)](u,0) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,0) \sum_k (B_k(u, f_i, f_j) - B_k(u, f_j, f_i)) f_k \\
&= \sum_k (B_k(u, f_i, f_j) - B_k(u, f_j, f_i)) e_k(\varphi(u)).
\end{aligned}$$

■

COROLLAIRE 3.2. Pour toutes sections $\xi, \eta \in C^\infty(G^{(0)}, \mathcal{G})$ on a

$$[\xi, \eta]_0(u) = B(u, \xi_0(u), \eta_0(u)) - B(u, \eta_0(u), \xi_0(u))$$

Preuve. On développe $\xi = \sum \xi_i e_i$ et $\eta = \sum \eta_j e_j$ dans le repère mobile $\{e_1, \dots, e_m\}$ et on s'en sert de la proposition précédente pour remplacer c_{ijk} dans $[\xi, \eta] = \sum \xi_i \eta_j c_{ijk} e_k$. Il ne reste qu'à utiliser la bilinéarité de B . ■

Exemple. Soit G un groupe de Lie d'unité e . Dans ce cas $U = \{0\}$ et $\psi : V \rightarrow G$ est une carte vérifiant $\psi(0) = e$. On associe à ψ la carte $\theta = \psi'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{G}$ de l'algèbre de Lie. Par la proposition 2.4 le produit dans G est de la forme $\psi(v)\psi(w) = \psi(p(v, w))$, où $p : V \times V \rightarrow V$ est une application différentiable qui admet un développement de la forme $p(v, w) = v + w + B(v, w) + O_3(v, w)$ avec B bilinéaire et l'inversion est donnée par $\psi(v)^{-1} = \psi(-v + B(v, v) + O_3(v))$. Comme $\sigma = 0$ on retrouve $a_{ij} = 0$ et la proposition 3.1 montre que les constantes de structure c_{ijk} de l'algèbre de Lie sont données par $c_{ijk} = B_k(f_i, f_j) - B_k(f_j, f_i)$.

On retrouve ainsi des résultats connus pour les groupes et algèbres de Lie qu'on peut trouver par exemple dans [K].

Exemple. Soit $G = M \times M$, le groupoïde principal transitif associé à la variété M , un élément $(x, x) \in G^{(0)}$ et $\alpha : U_1 \rightarrow M$ une carte de M telle que $\alpha(0) = x$. On peut prendre la carte $\psi : U \times V \rightarrow G$, donnée par $\psi(u, v) = (\alpha(u), \alpha(u + v))$, où U, V sont des voisinages de $0 \in \mathbb{R}^m$ telles que $U \in U_1$ et $U + V \in U_1$. La carte de TM engendrée par ψ est $\theta : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{G}$, $\theta(u, v) = (\alpha(u), \alpha'(u)v)$. Dans ce cas $\sigma(u, v) = u + v$, $p(u, v, w) = v + w$, $B(u, v, w) = 0$. Pour les fonctions de structure de TM on retrouve $a_{ij} = \delta_{ij}$ et $c_{ijk} = 0$.

Remerciements Les résultats de cet article ont été obtenu durant mon séjour à l'Université d'Orléans et je tiens à exprimer ma gratitude à Jean Renault pour tout son soutien et ses très judicieuses remarques et à Claire Anantharaman qui au début de ce travail m'a fait comprendre le cas des groupes de Lie.

BIBLIOGRAPHIE

- [CDW] A. Coste, P. Dazord et A. Weinstein, *Groupoïdes symplectiques*. Publications Dept. Math. Univ. Lyon1, **2/A**(1987)
- [K] A. Kirillov, *Eléments de la théorie des représentations*. Editions Mir, Moscou, 1974.
- [L] N.P. Landsman, *Topics in Classical and Quantum Mechanics*. Springer Verlag, 1998
- [LR] N.P. Landsman and B. Ramazan, *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*. To appear in: Contemporary Mathematics, *Groupoids in physics, analysis and geometry*, Eds. J. Kaminker, A. Ramsay, J. Renault, A. Weinstein.
- [M] K. Mackenzie, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*. London Math. Soc. Lecture Notes, **124**, Cambridge Univ. Press, 1987
- [NWX] V. Nistor, A. Weinstein and P. Xu, *Pseudodifferential operators on differential groupoids*. Preprint, 1997
- [P1] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **264**(1967), 245–248
- [P2] J. Pradines, *Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, **266**(1968), 1194–1196
- [Ra1] B. Ramazan, *Limite classique de C^* -algèbres de groupoïdes de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **329**(1999), 603-606
- [Re] J. Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*. Lecture Notes in Mathematics **793**, Springer-Verlag, 1980.

Académie Roumaine
 Institut de Mathématiques
 Calea Griviței 21, P.O. Box 1-764,
 Bucarest 70700, Romania
 E-mail address: ramazan@pompeiu.imar.ro