

Théorie de Lubin-Tate non abélienne ℓ -entière

J.-F. Dat*

Résumé

For two primes $\ell \neq p$, we investigate the \mathbb{Z}_ℓ -cohomology of the Lubin-Tate towers of a p -adic field. We prove that it realizes some version of Langlands and Jacquet-Langlands correspondences for flat families of irreducible supercuspidal representations parametrized by a \mathbb{Z}_ℓ -algebra R , in a way compatible with extension of scalars. Applied to $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, this gives a cohomological realization of the Langlands-Vigneras correspondence for supercuspidals, and a new proof of its existence. Applied to complete local algebras, this provides bijections between deformations of matching $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -representations. Besides, we also get a virtual realization of both the *semi-simple* Langlands-Vigneras correspondence and the ℓ -modular Langlands-Jacquet transfer for *all* representations, by using the cohomology complex and working in a suitable Grothendieck group.

Table des matières

1	Principaux résultats	2
1.1	Modulo ℓ	2
1.2	En familles, et en déformations	4
2	Réalisation virtuelle de Langlands et Jacquet-Langlands modulo ℓ	7
2.1	Une propriété de finitude et ses conséquences	7
2.2	Les correspondances modulo ℓ	10
3	La partie supercuspidale de la cohomologie ℓ-entière	13
3.1	Projectivité et conséquences	14
3.2	Description explicite de $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\text{sc}}$	16
3.3	Descente à \mathbb{Z}_ℓ	23
A	Propriétés de perfection du complexe de cohomologie	25
A.1	Perfection dans $\mathcal{D}(G)$	25
A.2	Perfection dans $\mathcal{D}(D^\times)$	28
B	Scindages de catégories, enveloppes projectives, et déformations	30
B.1	Représentations supercuspidales et scindages de $\text{Rep}(G)$	31
B.2	Représentations supercuspidales et scindages de $\text{Rep}(D^\times)$	37
B.3	φ -déformations de représentations irréductibles de W_K	40

*L'auteur remercie l'Institute for Advanced Study pour son hospitalité et la National Science Foundation pour son soutien financier No. DMS-0635607. Les idées et conclusions exprimées dans ce texte sont celles de l'auteur et n'engagent pas la NSF.

1 Principaux résultats

Soit K un corps local non-archimédien d'anneau d'entiers \mathcal{O} et de corps résiduel $k \simeq \mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier p . Soit k^{ca} une clôture algébrique de k et \widehat{K}^{nr} l'extension non ramifiée maximale complétée de K , d'anneau des entiers $\widehat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ et de corps résiduel k^{ca} .

Fixons un entier $d \in \mathbb{N}$. Nous notons $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{LT},n}$ le n -ème étage de la tour de Lubin-Tate de hauteur d du corps K . C'est donc le $\widehat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -schéma formel qui classe les déformations par quasi-isogénies et munies de structures de niveau n à la Drinfeld de l'unique \mathcal{O} -module formel \mathbb{H}_d de dimension 1 et hauteur d sur k^{ca} . Par définition, le groupe de quasi-isogénies de \mathbb{H}_d agit sur $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{LT},n}$, et on sait qu'il s'identifie au groupe D^\times des unités de l'algèbre à division de centre K et d'invariant $1/d$. Par un jeu subtil sur les structures de niveau, le groupe linéaire $G := \text{GL}_d(K)$ agit sur la tour des $(\widehat{\mathcal{M}}_{\text{LT},n})_{n \in \mathbb{N}}$, et cette action commute à celle de D^\times . De plus, l'action du produit $G \times D^\times$ se factorise par le quotient $GD := (G \times D^\times)/K_{\text{diag}}^\times$. Nous noterons $\mathcal{M}_{\text{LT},n}$ la fibre générique de $\widehat{\mathcal{M}}_{\text{LT},n}$. C'est un \widehat{K}^{nr} -espace analytique lisse de dimension $d - 1$. Il est muni d'une donnée de descente à K qui permet de prolonger à W_K l'action de l'inertie I_K sur $H_c^*(\mathcal{M}_{\text{LT},n}^{\text{ca}}, \Lambda) := \lim_{\rightarrow n} H_c^*(\mathcal{M}_{\text{LT},n}^{\text{ca}}, \Lambda)$.

Soit maintenant $\ell \neq p$ un nombre premier. Par commodité, nous choisissons une racine carrée de q dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, ce qui nous permet de définir les torsions à la Tate demi-entières, et de normaliser la correspondance de Langlands ℓ -adique. Notre but est de prouver des versions mod ℓ et ℓ -entières des théorèmes locaux principaux de Harris et Taylor dans [18] sur la cohomologie ℓ -adique de \mathcal{M}_{LT} . Nous apportons donc plusieurs réponses au Problème 6 posé par Harris dans [17].

1.1 Modulo ℓ

On rappelle que, suivant Vignéras, une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible est dite *supercuspidale* si elle n'est sous-quotient d'aucune induite parabolique propre admissible. En général, cette propriété est plus forte que celle d'être *cuspidale*, *i.e.* annulée par tous les foncteurs de Jacquet propres.

THÉORÈME 1.— *Pour π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale de G , la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi)$ de $D^\times \times W_K$ est irréductible. Si on l'écrit sous la forme*

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi)_{D^\times \times W_K} \simeq \rho(\pi) \otimes \sigma(\pi) \left(\frac{d-1}{2} \right),$$

alors on a les propriétés suivantes :

- i)* $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ est une bijection entre classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations supercuspidales de G et classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles de dimension d de W_K .
- ii)* $\pi \mapsto \rho(\pi)$ est une injection de l'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations supercuspidales de G dans celui des classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles de D^\times .
- iii)* Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -relèvement $\tilde{\pi}$ de π , on a $\sigma(\pi) = r_\ell(\sigma(\tilde{\pi}))$ et $\rho(\pi) = r_\ell(\rho(\tilde{\pi}))$.

Dans le dernier point, la notation $\rho(\tilde{\pi})$ désigne la correspondante de Jacquet-Langlands de $\tilde{\pi}$, et $\sigma(\tilde{\pi})$ désigne sa correspondante de Langlands. La notation r_ℓ désigne l'application de "décomposition" qui consiste à prendre un réseau stable, le réduire "modulo ℓ " et simplifier.

Quelques remarques s'imposent :

- l'existence d'une bijection satisfaisant les points i) et iii) (et donc nécessairement unique) n'est pas nouvelle et est due à Vignéras dans [26]. Les différences entre sa preuve et la notre sont dans le point iii), qu'elle obtient par un argument global de congruences entre formes automorphes sur des groupes anisotropes, et dans la preuve de la surjectivité. Les preuves de l'irréductibilité et de l'injectivité reposent toujours sur son "critère numérique" [27, 2.3].
- De même, l'existence d'une injection satisfaisant les points ii) et iii) est déjà établie dans [12], et la différence réside dans le point iii) qui y est obtenu à l'aide de "caractères de Brauer".
- L'énoncé obtenu lorsque l'on remplace $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ par $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (moins le point iii) évidemment) découle de [18, Thm B], une fois que l'on sait que la partie supercuspidale de la cohomologie est concentrée en degré $d - 1$, ce qui est prouvé par Mieda dans [22], cf aussi Strauch [24]. Nous utilisons bien évidemment tous ces résultats.

Bien qu'il n'apparaisse pas dans cet énoncé, un rôle crucial est joué par le complexe

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell) \in \mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\infty, c}(GD \times W_K))$$

défini dans la section 3 de [10]. Ici, la catégorie dérivée est celle de la catégorie abélienne des \mathbb{Z}_ℓ -représentations de $GD \times W_K$ qui sont *lisses* (signe ∞) pour l'action de GD , et qui sont *continues* (signe c) pour celle de W_K au sens où l'action de I_K provient d'une structure de module sur l'algèbre complétée $\mathbb{Z}_\ell[[I_K]]$ et est lisse sur le plus grand sous-groupe fermé $I_K^{\ell'}$ d'ordre premier à ℓ . La propriété essentielle sur laquelle repose cet article est prouvée dans l'appendice A.1 où l'on trouvera un énoncé plus précis :

PROPOSITION.— *Le complexe $R\Gamma_c$ est isomorphe, dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G))$, à un complexe borné de $\mathbb{Z}_\ell G$ -représentations lisses projectives et "localement de type fini".*

La stratégie générale pour prouver des énoncés de ce type remonte au moins à SGA4, Exp XVII (5.2.10), mais la preuve n'est pas formelle pour autant : on utilise par exemple le morphisme de périodes de Gross-Hopkins et le fait que la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$ des \mathbb{Z}_ℓ -représentations lisses de G est localement noethérienne.

Cette propriété de finitude montre que pour une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation lisse irréductible π de G , le complexe

$$R_\pi := R\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi) \left(\frac{1-d}{2}\right)[1-d] \in \mathcal{D}^+(\text{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$$

est à cohomologie bornée et de dimension finie. Ceci permet de considérer son image

$$[R_\pi] \in \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de $D^\times \times W_K$. Nous obtiendrons alors l'amplification suivante du théorème 1 :

THÉORÈME 2.— *Pour $\pi \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$, la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation virtuelle $[R_\pi]$ est de la forme*

$$[R_\pi] = \text{LJ}(\pi) \otimes \sigma(\pi)^{\text{ss}}, \quad \text{où}$$

i) $\sigma(\pi)^{\text{ss}}$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation semi-simple de dimension d de W_K vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $\sigma(\pi)^{\text{ss}} = \sigma(\pi_1)^{\text{ss}} + \sigma(\pi_2)^{\text{ss}}$ si π est sous-quotient de l'induite parabolique $\pi_1 \times \pi_2$.

(b) $\sigma(\pi)^{\text{ss}} = r_\ell(\sigma(\tilde{\pi}))$ pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière $\tilde{\pi}$ dont la réduction modulo ℓ contient π .

ii) $\text{LJ}(\pi)$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation virtuelle de D^\times et l'homomorphisme

$$\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

obtenu par linéarité vérifie $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ r_\ell = r_\ell \circ \text{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$, où $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ est le transfert de Langlands-Jacquet ℓ -adique $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de [10, Cor. 2.1.5].

Dans le texte, nous prouverons d'abord le théorème 2 et montrerons que l'application $\pi \mapsto \sigma(\pi)^{\text{ss}}$ vérifie la propriété i) du théorème 1. Puis nous déduirons le théorème 1 en remarquant que $[R_\pi] = [\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(H_c^{d-1}, \pi)(\frac{d-1}{2})]$ lorsque π est *supercuspidale*. Il est possible de prouver tout le théorème 1 moins la surjectivité du point i), sans étudier $[R_\pi]$, cf remarque (3.1.4).

On peut faire les mêmes remarques que précédemment :

- Le i) fournit une réalisation cohomologique de la correspondance de Langlands semi-simple établie par Vignéras dans [26] et donne une nouvelle¹ preuve de son existence.
- Le ii) fournit une réalisation cohomologique du transfert de Langlands-Jacquet ℓ -modulaire de [12] et donne une nouvelle preuve de son existence.
- Lorsque l'on remplace $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ par $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, la formule $[R_\pi] = \text{LJ}(\pi) \otimes \sigma(\pi)$ découle des faits suivants :
 - a) On a l'égalité $[R_\pi] = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [\text{Ext}_G^j(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \pi)]$.
 - b) On connaît déjà $\sum_i (-1)^i [H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$ grâce à [18, Thm VII.1.5].
 - c) On conclut grâce au calcul d'extensions de [10, 2.1.16].

On notera que pour π sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, l'égalité a) n'a parfois aucun sens car la somme de droite est infinie. C'est par exemple le cas pour π la représentation triviale et $q \equiv 1[\ell]$.

Par ailleurs, lorsque π est sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, nous avons décrit beaucoup plus précisément le complexe R_π dans [10, Thm. A], en utilisant les résultats de Boyer [5]. Selon cette description, R_π n'a de la cohomologie qu'en degrés *de même parité*, et il n'y a donc aucune annulation lorsqu'on prend la somme alternée. L'exemple suivant, détaillé en (2.2.7), montre que *ceci n'est plus toujours vrai sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$* .

EXEMPLE.— Supposons $d = 3$ et $q \equiv 1[\ell]$. Soit π le quotient de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^2(K), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ par les fonctions constantes. Alors $\mathcal{H}^{-1}(R_\pi)$ et $\mathcal{H}^1(R_\pi)$ sont de dimension au moins 2.

1.2 En familles, et en déformations

Dans le théorème (3.2.4) du texte, nous donnons une description explicite de la “partie supercuspidale” de la cohomologie entière de \mathcal{M}_{LT} . Nous ne répétons pas cet énoncé ici, qui demande beaucoup de notations, mais donnons plutôt quelques corollaires frappants.

Soit $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ l'extension non ramifiée maximale de \mathbb{Z}_ℓ dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Pour R une $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbre noethérienne, on appellera *R-famille de représentations irréductibles* de G toute R -représentation lisse (Π, V) vérifiant

- V^H est localement libre de rang fini pour tout pro- p -sous-groupe ouvert de G
- $\Pi \otimes_R C$ est irréductible pour tout corps algébriquement clos C au-dessus de R .

1. Noter que l'on utilise tout de même les résultats fins de classification des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations de G dûs à Vignéras

THÉORÈME 3.— *Il existe deux foncteurs exacts*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(G) & \rightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(D^\times) \\ \Pi & \mapsto & \rho(\Pi) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(G) & \rightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(W_K) \\ \Pi & \mapsto & \sigma'(\Pi) \end{array}$$

tels que pour toute $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$ -algèbre noethérienne R , on a :

- i) $\Pi \mapsto \sigma'(\Pi)$ induit une bijection entre classes de R -familles de représentations irréductibles supercuspidales de G et classes de R -familles de représentations irréductibles de dimension d de W_K .
- ii) $\Pi \mapsto \rho(\Pi)$ induit une injection de l'ensemble des classes de R -familles de représentations irréductibles supercuspidales de G dans celui des classes de R -familles de représentations irréductibles de D^\times .
- iii) Si Π est une R -famille de représentations irréductibles supercuspidales de G , alors il existe un R -module inversible $\mathcal{R}(\Pi)$ et un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \Pi \right) \otimes_R \mathcal{R}(\Pi) \simeq \rho(\Pi) \otimes_R \sigma'(\Pi)$$

En fait, les foncteurs de l'énoncé induisent des équivalences de catégories entre certaines sous-catégories “naturelles” de représentations des trois groupes ; on renvoie au paragraphe (3.2.5) pour l'énoncé précis. Les points i) et ii) fournissent des correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands pour les R -familles de représentations irréductibles. En vertu de l'exactitude des foncteurs annoncés, ces correspondances sont *compatibles à tout changement d'anneau* R . De même, le module inversible et l'isomorphisme du point iii) peuvent être choisis fonctoriels en la paire (R, Π) . En particulier, ce théorème implique le théorème 1. Néanmoins, nous ne le prouverons qu'après avoir établi le théorème 1.

Remarquons qu'on ne peut pas “descendre” ce théorème à \mathbb{Z}_ℓ , mais on peut “descendre” une version où l'on impose une condition de type caractère central/déterminant fixé, cf (3.3.4).

Comme corollaire, on obtient des correspondances entre *déformations* de représentations de G , D^\times et W_K , ou si l'on préfère, une déformation des correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands du théorème 1. Notons $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$ -algèbres locales complètes noethériennes de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Un *relèvement* d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation π de G à $\Lambda \in \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ est une Λ -représentation admissible et plate, dont la réduction modulo \mathfrak{m}_Λ est isomorphe à π . Les relèvements de π s'organisent en une catégorie cofibrée en groupoïdes au-dessus de $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$, que nous noterons $\mathcal{R}el(\pi)$. De même, on a les catégories (cofibrées sur $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$) $\mathcal{R}el(\rho)$ et $\mathcal{R}el(\sigma)$ pour des représentations de D^\times et W_K .

COROLLAIRE.— *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation supercuspidale de G . Les foncteurs $\tilde{\pi} \mapsto \rho(\tilde{\pi})$ et $\tilde{\pi} \mapsto \sigma(\tilde{\pi}) := \sigma'(\tilde{\pi})(\frac{1-d}{2})$ induisent des équivalences de catégories cofibrées sur $\mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$*

$$\mathcal{R}el(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}el(\rho(\pi)) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}el(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}el(\sigma(\pi)),$$

et il existe des isomorphismes fonctoriels en $(\Lambda, \tilde{\pi}) \in \mathcal{R}el(\pi)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \tilde{\pi} \right) \xrightarrow{\sim} \rho(\tilde{\pi}) \otimes_\Lambda \sigma(\tilde{\pi}) \left(\frac{d-1}{2} \right).$$

De plus, $\tilde{\pi}$ et $\rho(\tilde{\pi})$ ont un caractère central relié au déterminant de $\sigma(\tilde{\pi})$ par la formule

$$\mathrm{car}.\mathrm{cent}(\tilde{\pi}) = \mathrm{car}.\mathrm{cent}(\rho(\tilde{\pi})) = \det(\sigma(\tilde{\pi})) \circ \mathrm{Art}_K^{-1} : K^\times \longrightarrow \Lambda^\times.$$

Nous allons donner une version plus concrète de ce corollaire en montrant comment les déformations universelles permettent de décrire la *partie supercuspidale* de la cohomologie de \mathcal{M}_{LT} . Précisons d’abord ce que signifie “partie supercuspidale”. Comme une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale n’a d’extensions de Yoneda qu’avec elle-même, on peut scinder *canoniquement* toute $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentation lisse V de G en une somme directe $V = V_{\text{sc}} \oplus V'$, dans laquelle tous les sous-quotients irréductibles de V_{sc} sont supercuspidaux, et aucun sous-quotient irréductible de V' n’est supercuspidal, cf (3.0.2).

Fixons un élément ϖ de \mathcal{O} de valuation strictement positive, et notons $\varpi^\mathbb{Z}$ le sous-groupe discret de K^\times qu’il engendre. On peut voir $\varpi^\mathbb{Z}$ comme un sous-groupe central discret de G , de D^\times , ou de GD . On s’intéresse alors aux $\varpi^\mathbb{Z}$ -coinvariants $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\varpi^\mathbb{Z}}$ de la cohomologie, qui s’identifient à la cohomologie $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell)$ de la tour quotientée par l’action libre de $\varpi^\mathbb{Z}$. Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale de $G/\varpi^\mathbb{Z}$. On sait que $\rho(\pi)$ est une représentation de $D^\times/\varpi^\mathbb{Z}$, et que le déterminant de $\sigma(\pi)$ vaut 1 sur l’élément $\varphi := \text{Art}_K(\varpi)$ de W_K^{ab} correspondant à ϖ par le corps de classes local. Un ϖ -relèvement de π , resp. $\rho(\pi)$, est un relèvement qui se factorise par $G/\varpi^\mathbb{Z}$, resp. $D^\times/\varpi^\mathbb{Z}$. Un φ -relèvement de $\sigma(\pi)$ est un relèvement de déterminant 1 sur φ .

Soit $\check{\mathbb{Z}}_\ell$ le complété ℓ -adique de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$. Posons maintenant

$$\Lambda_\pi^\varpi := \check{\mathbb{Z}}_\ell[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f_\pi}}^\times \times f_\pi \mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})],$$

où f_π est la longueur de $\pi|_{G^0}$ et $v = \text{val}_{\mathcal{O}}(\varpi)$. On remarquera que c’est une $\check{\mathbb{Z}}_\ell$ -algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

THÉORÈME 4.– Tordons² l’action de G par $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Il existe alors une décomposition

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \check{\mathbb{Z}}_\ell)_{\text{sc}} \simeq \bigoplus_{\pi \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G/\varpi^\mathbb{Z})} \tilde{\pi} \otimes_{\Lambda_\pi^\varpi} \widetilde{\rho(\pi)} \otimes_{\Lambda_\pi^\varpi} \widetilde{\sigma(\pi)} \left(\frac{1-d}{2}\right)$$

où $\tilde{\pi}$ et $\widetilde{\rho(\pi)}$ sont des ϖ -relèvements de π et $\rho(\pi)$ sur Λ_π^ϖ , et $\widetilde{\sigma(\pi)}$ est un φ -relèvement de $\sigma(\pi)$ sur Λ_π^ϖ . De plus, on a les propriétés suivantes.

- i) Ces relèvements sont universels en tant que déformations ; Λ_π^ϖ est donc l’anneau de ϖ - ou φ -déformations de π , $\rho(\pi)$ et $\sigma(\pi)$.
- ii) $\tilde{\pi}$ est une enveloppe projective de π dans $\text{Rep}_{\check{\mathbb{Z}}_\ell}^\infty(G/\varpi^\mathbb{Z})$ et $\widetilde{\rho(\pi)}$ est une enveloppe projective de $\rho(\pi)$ dans $\text{Rep}_{\check{\mathbb{Z}}_\ell}^\infty(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$.

Remarquons que la cohomologie fournit donc l’anneau de ϖ - ou φ -déformation de π , $\rho(\pi)$ et $\sigma(\pi)$ par la formule $\Lambda_\pi^\varpi = \text{End}_{\check{\mathbb{Z}}_\ell GDW} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \check{\mathbb{Z}}_\ell)_{\mathcal{C}_\pi^\varpi} \right)$, où l’indice \mathcal{C}_π^ϖ signifie “localisé en π ” ou “partie π -isotypique généralisée”, cf appendice B.1. Par ailleurs, quitte à se débarrasser de l’action de D^\times en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\check{\mathbb{Z}}_\ell D^\times}(\widetilde{\rho(\pi)}, -)$, on constate que $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^\mathbb{Z})_{\mathcal{C}_\pi}$ fournit un cas particulier (facile) d’existence de “correspondance de Langlands locale en familles” au sens de [14].

Organisation de l’article. Dans la section 2, nous prouvons le théorème 2, en reportant la preuve de la propriété de perfection de $R\Gamma_c$ à l’appendice A, pour bien séparer les arguments. Dans la section 3, nous étudions la partie supercuspidale de la cohomologie et nous prouvons les autres théorèmes annoncés ci-dessus. Nous avons isolé les ingrédients de pure théorie des représentations dans l’appendice B, en espérant que cela puisse clarifier les arguments.

2. ceci pour éviter l’apparition de contragrédientes

2 Réalisation virtuelle de Langlands et Jacquet-Langlands modulo ℓ

Dans cette section, nous prouvons le théorème 2, en renvoyant à l'appendice pour les propriétés cohomologiques utilisées. Au passage, nous redémontrons donc l'existence et les propriétés de la correspondance de Langlands ℓ -modulaire de [26] et du transfert de Langlands-Jacquet ℓ -modulaire de [12].

2.1 Une propriété de finitude et ses conséquences

Dans ce paragraphe, Λ désigne une \mathbb{Z}_ℓ -algèbre finie. Une représentation lisse V de G à coefficients dans Λ est dite *localement de type fini* si pour tout entier n , le module V^{H_n} est de type fini sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)$. Ici, H_n désigne le sous-groupe de congruences $\text{Id} + \varpi^n \mathcal{M}_d(\mathcal{O})$. La propriété de noethériannité suivante nous sera utile :

(2.1.1) FAIT ([11], Thms 1.3 et 1.5)– L'anneau $\mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)$ est noethérien. En particulier, toute sous-représentation d'une représentation localement de type fini est localement de type fini.

(2.1.2) DÉFINITION.– Un complexe \mathcal{C} de $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda^\infty(G))$ sera dit *localement parfait* s'il est quasi-isomorphe à un complexe borné de la forme $P_a \rightarrow P_{a+1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_b$ dont chaque terme P_i est projectif et localement de type fini.

On appelle *amplitude parfaite* le plus petit intervalle $[a, b]$ pour lequel on peut trouver un complexe comme ci-dessus. On se gardera de confondre l'amplitude parfaite et l'amplitude cohomologique.

(2.1.3) PROPOSITION.– *Le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda) \in \mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda^\infty(G))$ est localement parfait, d'amplitude parfaite $[0, 2d - 2]$.*

Nous renvoyons à l'appendice A pour la preuve de cette proposition. On y trouvera aussi une propriété de perfection pour $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)$ en tant que complexe de D^\times -modules, mais l'amplitude parfaite est dans ce cas $[d - 1, 2d - 2]$, donc égale à l'amplitude cohomologique, cf proposition (A.2.1). Par contre, le complexe *n'est pas* simultanément parfait (i.e. en tant que complexe de GD -modules), cf remarque (A.2.2).

(2.1.4) DÉFINITION.– Une Λ -représentation lisse V de G est dite *Z-finie* si toute K^\times -orbite dans V est contenue dans un sous- Λ -module de type fini.

(2.1.5) PROPOSITION.– *Soit $C = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Pour toute C -représentation Z -finie et de type fini V de G , le complexe*

$$R\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), V^\vee) \in \mathcal{D}^+(\text{Rep}_C^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$$

est cohomologiquement borné, d'amplitude contenue dans $[2 - 2d, 0]$, et sa cohomologie est de dimension finie.

Preuve. L'assertion sur l'amplitude cohomologique du complexe en question découle immédiatement de celle sur l'amplitude parfaite de la proposition (2.1.3). Il reste à prouver

que la cohomologie est de dimension finie. Pour cela, il suffit de prouver que pour tous i et j on a

$$\dim_C \text{Ext}_{CG}^j(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, C), V^\vee) < \infty.$$

Soit $G^0 := \ker(\text{val}_K \text{ odet})$. D'après l'isomorphisme (3.5.2) de [10], on a $H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, C) = \text{ind}_{G^0}^G \left(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, C) \right)$ où $\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0)}$ désigne la tour des déformations de Lubin-Tate (le lieu où la quasi-isogénie résiduelle est de degré 0). On a donc $\text{Ext}_{CG}^j(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, C), V^\vee) = \text{Ext}_{G^0}^j(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, C), V^\vee)$.

Comme $K^\times G^0$ est d'indice fini dans G , nos hypothèses sur V impliquent qu'elle est de type fini sur G^0 . Comme on l'a déjà rappelé, (fait (2.1.1)), la catégorie des représentations de type fini de G est stable par sous-objet, et on en déduit facilement que celle des représentations de type fini de G^0 l'est aussi. Il s'ensuit que $V|_{G^0}$ possède une résolution projective (en général infinie) par des représentations de la forme $\text{ind}_{H_n}^{G^0}(1_C)^k$ (induites à supports compacts). Par passage à la contragrédiente, $V|_{G^0}^\vee$ admet une résolution injective par des représentations de la forme $\text{Ind}_{H_n}^{G^0}(1_C)^k$ (induites sans condition de supports). Or, on a $\text{Hom}_{G^0}(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, C), \text{Ind}_{H_n}^{G^0}(1_C)) \simeq \text{Hom}_{H_n}(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, C), C) \simeq H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}, n}^{(0), \text{ca}}, C)^\vee$, et on sait que ce dernier C -espace vectoriel est de dimension finie. \square

Soit maintenant π une C -représentation de longueur finie de G . Appliquant la proposition ci-dessus à π^\vee , on voit que le complexe R_π de l'introduction appartient à la sous-catégorie triangulée $\mathcal{D}_{\text{tf}}^b(\text{Rep}_C^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$ des objets de $\mathcal{D}^+(\text{Rep}_C^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$ cohomologiquement bornés et à cohomologie de dimension finie. Ceci permet de définir la classe

$$[R_\pi] := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i [\mathcal{H}^i(R_\pi)] \in \mathcal{R}(D^\times \times W_K, C)$$

de R_π dans le groupe de Grothendieck des C -représentations de longueur finie. Toute suite exacte $\pi_1 \hookrightarrow \pi_2 \twoheadrightarrow \pi_3$ induit un triangle distingué $R_{\pi_3} \longrightarrow R_{\pi_2} \longrightarrow R_{\pi_1} \xrightarrow{+1}$, donc on a $[R_{\pi_2}] = [R_{\pi_1}] + [R_{\pi_3}]$. On obtient de la sorte un homomorphisme

$$\mathcal{R}(G, C) \longrightarrow \mathcal{R}(D^\times \times W_K, C)$$

entre groupes de Grothendieck.

La proposition précédente nous donne une information supplémentaire sur l'homomorphisme composé $\pi \mapsto [R_{\pi^\vee}]$. Celui-ci doit en effet se factoriser à travers le morphisme canonique $\mathcal{R}(G, C) \longrightarrow \mathcal{K}_Z(G, C)$ où $\mathcal{K}_Z(G, C)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie (abélienne) des C -représentations Z -finies et de type fini. En particulier, $[R_\pi] = 0$ dès que la classe de π^\vee est nulle dans $\mathcal{K}_Z(G, C)$. Nous allons voir un exemple intéressant.

(2.1.6) DÉFINITION.— Notons $\mathcal{R}_I(G, C)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}(G, C)$ engendré par les induites paraboliques propres. Une C -représentation π est dite *elliptique* si $[\pi] \notin \mathcal{R}_I(G, C)$.

(2.1.7) COROLLAIRE.— Si π n'est pas elliptique, alors $[R_\pi] = 0$.

Preuve. Il suffit de le prouver lorsque π est une induite parabolique propre. Dans ce cas, π^\vee est aussi une induite parabolique, disons $\pi^\vee = i_P^G(\tau)$, et on sait par un argument qui remonte à Kazhdan que son image dans $\mathcal{K}_Z(G, C)$ est nulle. Rappelons brièvement cet argument. Soit $P^1 \subset P$ un sous-groupe ouvert contenant le centre Z de G et de quotient P/P^1 libre abélien de rang 1. Un tel groupe contient aussi la préimage du sous-groupe

M_P^0 du quotient de Levi M_P engendré par les éléments compacts. Ainsi $\tau_{|P^1}$ est encore de longueur finie, donc de type fini sur P^1 , donc son induite $\text{ind}_{P^1}^P(\tau) \simeq \tau \otimes C[P/P^1]$ est de type fini sur P . Soit γ un générateur de P/P^1 . On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \tau \otimes C[P/P^1] \xrightarrow{\text{Id} \otimes (1 - \gamma)} \tau \otimes C[P/P^1] \longrightarrow \tau \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur d'induction parabolique, on obtient une suite exacte de représentations Z -finies et de type fini de G

$$0 \longrightarrow i_P^G(\tau \otimes C[P/P^1]) \xrightarrow{\text{Id} \otimes (1 - \gamma)} i_P^G(\tau \otimes C[P/P^1]) \longrightarrow \pi^\vee \longrightarrow 0$$

qui montre que la classe de π^\vee est nulle dans $\mathcal{K}_Z(G, C)$. □

(2.1.8) PROPOSITION.— *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\pi \mapsto [R_\pi]} & \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ r_\ell \downarrow & & \downarrow r_\ell \\ \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) & \xrightarrow{\pi \mapsto [R_\pi]} & \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \end{array}$$

On y a noté r_ℓ les morphismes de décomposition obtenus par semi-simplification de réductions de modèles entiers.

Preuve. Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible. On sait qu'elle admet un modèle π_λ sur une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell^{\text{nr}}$, dont on note Λ l'anneau des entiers. Choisissons un sous- ΛG -module de type fini ω non nul dans π_λ .

Supposons d'abord que π_λ est ℓ -entière au sens de [28, II.4.11]. Alors ω est Λ -admissible, et la proposition (2.1.3) montre que le complexe $R_\omega := R\text{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{\text{ca}}, \Lambda), \omega)$ appartient à la sous-catégorie triangulée $\mathcal{D}_{\text{tf}}^b(\text{Rep}_\Lambda^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$ de la catégorie dérivée des Λ -représentations de $D^\times \times W_K$ formée des objets à cohomologie bornée et de type fini sur Λ . Par construction on a

$$R_\pi = R_\omega \otimes_\Lambda^L \overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ et } R_{\bar{\omega}} = R_\omega \otimes_\Lambda^L \overline{\mathbb{F}}_\ell$$

où l'on a noté $\bar{\omega} := \omega \otimes_\Lambda \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Nous devons montrer que $[R_{\bar{\omega}}] = r_\ell([R_\pi])$.

Pour cela, notons $\mathcal{K}(D^\times \times W_K, \Lambda)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des Λ -représentations de $D^\times \times W_K$ qui sont de type fini sur Λ . Il coïncide canoniquement avec le groupe de Grothendieck $\mathcal{K}(\mathcal{D}_{\text{tf}}^b(\text{Rep}_\Lambda^{\infty, c}(D^\times \times W_K)))$ de la catégorie triangulée $\mathcal{D}_{\text{tf}}^b(\text{Rep}_\Lambda^{\infty, c}(D^\times \times W_K))$. Les foncteurs triangulés $- \otimes_\Lambda^L E_\lambda$ et $- \otimes_\Lambda^L \overline{\mathbb{F}}_\ell$ induisent les deux homomorphismes diagonaux du triangle

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{K}(D^\times \times W_K, \Lambda) & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{R}(D^\times \times W_K, E_\lambda) & \xrightarrow{r_\ell} & \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell). \end{array}$$

Il nous suffit donc de voir que ce triangle est commutatif. Or le groupe $\mathcal{K}(D^\times \times W_K, \Lambda)$ est engendré par les $\Lambda(D^\times \times W_K)$ -modules sans ℓ -torsion, et pour un tel module τ , on a par construction $r_\ell([\tau \otimes_\Lambda E_\lambda]) = [\tau \otimes_\Lambda \overline{\mathbb{F}}_\ell]$.

Reste à considérer le cas où π n'est pas ℓ -entière. Dans ce cas, $\omega = \pi_\lambda$ donc $r_\ell(\pi) = 0$, et il nous faut prouver que $r_\ell([R_\pi]) = 0$. Or, on sait d'une part que R_π est nul si π n'est pas elliptique (corollaire (2.1.7)), et d'autre part qu'une représentation elliptique est ℓ -entière si et seulement si son caractère central l'est. Ainsi le caractère central de π n'est pas entier. Mais par construction, le centre K^\times de D^\times agit par l'inverse de ce caractère sur chaque $\mathcal{H}^i(R_\pi)$. Il s'ensuit que $\mathcal{H}^i(R_\pi)$ n'est pas ℓ -entière et par conséquent que $r_\ell([\mathcal{H}^i(R_\pi)]) = 0$. \square

2.2 Les correspondances modulo ℓ

(2.2.1) Rappel du cas ℓ -adique. La description explicite de la cohomologie du complexe R_π dans [10, Thm A] montre que pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible π , on a la formule

$$(2.2.1.1) \quad [R_\pi] = \mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)^{\mathrm{ss}} \text{ dans } \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

En fait, comme on l'a expliqué dans l'introduction, contrairement à [10, Thm A], on n'a pas besoin des résultats de Boyer sur la cohomologie ℓ -adique, mais simplement de la somme alternée comme dans [18, Thm VII.1.5].

(2.2.2) Définition de $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$. D'après (2.2.1.1), on a $[R_\pi] = d \cdot \mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\pi)$ dans $\mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Pour tirer parti de la proposition (2.1.8), on doit utiliser un fait non-trivial de théorie des représentations, qui découle des travaux de classification de M.-F. Vignéras.

FAIT.— cf. [12, Cor. (2.2.7)]. *L'application de décomposition $r_\ell : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est surjective.*

Ceci, joint à la proposition (2.1.8), implique que pour tout $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$, la représentation virtuelle $[R_\pi]$ est divisible par d dans $\mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Posons alors

$$\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) := \frac{1}{d}[R_\pi] \in \mathcal{R}(D^\times, \overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

L'homomorphisme $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ vérifie la propriété de commutation à r_ℓ annoncée dans le point ii) du théorème 2. La surjectivité de r_ℓ montre d'ailleurs que cette propriété le caractérise. On retrouve ainsi le transfert de Langlands-Jacquet défini dans [12] à l'aide des caractères de Brauer de groupes p -adiques.

REMARQUE.— Comme la correspondance de Jacquet-Langlands commute aux contragrédientes, on a $d \cdot \mathrm{LJ}_C(\pi) = [R_\pi] = [R_{\pi^\vee}]^\vee$. Il résulte alors du paragraphe précédent que l'homomorphisme $d \cdot \mathrm{LJ}_C$ se factorise par un morphisme $\mathcal{K}_Z(G, C) \rightarrow \mathcal{R}(D^\times, C)$. Mais ce dernier morphisme n'est pas divisible par d . Par exemple pour $C = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, il envoie $V = \mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_d(\mathcal{O})}^G \left(1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \right)$ sur $(-1)^{d-1} [1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}]$.

(2.2.3) Définition de $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\mathrm{ss}}$. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$.

Si π est supercuspidale, on sait par [28, III.5.10 ii)] qu'elle se relève en une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation. La proposition (2.1.8) montre alors que $[R_\pi]$ est bien de la forme $\mathrm{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\mathrm{ss}}$, avec $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\mathrm{ss}} = r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\tilde{\pi}))^{\mathrm{ss}}$ pour *n'importe quel* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -relèvement $\tilde{\pi}$.

Si π n'est pas supercuspidale, elle apparaît comme sous-quotient d'une induite parabolique $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ avec les π_i supercuspidales. La propriété "d'unicité du support cuspidal"

[25, V.4] dit que les π_i sont uniquement déterminés à l'ordre près. On pose alors

$$(2.2.3.1) \quad \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}} := \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_1)^{\text{ss}} \oplus \cdots \oplus \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_r)^{\text{ss}}.$$

Notons que par transitivité du support supercuspidal, l'égalité ci-dessus est encore vraie si les π_i ne sont pas supercuspidales.

(2.2.4) PROPOSITION.— *Soit $\pi \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$. On a*

$$[R_\pi] = \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}, \quad \text{dans } \mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell).$$

Preuve. Supposons d'abord que $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) = 0$. Dans ce cas, la seule chose à démontrer est que $[R_\pi] = 0$ dans $\mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$. Or, d'après le théorème (3.1.4) de [12], π appartient au sous-groupe $\mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de $\mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ engendré par les induites paraboliques propres. Le corollaire (2.1.7) nous assure bien que $[R_\pi] = 0$.

Supposons maintenant que π est une représentation “superSpeh”, au sens de [12, Def 2.2.3]. Par définition, elle est de la forme $r_\ell(\tilde{\pi})$ avec $\tilde{\pi}$ l'unique sous-représentation d'une induite parabolique normalisée $\tilde{\pi}_0 \times \tilde{\pi}_0 \nu \times \cdots \times \tilde{\pi}_0 \nu^{r-1}$ où $r_\ell(\tilde{\pi}_0) =: \pi_0$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation supercuspidale de $\text{GL}_{d/r}(K)$ et ν est le caractère $g \mapsto q^{-\text{val}_K(\det(g))}$. D'après la proposition (2.1.8), on a $[R_\pi] = \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \otimes r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi})^{\text{ss}})$. Or, on calcule $r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi})^{\text{ss}}) = r_\ell(\sum_{i=0}^{r-1} \sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_0 \nu^i)^{\text{ss}}) = \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_0 \nu^i)^{\text{ss}} = \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$, puisque les $\pi_0 \nu^i$ sont supercuspidales.

Supposons enfin que $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \neq 0$, ce qui équivaut, toujours d'après le théorème (3.1.4) de [12], à ce que π soit elliptique. En vertu de la proposition (2.2.6) de [12] précisée par le lemme (3.2.1) de *loc. cit.*, on peut écrire

$$[\pi] \equiv \sum_{i=0}^{r-1} a_i [\delta_i] \quad \text{modulo } \mathcal{R}_I(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

où les δ_i sont les représentations superSpeh de même support supercuspidal que π , et les a_i sont des entiers. Le corollaire (2.1.7) nous donne alors

$$[R_\pi] = \sum_{i=0}^{r-1} a_i [R_{\delta_i}].$$

Nous venons de montrer que $[R_{\delta_i}] = \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\delta_i) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\delta_i)^{\text{ss}}$ pour tout i . Mais par définition, $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\delta_i)^{\text{ss}}$ ne dépend que du support cuspidal de δ_i , et on a $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\delta_i)^{\text{ss}} = \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$ pour tout i . On en déduit

$$[R_\pi] = \sum_{i=0}^{r-1} a_i \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\delta_i) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}} = \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}.$$

□

(2.2.5) PROPOSITION.— *Soit $\tilde{\pi} \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Pour tout sous-quotient irréductible π de $r_\ell(\tilde{\pi})$, on a $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}} = r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi})^{\text{ss}})$.*

Preuve. Supposons que $\tilde{\pi}$ est sous-quotient de $\tilde{\pi}_1 \times \cdots \times \tilde{\pi}_r$ avec les $\tilde{\pi}_i$ supercuspidales. Posons $\pi_i = r_\ell(\tilde{\pi}_i)$; c'est une représentation cuspidale, pas nécessairement supercuspidale. On sait que

$$r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi})^{\text{ss}}) = \sum_{i=1}^r r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_i)^{\text{ss}})$$

et on a par construction

$$\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}} = \sum_{i=1}^r \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_i)^{\text{ss}}$$

puisque π est sous-quotient de l'induite $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$. Il nous suffit donc de prouver que $r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_i)^{\text{ss}}) = \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_i)^{\text{ss}}$ pour tout i . Si π_i est *supercuspidale*, cette égalité est vraie par définition. Si π_i n'est pas supercuspidale, on a les égalités

$$\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_i) \otimes r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_i)^{\text{ss}}) = [R_{\pi_i}] = \text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_i) \otimes \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi_i)^{\text{ss}},$$

la première découlant de la proposition (2.1.8), et la seconde de la proposition (2.2.4). Or on sait que π est elliptique, *i.e.* $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi) \neq 0$, donc on en déduit l'égalité voulue. \square

Les deux propositions précédentes achèvent la preuve du théorème 2. Mais nous n'avons rien dit encore sur les propriétés de l'application $\pi \mapsto \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$ lorsque π est supercuspidale. C'est l'objet de la proposition suivante, qui redonne le théorème de Vignéras sur la correspondance entre supercuspidales et irréductibles. Une fois cette proposition prouvée, nous aurons retrouvé l'intégralité du théorème 1.6 de [26].

(2.2.6) PROPOSITION.— *L'application $\pi \mapsto \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$ induit une bijection de l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations supercuspidales de G sur celui des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles de dimension d de W_K .*

Preuve. La proposition (2.1.8) montre que la correspondance de Langlands ℓ -adique est compatible aux congruences : si $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations supercuspidales entières et de même réduction $r_\ell(\tilde{\pi}_1) = r_\ell(\tilde{\pi}_2) = \pi$, alors $r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_1)) = r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi}_2)) = \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$.

Si π est supercuspidale, le critère numérique [27, 2.3] montre que $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$ est irréductible. Ce même critère montre aussi que l'application $\pi \mapsto \sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$ restreinte à l'ensemble des supercuspidales est *injective*.

Pour prouver la surjectivité, soit σ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible. Choisissons un relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (théorème de Fong-Swan) et posons $\tilde{\pi} := \sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{-1}(\tilde{\sigma})$. C'est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation supercuspidale entière de G . Sa réduction $\pi := r_\ell(\tilde{\pi})$ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale qui vérifie $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}} = r_\ell(\sigma_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\pi})) = \sigma$ par la proposition précédente. Comme σ est irréductible, π est nécessairement *supercuspidale* (vu la définition de $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$), et on a prouvé la surjectivité. \square

Pour une représentation *supercuspidale*, il n'y a donc plus lieu de garder la notation $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)^{\text{ss}}$, et on notera simplement $\sigma_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi)$.

(2.2.7) Un exemple instructif. Reprenons les notations de l'exemple de l'introduction. Supposons donc $d = 3$ et $q \equiv 1[\ell]$, et notons π le quotient de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^2(K), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ par les fonctions constantes. Ici on peut voir $\mathbb{P}^2(K)$ indifféremment comme l'espace des droites ou l'espace des plans; en d'autres termes, π est autoduale. On peut alors relever π en une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation elliptique de deux manières différentes : on prend l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}^2(K), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)/\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et on le munit de l'action $\tilde{\pi}_1$ sur les droites, et de sa transposée $\tilde{\pi}_2$ sur les plans. Ces deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations sont duales l'une de l'autre, mais pas isomorphes.

Nous avons calculé les complexes $R_{\tilde{\pi}_1}$ et $R_{\tilde{\pi}_2}$ dans [10, 4.4.2], voir aussi [9, Thm 4.1.5]. Leur cohomologie est concentrée en degrés -1 et 1 . Plus précisément, on a

$$\dim(\mathcal{H}^{-1}(R_{\tilde{\pi}_1})) = 2 \text{ et } \dim(\mathcal{H}^1(R_{\tilde{\pi}_1})) = 1$$

tandis que

$$\dim(\mathcal{H}^{-1}(R_{\tilde{\pi}_2})) = 1 \text{ et } \dim(\mathcal{H}^1(R_{\tilde{\pi}_2})) = 2.$$

On en déduit immédiatement que $\dim(\mathcal{H}^{-1}(R_\pi)) \geq 2$ et $\dim(\mathcal{H}^1(R_\pi)) \geq 2$. Cela implique en particulier que la cohomologie des complexes R_{ω_1} et R_{ω_2} associés aux réseaux stables de $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ a de la torsion.

3 La partie supercuspidale de la cohomologie ℓ -entière

Jusqu'ici, la notion de *supercuspidalité* n'a été définie que pour une représentation irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Pour une \mathbb{Z}_ℓ -représentation générale, il nous faudra faire un détour par le groupe $G^0 = \ker(\text{val}_K \circ \det)$.

(3.0.1) DÉFINITION.— Un objet V de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G^0)$ ou de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$ est dit *supercuspidal* si aucun de ses $\mathbb{Z}_\ell G^0$ -sous-quotients n'est un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

REMARQUE.— Pour V irréductible, il n'est pas complètement évident que cette définition coïncide avec la définition de Vignéras, où l'on demande simplement que V ne soit pas sous-quotient d'une induite parabolique propre *admissible*. Nous vérifions que les deux définitions sont compatibles dans le corollaire (B.1.3).

Une représentation supercuspidale V est en particulier cuspidale (*i.e.* annulée par tous les foncteurs de Jacquet propres), et donc les fonctions $g \mapsto e_H g v$, pour $v \in V$ et H pro- p -sous-groupe ouvert de G , sont à support compact modulo le centre.

Par conséquent, les $\mathbb{Z}_\ell G^0$ -sous-quotients irréductibles de V sont des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations, et celles-ci apparaissent comme sous-quotient, et même sous-objet, d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale (au sens habituel) de G . Vu la remarque ci-dessus, cette propriété des $\mathbb{Z}_\ell G^0$ -sous-quotients irréductibles *caractérise* les représentations supercuspidales au sens de (3.0.1).

EXEMPLE.— Si V est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible, alors elle est supercuspidale au sens (3.0.1) si et seulement si c'est un twist non ramifié d'une représentation ℓ -entière de réduction supercuspidale au sens habituel de Vignéras.

La définition (3.0.1) peut paraître alambiquée puisqu'elle fait un détour par G^0 , mais permet d'avoir la propriété suivante, prouvée dans l'appendice (B.1.4).

(3.0.2) PROPOSITION.— *La sous-catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G) \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$ (resp. $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G^0) \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G^0)$) dont les objets sont les représentations supercuspidales est facteur direct.*

Ainsi, toute représentation $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$ se décompose canoniquement en $V = V_{\text{sc}} \oplus V'$ avec $V_{\text{sc}} \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G)$ et V' une représentation dont aucun $\mathbb{Z}_\ell G^0$ -sous-quotient n'est supercuspidal au sens de (3.0.1).

Dans cette section, nous étudions la partie supercuspidale $H_c^{n-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}}$ de la cohomologie et nous prouvons en particulier les théorèmes 1, 3 et 4 de l'introduction.

3.1 Projectivité et conséquences

La propriété suivante est la base de notre étude. C'est une conséquence de la propriété de perfection du complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G))$.

(3.1.1) PROPOSITION.— *La partie supercuspidale $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}}$ est un objet projectif et localement de type fini de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$.*

Preuve. Avant toute chose, remarquons que $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans ℓ -torsion, puisque $H_c^{d-2}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{F}_\ell)$ est nul.

Première étape : $H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}} = 0$ pour $i \neq d-1$. Pour cela, rappelons d'abord que

$$H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}} = \text{ind}_{G^0}^G \left(H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}} \right)$$

où $\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0)}$ est le lieu où la quasi-isogénie du problème de déformations est un isomorphisme. Maintenant, l'argument de [22, Proof of Thm 3.7], de nature géométrique, montre que pour $i \neq d-1$, $H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ admet une filtration finie dont les sous-quotients successifs sont des sous-quotients de représentations de la forme $\text{Ind}_{P \cap G^0}^{G^0}(W^0)$ avec W^0 une représentation \mathbb{Z}_ℓ -admissible de $P \cap G^0$. Montrons qu'une telle représentation est nécessairement triviale sur le radical unipotent. En effet, d'après [4, 13.2.3], l'action du radical unipotent sur la \mathbb{Q}_ℓ -représentation admissible $W^0 \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ est triviale. L'argument de *loc. cit.* appliqué à $W_{\ell\text{-tors}}^0$ en utilisant la longueur au lieu de la dimension montre que le radical unipotent y agit aussi trivialement. Comme il est localement pro- p , il agit donc trivialement sur W^0 . Mais alors, l'induite $\text{Ind}_{P \cap G^0}^{G^0}(W^0)$ est une induite parabolique, et $H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ n'a donc pas de sous-quotient supercuspidal.

Deuxième étape : $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}}$ est de dimension cohomologique finie. En effet, considérons la partie supercuspidale $R\Gamma_{c, \text{sc}}$ du complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$. C'est un facteur direct de ce dernier, donc il est localement parfait d'après la proposition (2.1.3). D'après l'étape précédente, il est concentré en degré $d-1$, *i.e.* on a

$$(3.1.1.1) \quad R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}} \simeq H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}}[1-d],$$

d'où la propriété annoncée.

Troisième étape : $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{sc}}$ est projectif. Fixons un sous-groupe de congruences H de $\text{GL}_d(\mathcal{O})$. Pour tout $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$, notons $\langle V^H \rangle$ la sous $\mathbb{Z}_\ell G$ -représentation de V engendrée par les invariants V^H de V . On sait que c'est un facteur direct de V , *cf* [10,

3.5.8]. Il nous suffira donc de prouver que le facteur direct $\langle H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H \rangle$ est projectif. Ce dernier peut s'écrire sous la forme

$$\langle H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H \rangle = \text{ind}_{G^0}^G \left(\langle H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H \rangle \right),$$

et il suffit donc de prouver que $\mathcal{H} := \langle H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H \rangle$ est projectif dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G^0)$. On sait déjà qu'il est admissible, supercuspidal, et de dimension cohomologique finie. On peut donc trouver une résolution

$$0 \longrightarrow P_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

où chaque P_i est supercuspidal, projectif et de type fini (et donc admissible). Comme tous les membres de cette suite longue sont sans ℓ -torsion, on obtient en passant aux contragrédientes une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^\vee \longrightarrow P_0^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{d-1}^\vee \longrightarrow 0.$$

Or, d'après le lemme (3.1.2) ci-dessous, chaque P_i^\vee est encore projectif. On peut donc simplifier le complexe de manière inductive à partir de la droite, et on obtient ainsi que \mathcal{H}^\vee est facteur direct de P_0^\vee et par conséquent est projectif. D'après le lemme à nouveau, \mathcal{H} est donc projectif. \square

(3.1.2) LEMME.— *Soit $P \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G^0)$ une représentation cuspidale, projective et de type fini. Alors sa contragrédiente P^\vee est aussi cuspidale, projective et de type fini.*

Preuve. Comme le centre de G^0 est compact, P est admissible sur \mathbb{Z}_ℓ . Sa contragrédiente est donc aussi admissible et on en déduit aisément qu'elle est cuspidale. Choisissons des générateurs v_1, \dots, v_n de P et un sous-groupe de congruences H tel que $v_i \in P^H$ pour tout i . Ils définissent un épimorphisme

$$p : \mathcal{C}_c(G/H, \mathbb{Z}_\ell)^n \twoheadrightarrow P$$

puis par passage à la contragrédiente une injection

$$j : P^\vee \hookrightarrow \mathcal{C}(G/H, \mathbb{Z}_\ell)^n$$

qui envoie v^\vee sur les fonction $g \mapsto \langle v^\vee, gv_i \rangle$ pour $i = 1, \dots, n$. Comme P est cuspidale, ces fonctions sont à support compact, donc l'image $j(P^\vee)$ est contenue dans $\mathcal{C}_c(G/H, \mathbb{Z}_\ell)^n$. Maintenant, P est projectif donc p admet une section i qui induit par dualité une rétraction q de j . La restriction de q à $\mathcal{C}_c(G/H, \mathbb{Z}_\ell)^n$ est encore une rétraction, si bien que P^\vee est facteur direct de $\mathcal{C}_c(G/H, \mathbb{Z}_\ell)^n$, et par conséquent projectif et de type fini. \square

(3.1.3) Preuve du théorème 1. Compte tenu du théorème 2 et de la proposition (2.2.6), il suffit de montrer que $[\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi)] = [R_\pi](\frac{d-1}{2})$ dans $\mathcal{R}(D^\times \times W_K, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$.

Or on a :

$$\begin{aligned}
R_\pi\left(\frac{d-1}{2}\right) &= R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} (R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi) [1-d] \\
&= R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} (R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}}, \pi) [1-d] \\
&= R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}} [1-d], \pi \right) [1-d] \\
&= R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}}, \pi \right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}}, \pi \right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi \right)
\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que π est supposée supercuspidale, la troisième provient de (3.1.1.1) et la cinquième de la projectivité de $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}}$.

(3.1.4) REMARQUE.— Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation supercuspidale. La proposition (3.1.1) implique que pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -relèvement $\tilde{\pi}$ de π , on a

$$\left[\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi \right) \right] = r_\ell \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \tilde{\pi} \right) \right),$$

et donc que la correspondance de Langlands ℓ -adique est compatible aux congruences. Cela prouve le point iii) du théorème 1. A partir de là, le critère numérique de [27, 2.3] montre l'irréductibilité de $\rho(\pi)$ et $\sigma(\pi)$ et l'injectivité des correspondances. Reste à prouver la surjectivité de $\pi \mapsto \sigma(\pi)$. Il faut pour cela prouver que si $\tilde{\pi}'$ est supercuspidale de réduction *non supercuspidale*, alors $\sigma(\tilde{\pi}')$ est de réduction *réductible*. Peut-être qu'un argument de comptage, inconnu de l'auteur, pourrait suffire. Sinon, il faut utiliser le théorème 2 et sa propriété i)(a).

(3.1.5) REMARQUE.— Dans l'énoncé du théorème 1, on peut remplacer la cohomologie entière $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ par la cohomologie modulaire $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell)$. En effet, l'application canonique $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}} \otimes \mathbb{F}_\ell \rightarrow H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell)_{\mathrm{sc}}$ est un isomorphisme puisque $H_c^d(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}} = 0$.

3.2 Description explicite de $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}})_{\mathrm{sc}}$

Dans ce paragraphe, on étend les scalaires à l'extension non-ramifiée maximale de $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, et on s'intéresse au facteur direct

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}})_{\mathrm{sc}} \simeq H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}.$$

C'est la plus grande sous- $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}G$ -représentation de $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}})$ dont tous les $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}G^0$ -sous-quotients irréductibles sont supercuspidaux.

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation *supercuspidale*. D'après la proposition (B.1.2), la sous-catégorie pleine \mathcal{C}_π de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(G)$ formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}G^0$ -sous-quotients irréductibles sont des sous-quotients de $\pi|_{G^0}$ est un facteur direct de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}^\infty(G)$. On note $V_{\mathcal{C}_\pi}$ le facteur direct d'une $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$ -représentation V appartenant à \mathcal{C}_π . On a alors

$$V_{\mathrm{sc}} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)/\sim} V_{\mathcal{C}_\pi}$$

où π parcourt un ensemble de représentants des orbites non ramifiées dans l'ensemble des classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations supercuspidales.

(3.2.1) PROPOSITION.— Pour $\pi \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ supercuspidale, $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$ est un progénérateur de \mathcal{C}_π .

Preuve. Il est projectif, puisque facteur direct de l'objet projectif $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\text{sc}}$. Il est de type fini, puisque localement de type fini et engendré par ses H -invariants pour n'importe quel sous-groupe de congruence H tel que $\pi^H \neq 0$. Reste à voir que cet objet est générateur. Or pour tout caractère non ramifié $\psi : G \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$, on a

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}, \pi\psi) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}), \pi\psi) \neq 0.$$

Les $\pi\psi$ épuisant les objets simples de \mathcal{C}_π , on en déduit que $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$ est générateur de \mathcal{C}_π . □

(3.2.2) Notons maintenant $\rho := \rho(\pi)$ la correspondante de Jacquet-Langlands de π et $\sigma := \sigma'(\pi) = \sigma(\pi)(\frac{d-1}{2})$ sa correspondante de Langlands tordue. Dans l'appendice, nous définissons les sous-catégories facteurs directs \mathcal{C}_{ρ^\vee} de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times)$, cf (B.2.1) et $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$ de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^c(W_K)$, cf (B.3.2).

PROPOSITION.— $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$ est un objet de \mathcal{C}_{ρ^\vee} et de $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$.

Preuve. Montrons d'abord que c'est bien un objet de \mathcal{C}_{ρ^\vee} . Pour cela considérons le facteur direct $(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi})^{\mathcal{C}_{\rho^\vee}}$ hors de \mathcal{C}_{ρ^\vee} . S'il est non nul, il admet un quotient G -irréductible non nul, de la forme $\pi(\psi \circ \det)$ pour un caractère non ramifié de K^\times . Or on sait par le théorème 1 que $\text{Hom}_G(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}, \pi(\psi \circ \det))$ est $\rho(\psi \circ \text{nrd})$ -isotypique, et donc que $\rho^\vee(\psi^{-1} \circ \text{nrd})$ intervient comme quotient de $(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi})^{\mathcal{C}_{\rho^\vee}}$, ce qui est par définition impossible.

De la même manière, on montre que $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$. □

REMARQUE.— Les seuls résultats sur la cohomologie de Lubin-Tate que nous utilisons dans cet article sont ceux de Harris-Taylor, et ceux de Mieda-Strauch. En utilisant plus, on peut obtenir plus. Voici quelques exemples :

- i) En utilisant les résultats de Boyer [5] sur la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -cohomologie de Lubin-Tate, on montre facilement que :

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi} = H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_{\rho^\vee}} = H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_{\sigma^\vee}}.$$

- ii) En utilisant les résultats annoncés par Boyer [6] sur l'absence de torsion dans les $H_c^i(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$, on montre même que

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi} = R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_{\rho^\vee}} = R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_{\sigma^\vee}}$$

en tant que facteurs directs de $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^{\infty, c}(GD \times W_K))$.

- iii) Enfin, en utilisant les résultats de Faltings et Fargues [15] de comparaison avec la cohomologie de la tour de Drinfeld, on peut montrer que $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ est parfait dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times))$, cf proposition (A.2.1), et on en déduit *a priori* que

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi} \text{ est un objet projectif de } \mathcal{C}_{\rho^\vee}.$$

En fait nous trouverons cette propriété *a posteriori*, comme conséquence de notre description explicite.

(3.2.3) Résumé de l'appendice B. Dans l'appendice, nous exhibons des progénérateurs P_π, P_{ρ^\vee} et P_{σ^\vee} respectivement de $\mathcal{C}_\pi, \mathcal{C}_{\rho^\vee}$ et $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$, et calculons leurs commutants "opposés"

$$\mathfrak{Z}_\pi = \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(P_\pi)^{\text{opp}}, \quad \mathfrak{Z}_{\rho^\vee} = \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}D^\times}(P_{\rho^\vee})^{\text{opp}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Z}_{\sigma^\vee} = \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}W_K}(P_{\sigma^\vee})^{\text{opp}}.$$

On dispose alors d'équivalences de catégories associées à ces progénérateurs, cf (B.0.2) :

- $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(P_\pi, -) : \mathcal{C}_\pi \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi)$ d'inverse $P_\pi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi} - : \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_\pi$
- $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(P_{\rho^\vee}, -) : \mathcal{C}_{\rho^\vee} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_{\rho^\vee})$ d'inverse $P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}} - : \text{Mod}(\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\rho^\vee}$
- $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}W_K}(P_{\sigma^\vee}, -) : \mathcal{C}_{\sigma^\vee} \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee})$ d'inverse $P_{\sigma^\vee} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}} - : \text{Mod}(\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\sigma^\vee}$.

D'après le *ii)(b)* de la proposition (B.1.2), \mathfrak{Z}_π est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f_\pi}}^\times) \times \mathbb{Z}]$ où f_π désigne la longueur de $\pi|_{G^0}$, et d'après la proposition (B.2.1), \mathfrak{Z}_{ρ^\vee} est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f_{\rho^\vee}}}^\times) \times \mathbb{Z}]$ où f_{ρ^\vee} désigne la longueur de $\rho|_{\mathcal{O}_D^\times}$. Ces anneaux sont donc commutatifs. Par ailleurs, d'après la proposition (B.3.2), $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$ est isomorphe au produit croisé de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[\mathbb{Z}_\ell]]$ par \mathbb{Z} , le générateur de \mathbb{Z} agissant par multiplication par $q^{f_{\sigma^\vee}}$ sur \mathbb{Z}_ℓ , où f_{σ^\vee} désigne la longueur de $\sigma|_{I_K}$. Ainsi, $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$ n'est pas commutatif, mais son plus grand quotient commutatif $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f_{\sigma^\vee}}}^\times) \times \mathbb{Z}]$.

LEMME.— *On a les égalités $f_\pi = f_{\rho^\vee} = f_{\sigma^\vee}$.*

Preuve. Soit $\tilde{\pi}$ un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -relèvement de π . Une formule donnant f_π en termes d'un type contenu dans π est donnée à la fin de la preuve du *i)(b)* de la proposition (B.1.2). Cette formule montre que $f_\pi = f_{\tilde{\pi}} := \text{long}(\tilde{\pi}|_{G^0})$. Par la théorie de Clifford, ceci permet de réinterpréter f_π comme le nombre de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -caractères non ramifiés ψ de G tels que $\tilde{\pi}\psi \simeq \tilde{\pi}$. De même $f_{\rho^\vee} = f_{\rho(\tilde{\pi})^\vee}$ est le nombre de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -caractères non ramifiés ψ de G tels que $\rho(\tilde{\pi})\psi \simeq \rho(\tilde{\pi})$, et idem pour f_{σ^\vee} . Or, les correspondances $\tilde{\pi} \mapsto \rho(\tilde{\pi})$ et $\tilde{\pi} \mapsto \sigma(\tilde{\pi})$ sont compatibles à la torsion par les $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -caractères. \square

Le lemme montre que $\mathfrak{Z}_\pi, \mathfrak{Z}_{\rho^\vee}$ et $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}$ sont abstraitement isomorphes, en tant que $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbres. Comme on va le voir, la cohomologie fournit des isomorphismes particuliers entre ses anneaux.

(3.2.4) Posons maintenant $\mathcal{H} := H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$ et $\mathfrak{Z} := \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}GDW}(\mathcal{H})$, et considérons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &:= \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[G \times D^\times \times W_K]}(P_\pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\sigma^\vee}, \mathcal{H}) \\ &\in \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}). \end{aligned}$$

Via les équivalences mentionnées ci-dessus, on a $\mathfrak{Z} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathfrak{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}}(\mathcal{H}')$. En particulier, les actions des anneaux commutatifs \mathfrak{Z}_π et \mathfrak{Z}_{ρ^\vee} fournissent des morphismes de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbres $\mathfrak{Z}_\pi \rightarrow \mathfrak{Z}$, et $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \rightarrow \mathfrak{Z}$.

THÉORÈME.— *i) Les morphismes d'action $\mathfrak{Z}_\pi \rightarrow \mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \rightarrow \mathfrak{Z}$ sont bijectifs.*

ii) L'action de $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$ sur \mathcal{H}' se factorise par $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}$ et induit un isomorphisme $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}$.

iii) \mathcal{H}' est libre de rang 1 sur \mathfrak{Z} . Tout générateur φ de \mathcal{H}' sur \mathfrak{Z} se factorise à travers un $\mathfrak{Z}[GDW]$ -isomorphisme

$$\bar{\varphi} : P_\pi \otimes_{\mathfrak{Z}} P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathfrak{Z}} P_{\sigma^\vee}^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi}$$

où $P_{\sigma^\vee}^{\text{ab}} := P_{\sigma^\vee} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}} \mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}$ (cf (B.3.3)) et le produit tensoriel est relatif aux actions de \mathfrak{Z} déduites des isomorphismes précédents.

Preuve. *i)* D'après la proposition (3.2.1), on sait déjà que \mathcal{H}' est projectif et de type fini sur \mathfrak{Z}_π . Comme $\text{Spec}(\mathfrak{Z}_\pi)$ est connexe, le rang de \mathcal{H}' est constant, et non nul puisque \mathcal{H}' est non nul. Le morphisme $\mathfrak{Z}_\pi \xrightarrow{a} \mathfrak{Z} \subset \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(\mathcal{H}')$ est donc injectif. Pour montrer qu'il est bijectif, il suffit de prouver que le rang de \mathcal{H}' sur \mathfrak{Z}_π est égal à 1, puisqu'alors on aura $\mathfrak{Z} \subset \text{End}_{\mathfrak{Z}_\pi}(\mathcal{H}') = a(\mathfrak{Z}_\pi)$. Toujours par connexité de $\text{Spec}(\mathfrak{Z}_\pi)$, on peut calculer ce rang en (co)sécialisant en le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère "trivial" de \mathfrak{Z}_π , *i.e.* celui qui correspond à π via l'équivalence de catégories $\mathcal{C}_\pi \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi)$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{Z}_\pi}(\mathcal{H}', \overline{\mathbb{F}}_\ell) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G} \left(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}DW} (P_{\rho^\vee} \otimes P_{\sigma^\vee}, \mathcal{H}), \pi \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}DW} \left(P_\rho \otimes P_\sigma, \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(\mathcal{H}, \pi) \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}D}(P_\rho, \rho) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}WK}(P_\sigma, \sigma) \simeq \overline{\mathbb{F}}_\ell, \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme provient des lemmes (B.2.2) et (B.3.4), et le troisième provient du théorème 1. Ainsi, \mathcal{H}' est bien de rang 1 sur \mathfrak{Z}_π .

Considérons maintenant le morphisme composé $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \rightarrow \mathfrak{Z} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}_\pi$. Ce morphisme induit une bijection entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractères de \mathfrak{Z}_π et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractères de \mathfrak{Z}_{ρ^\vee} (la correspondance de Jacquet-Langlands!). A partir de là, on raisonne comme dans le point ii) ci-dessous pour en conclure que c'est un isomorphisme.

ii) Comme l'action de $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$ commute à \mathfrak{Z}_π , elle est donnée par un morphisme $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee} \xrightarrow{\beta} \text{End}_{\mathfrak{Z}_\pi}(\mathcal{H}') = \mathfrak{Z}_\pi$ qui se factorise donc par $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}} \rightarrow \mathfrak{Z}_\pi = \mathfrak{Z}$. Ce morphisme induit une bijection entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractères de \mathfrak{Z}_π et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractères de $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$ (la correspondance de Langlands!). Il est donc *injectif*, puisque $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}$ est réduit et sans ℓ -torsion. Identifions ce morphisme β à un endomorphisme de la $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbre $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a} \times \mathbb{Z}]$, où $C_{\ell^a} = \text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times)$ est un groupe cyclique d'ordre ℓ^a . Observons que le groupe $\mu_{\ell^a}(\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a} \times \mathbb{Z}])$ est égal à $\mu_{\ell^a}(\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}])$. Ainsi β stabilise $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}]$ et induit un endomorphisme injectif de cet anneau. Or par définition, cet anneau $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}]$ est engendré par son groupe de ℓ^a -racines de l'unité $\mu_{\ell^a}(\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}])$ qui est fini. Comme β est injectif, il induit une permutation de $\mu_{\ell^a}(\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}])$, donc finalement un automorphisme de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}]$. Quittes à composer par un prolongement de cet automorphisme à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a} \times \mathbb{Z}]$, on peut considérer maintenant β comme un endomorphisme injectif de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[C_{\ell^a}]$ -algèbres. Cet endomorphisme induit aussi une bijection entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères (issue de la correspondance de Langlands mod ℓ), donc ses fibres sont encore injectives, donc sont plates puisque morphismes finis entre anneaux principaux (isomorphes à $\overline{\mathbb{F}}_\ell[X, X^{-1}]$). Le critère de platitude fibre à fibre nous dit alors que β est plat, et donc localement libre puisque fini. Mais son rang est nécessairement 1, donc β est un isomorphisme.

iii) Puisque P_π, P_{ρ^\vee} et P_{σ^\vee} sont des progénérateurs, le morphisme d'évaluation est un isomorphisme :

$$(P_\pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\sigma^\vee}) \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}} \mathcal{H}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}.$$

Par les points *i)* et *ii)*, on peut le réécrire sous la forme

$$(P_\pi \otimes_{\mathfrak{Z}} P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathfrak{Z}} P_{\sigma^\vee}^{\text{ab}}) \otimes_{\mathfrak{Z}} \mathcal{H}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}.$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver que \mathcal{H}' est libre.

Pour cela, notons \mathcal{H}^0 la plus grande sous- G^0 -représentation de $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient irréductible

de $\pi|_{G^0}$. C'est un facteur direct stable par $(G \times D^\times \times W_K)^0$, et on a $\mathcal{H} = \text{ind}_{GDW^0}^{GDW}(\mathcal{H}^0)$, cf preuve du *ii*(a) de la proposition (B.1.2). On vérifie alors que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} DW}(P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\sigma^\vee}, \mathcal{H}) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^0 W^0}(P_{\rho_0^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\sigma_0^\vee}, \mathcal{H}) \\ &\simeq \text{ind}_{G^0}^G \left(\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^0 W^0}(P_{\rho_0^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\sigma_0^\vee}, \mathcal{H}^0) \right) \end{aligned}$$

où on a écrit $P_{\rho^\vee} = \text{ind}_{D^0}^D(P_{\rho_0^\vee})$ et $P_{\sigma^\vee} = \text{ind}_{W^0}^W(P_{\sigma_0^\vee})$. D'après le lemme (B.1.5), on en déduit que \mathcal{H}' est, en tant que \mathfrak{Z}_π -module, de la forme $\mathcal{H}' = \mathfrak{Z}_\pi \otimes_{\mathfrak{Z}_{\pi^0}} \mathcal{H}'_0$ pour un certain \mathfrak{Z}_{π^0} -module \mathcal{H}'_0 . Comme l'extension $\mathfrak{Z}_{\pi^0} \subset \mathfrak{Z}_\pi$ est fidèlement plate, \mathcal{H}'_0 est plat et de type fini sur \mathfrak{Z}_{π^0} . Or, ce dernier anneau est local, donc \mathcal{H}'_0 est libre sur \mathfrak{Z}_{π^0} , et par conséquent \mathcal{H}' est libre sur \mathfrak{Z}_π . \square

(3.2.5) *Les foncteurs $\Pi \mapsto \sigma'(\Pi)$ et $\Pi \mapsto \rho(\Pi)$.*

Soit (Π, V) une $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentation de G . Supposons dans un premier temps que Π est engendrée par ses invariants sous un sous-groupe ouvert compact. Cette propriété de finitude assure que V_{C_π} est nul sauf pour un nombre fini de classes inertielles de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations supercuspidales. Le théorème (3.2.4) et les propositions (B.2.2) et (B.3.4) nous donnent un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \Pi \right) \simeq \bigoplus_{\pi \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)/\sim} P_{\rho(\pi)} \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi} P_{\sigma'(\pi)}^{\text{ab}} \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_\pi, \Pi)$$

que l'on peut réécrire sous la forme plus condensée

$$(3.2.5.1) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \Pi \right) \simeq P_{\text{sc}}^D \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_{\text{sc}}^G, \Pi)$$

où l'on a posé $P_{\text{sc}}^G := \bigoplus P_\pi$, $P_{\text{sc}}^D := \bigoplus P_{\rho(\pi)}$, $P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}} := \bigoplus P_{\sigma'(\pi)}^{\text{ab}}$, et $\mathfrak{Z}_{\text{sc}} := \prod \mathfrak{Z}_\pi$. Notons que le terme de droite fait sens pour tout Π (sans l'hypothèse de finitude), et cela nous permet de poser

$$\sigma'(\Pi) := P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}} \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_{\text{sc}}^G, \Pi) \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^c}^c(W_K)$$

et

$$\rho(\Pi) := P_{\text{sc}}^D \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_{\text{sc}}^G, \Pi) \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times).$$

Considérons maintenant les trois catégories suivantes :

- i) $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^{\text{sc}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(G)$ formée des représentations supercuspidales au sens de (3.0.1). Elle est facteur direct, pro-engendrée par P_{sc}^G , et son centre s'identifie canoniquement à $\mathfrak{Z}_{\text{sc}} = \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(P_{\text{sc}}^G)$.
- ii) $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^{\text{sc}}(D^\times)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times)$ formée des représentations dont tous les $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^0$ -sous-quotients irréductibles sont des sous-quotients de $\overline{\mathbb{F}}_\ell D$ -représentations qui correspondent à des supercuspidales. Elle est facteur direct, pro-engendrée par P_{sc}^D , et le théorème (3.2.4) nous donne un isomorphisme $\mathfrak{Z}_{\text{sc}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_{\text{sc}}^D)$.
- iii) $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^{d, \text{ab}}(W_K)$ la plus petite sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^c}^c(W_K)$ contenant $P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}}$, stable par sous-quotients et sommes directes. Elle est pro-engendrée par $P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}}$, et le théorème (3.2.4) nous donne un isomorphisme $\mathfrak{Z}_{\text{sc}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K}(P_{\text{sc}}^{W, \text{ab}})$.

Notons qu'elle n'est pas stable par extensions. Sa "clôture par extensions" est la sous-catégorie facteur direct $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^d(W_K)$ formée des représentations dont tous les $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -sous-quotients irréductibles sont sous-quotients d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de dimension d de W_K .

THÉORÈME.— Avec les notations ci-dessus,

- i)* le foncteur $\Pi \mapsto \sigma'(\Pi)$ est une équivalence de catégories $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{d,\text{ab}}(W_K)$,
- ii)* le foncteur $\Pi \mapsto \rho(\Pi)$ est une équivalence de catégories $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(D^\times)$,
- iii)* Pour $\Pi, \Pi' \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$ engendrées par leurs invariants sous un sous-groupe ouvert compact, on a des isomorphismes bifonctoriels en Π, Π'

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \Pi \right) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_{\text{sc}}^G, \Pi') \xrightarrow{\sim} \rho(\Pi) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \sigma'(\Pi')$$

Dans le point iii), l'action de \mathfrak{Z}_{sc} sur chaque terme est l'action qui provient fonctoriellement de l'action canonique du centre de la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{\text{sc}}(G)$ sur Π et Π' .

Preuve. *i)* En revenant à la somme indexée par $\pi \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)$ et en utilisant les équivalence de catégories du type (B.0.2), on vérifie aisément que le foncteur $\mathcal{P} \mapsto P_{\text{sc}}^G \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_{\text{sc}}^D, \mathcal{P})$ est une équivalence inverse de $\Pi \mapsto \rho(\Pi)$.

ii) De même, le foncteur $\Sigma \mapsto P_{\text{sc}}^G \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K}(P_{\text{sc}}^{W,\text{ab}}, \Sigma)$ est une équivalence inverse de $\Pi \mapsto \sigma'(\Pi)$.

iii) découle de (3.2.5.1) et des définitions de $\sigma'(\Pi)$ et $\rho(\Pi)$. \square

(3.2.6) Preuve du théorème 3. Le point *ii)* du théorème 3 découle clairement de celui du théorème (3.2.5). Le point *i)* du théorème 3 découlera de celui du théorème (3.2.5), une fois qu'on aura vérifié que toute R -famille Σ de représentations irréductibles de dimension d de W_K est bien un objet de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{d,\text{ab}}(W_K)$. Pour cela, on peut supposer $\text{Spec}(R)$ connexe, auquel cas Σ est un objet de \mathcal{C}_σ pour une certaine $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de dimension d de W_K . Mais alors, avec les notations de la proposition (B.3.2), la RW_L -représentation $R_{\overline{\tau}}(\Sigma)$ est une R -famille de caractères de W_L , donc se factorise par W_L^{ab} , et Σ appartient à $\mathcal{C}_\sigma^{\text{ab}}$ qui est contenue dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^{d,\text{ab}}(W_K)$.

Il reste à prouver le point *iii)* du théorème 3. Supposons que Π est une R -famille de représentations irréductibles supercuspidales de G . Comme R est supposée noethérienne, $\text{Spec}(R)$ a un nombre fini de composantes connexes et Π est donc engendrée par ses invariants sous un sous-groupe ouvert compact. De plus, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G}(P_{\text{sc}}^G, \Pi)$ est une R -famille plate de caractères de \mathfrak{Z} . Son R -module sous-jacent $\mathcal{R}(\Pi)$ est donc localement libre de rang 1 et l'action de \mathfrak{Z}_{sc} est donnée par un morphisme $\mathfrak{Z}_{\text{sc}} \rightarrow R$. Le point *iii)* du théorème (3.2.5) nous donne alors un $R \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} R$ -isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \Pi \right) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \mathcal{R}(\Pi) \xrightarrow{\sim} \rho(\Pi) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} \sigma'(\Pi)$$

et on en déduit le point *iii)* du théorème 3 par extension des scalaires selon le morphisme produit $R \otimes_{\mathfrak{Z}_{\text{sc}}} R \rightarrow R$.

(3.2.7) Preuve du théorème 4. On fixe $\varpi \in K^\times$ de valuation $v > 0$ et on s'intéresse à $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\text{sc}}$. On a une décomposition

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\text{sc}} = \bigoplus_{\pi \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G/\varpi^{\mathbb{Z}})} H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi^\varpi}$$

où la notation \mathcal{C}_π^ϖ est expliquée dans l'appendice B.1. Fixons donc π , notons $\rho := \rho(\pi)$ et $\sigma := \sigma'(\pi) = \sigma(\pi)(\frac{d-1}{2})$, et posons

$$\mathcal{H}_\varpi := H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\pi^\varpi}.$$

Par les mêmes arguments que les propositions (3.2.1) et (3.2.2), on obtient que \mathcal{H}_ϖ est un objet projectif de \mathcal{C}_π^ϖ , et qu'en tant que D^\times -représentation, c'est un objet de $\mathcal{C}_{\rho^\vee}^\varpi$. C'est aussi un objet de $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$. Nous allons le décrire en suivant la preuve du théorème (3.2.4) ci-dessus.

Soit P_π^ϖ le progénérateur de \mathcal{C}_π^ϖ , de commutant noté \mathfrak{Z}_π^ϖ , et décrit dans la proposition (B.1.6), et de même soient $P_{\rho^\vee}^\varpi$ et $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^\varpi$ comme dans la proposition (B.2.3). Nous utiliserons aussi les foncteurs $R_{\tilde{\tau}}$ et $I_{\tilde{\tau}}$ de la proposition (B.3.2) (appliquée à σ^\vee). Posons

$$P_{\sigma^\vee}^\varpi := \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} G \times D^\times}(P_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\rho^\vee}^\varpi, \mathcal{H}_\varpi) \text{ et } \mathcal{H}'_\varpi := R_{\tilde{\tau}}(P_{\sigma^\vee}^\varpi).$$

Ce sont des $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^\varpi$ -modules, munis respectivement d'une action de W_K et de W_L (notation de la proposition (B.3.2)). De plus, on a les isomorphismes suivants :

$$P_{\sigma^\vee}^\varpi \simeq I_{\tilde{\tau}}(\mathcal{H}'_\varpi) \text{ et } (P_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} P_{\rho^\vee}^\varpi) \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^\varpi} P_{\sigma^\vee}^\varpi \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\varpi.$$

Maintenant, on sait que \mathcal{H}'_ϖ est un module projectif sur \mathfrak{Z}_π^ϖ , donc libre, puisque \mathfrak{Z}_π^ϖ est local. De plus, par le même argument que dans la preuve du *i*) du théorème (3.2.4), on obtient qu'il est de rang 1. Par conséquent, le morphisme d'action $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(\mathcal{H}'_\varpi)$ est injectif et le morphisme d'action $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^\varpi \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(\mathcal{H}'_\varpi)$ se factorise par $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^\varpi \xrightarrow{\beta} \mathfrak{Z}_\pi^\varpi$. Comme dans le point ii) du théorème (3.2.4), ce dernier morphisme est injectif car il induit des bijections entre caractères et les anneaux sont réduits, et il est surjectif car ces deux anneaux sont engendrés par leur groupe (fini) de racines ℓ^2 -èmes de l'unité.

Ceci nous permet de réécrire le second isomorphisme ci-dessus comme

$$P_\pi^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} P_{\rho^\vee}^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} P_{\sigma^\vee}^\varpi \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\varpi.$$

Le $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi[W_K]$ -module $P_{\sigma^\vee}^\varpi = I_{\tilde{\tau}}(\mathcal{H}'_\varpi)$ est projectif sur \mathfrak{Z}_π^ϖ , et de réduction isomorphe à σ^\vee ; c'est donc un relèvement de σ^\vee sur \mathfrak{Z}_π^ϖ . On sait que

$$P_{\sigma^\vee}^\varpi \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\pi^\dagger \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G/\varpi^{\mathbb{Z}}), r_\ell(\pi^\dagger) = \pi} \sigma_d(\pi^\dagger)^\vee.$$

Par les propriétés de la correspondance de Langlands, chaque $\sigma_d(\pi^\dagger)^\vee$ est de déterminant 1, et il s'ensuit que $P_{\sigma^\vee}^\varpi$ est aussi de déterminant 1. C'est donc un φ -relèvement.

Pour prouver le théorème 4, il ne reste plus qu'à étendre les scalaires de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ à son complété $\check{\mathbb{Z}}_\ell$. En effet :

- $\tilde{\pi} := P_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$ est la ϖ -déformation universelle de π d'après (B.1.6) iii).
- $\tilde{\rho}^\vee := P_{\rho^\vee}^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$ est la ϖ -déformation universelle de ρ d'après (B.2.3) iii).
- $\tilde{\sigma} := P_{\sigma^\vee}^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$ est la φ -déformation universelle d'après le ii) du corollaire (B.3.6).

3.3 Descente à \mathbb{Z}_ℓ

Si l'on veut descendre le théorème 3 aux familles indexées par une \mathbb{Z}_ℓ -algèbre, il faut pouvoir étendre les foncteurs $\Pi \mapsto \sigma'(\Pi)$ et $\Pi \mapsto \rho(\Pi)$, et pour cela il faut trouver des modèles \mathbb{Z}_ℓ -rationnels de P_{sc}^G , P_{sc}^D , et P_{sc}^W . Or cela est possible pour P_{sc}^G , mais *pas pour* P_{sc}^D , et P_{sc}^W ! (exercice laissé au lecteur).

Dans cette section, nous fixons un élément $\varpi \in K$ de valuation $v > 0$, et nous allons donner une version \mathbb{Z}_ℓ -rationnelle du théorème 4 de l'introduction. Cela permet de descendre les foncteurs du théorème 3 à la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$.

(3.3.1) Compatibilité des correspondances à l'action de Galois. Comme dans le cas ℓ -adique, les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands ℓ -modulaires sont compatibles à l'action de Galois :

LEMME.— *Les applications $\pi \mapsto \rho(\pi)$ et $\pi \mapsto \sigma'(\pi) := \sigma(\pi)(\frac{d-1}{2})$ du théorème 1 sont compatibles à l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_\ell/\mathbb{F}_\ell)$ sur les ensembles de classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles concernés.*

Preuve. La compatibilité de $\pi \mapsto \rho(\pi)$ à l'action de Galois découle de la caractérisation par les caractères de Brauer de [12]. Le point i) du théorème 1 nous assure que l'application $\pi \mapsto \rho(\pi) \otimes \sigma'(\pi)$ est aussi compatible à l'action de Galois. Il s'ensuit que $\pi \mapsto \sigma'(\pi)$ l'est aussi. \square

(3.3.2) Correspondance entre \mathbb{F}_ℓ -représentations. Dans le cas ℓ -adique, on sait que les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations supercuspidales sont définies sur leur corps de rationalité, mais ce n'est pas toujours le cas pour les représentations de D^\times et W_K . Cette obstruction n'existe pas sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ puisque tout corps fini est commutatif. On déduit donc du lemme précédent :

COROLLAIRE.— *Pour tout corps fini \mathbb{F} de caractéristique ℓ , les correspondances $\pi \mapsto \sigma'(\pi)$ et $\pi \mapsto \rho(\pi)$ descendent en des correspondances entre classes de \mathbb{F} -représentations absolument irréductibles, la première étant une bijection entre “supercuspidales” et “de dimension d ”, la seconde étant injective. De plus, on a encore*

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G} \left(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{IT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi \right) \simeq \rho(\pi) \otimes_{\mathbb{F}} \sigma'(\pi).$$

Changeant de point de vue, on passe aux représentations irréductibles sur \mathbb{F}_ℓ . Le commutant d'une telle représentation π est une extension finie \mathbb{F}_π de \mathbb{F}_ℓ de degré d_π . Si l'on voit π comme une \mathbb{F}_π -représentation irréductible, le corollaire ci-dessus nous fournit des \mathbb{F}_π -représentations absolument irréductibles $\sigma'_{\mathbb{F}_\pi}(\pi)$ et $\rho_{\mathbb{F}_\pi}(\pi)$. Comme les $\text{Gal}(\mathbb{F}_\pi/\mathbb{F}_\ell)$ -orbites de ces représentations ont le même cardinal d_π que celui de la $\text{Gal}(\mathbb{F}_\pi/\mathbb{F}_\ell)$ -orbite de π , elles sont aussi irréductibles, *en tant que \mathbb{F}_ℓ -représentations*.

COROLLAIRE.— *Par le procédé ci-dessus, on obtient :*

- i) *Une bijection $\pi \mapsto \sigma'(\pi)$ entre classes de \mathbb{F}_ℓ -représentations irréductibles supercuspidales de G et classes de \mathbb{F}_ℓ -représentations irréductibles de W_K de dimension d sur leur commutant,*
- ii) *Une injection $\pi \mapsto \rho(\pi)$ des classes de \mathbb{F}_ℓ -représentations irréductibles supercuspidales de G dans les classes de \mathbb{F}_ℓ -représentations irréductibles de D^\times ,*

uniquement caractérisées par la propriété suivante :

iii) la \mathbb{F}_ℓ -représentation (irréductible) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell), \pi)$ de $D^\times \times W_K$ est $\rho(\pi)$ -isotypique et $\sigma'(\pi)$ -isotypique.

(3.3.3) Scindage de catégories. Soit π une \mathbb{F}_ℓ -représentation irréductible supercuspidale de G . Choisissons un plongement $\mathbb{F}_\pi \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell$. La $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation $\overline{\pi} := \pi \otimes_{\mathbb{F}_\pi} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ contient un type $(J, \overline{\lambda}')$ comme dans le paragraphe (B.1.6). L'unicité de la paire $(J, \overline{\lambda}')$ à G -conjugaison près nous assure que le corps de rationalité de $\overline{\lambda}'$ est le même que celui de $\overline{\pi}$, à savoir \mathbb{F}_π . Donc $\overline{\lambda}'$ est de la forme $\lambda' \otimes_{\mathbb{F}_\pi} \overline{\mathbb{F}}_\ell$. Choisissons une enveloppe projective $P_{\lambda'}$ de λ' dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{W}(\mathbb{F}_\pi)}^\infty(J/\varpi^\mathbb{Z})$ (ici $\mathbb{W}(\mathbb{F}_\pi)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans \mathbb{F}_π), et posons $P_\pi^\varpi := \mathrm{ind}_J^G(P_{\lambda'})$. C'est une \mathbb{F}_π -représentation, mais nous oublions maintenant la \mathbb{F}_π -structure.

PROPOSITION.— La sous-catégorie pleine \mathcal{C}_π^ϖ de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G/\varpi^\mathbb{Z})$ formée des objets dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à π , est facteur direct et pro-engendrée par P_π^ϖ . De plus, on a

$$\mathfrak{Z}_\pi^\varpi := \mathrm{End}_G(P_\pi^\varpi) \simeq \mathbb{W}(\mathbb{F}_\pi)[\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})]$$

où f est la longueur de $\pi|_{G^0}$ sur \mathbb{F}_π .

Preuve. Les $\mathbb{F}_\pi J$ -sous-quotients irréductibles de $P_{\lambda'}$ sont tous isomorphes à λ' . Comme λ' est $\mathbb{F}_\ell J$ -irréductible, la même propriété est vraie pour les $\mathbb{F}_\ell J$ -sous-quotients, et on en déduit les deux premières assertions comme dans (B.1.6). Le calcul de commutant a été effectué dans la proposition (B.1.6) ii). \square

De la même manière, on construit un pro-générateur $P_{\rho(\pi)}^\varpi$ de la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\rho(\pi)}^\varpi$ de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(D^\times)$ définie de manière maintenant usuelle, et dont le commutant $\mathfrak{Z}_{\rho(\pi)}^\varpi$ est isomorphe (abstraitement) à \mathfrak{Z}_π^ϖ .

(3.3.4) Les résultats. Décomposons

$$H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathrm{sc}} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Scusp}_{\mathbb{F}_\ell}(G/\varpi^\mathbb{Z})} H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathcal{C}_\pi^\varpi}.$$

Par les mêmes arguments que le théorème (3.2.4) et le théorème 4, on prouve :

THÉORÈME.— Il existe un isomorphisme $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}_{\rho(\pi)}^\varpi$ et une décomposition

$$P_\pi^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} P_{\rho(\pi)^\vee}^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} P_{\sigma'(\pi)^\vee}^\varpi \xrightarrow{\sim} H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}/\varpi^\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathcal{C}_\pi^\varpi},$$

où $P_{\sigma'(\pi)^\vee}^\varpi$ est un φ -relèvement de $\sigma'(\pi)^\vee$ sur \mathfrak{Z}_π^ϖ , qui est universel pour les $W(\mathbb{F}_\pi)$ - φ -déformations.

À partir de là, on définit deux foncteurs

$$\Pi \mapsto \rho(\Pi) := \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Scusp}_{\mathbb{F}_\ell}(G/\varpi^\mathbb{Z})} P_{\rho(\pi)}^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(P_\pi^\varpi, \pi)$$

$$\text{et } \Pi \mapsto \sigma'(\Pi) := \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Scusp}_{\mathbb{F}_\ell}(G/\varpi^\mathbb{Z})} P_{\sigma'(\pi)}^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(P_\pi^\varpi, \pi).$$

On obtient alors le même énoncé (et avec la même preuve) que le théorème 3 mais pour R une \mathbb{Z}_ℓ -algèbre, et en se restreignant aux R -familles de $G/\varpi^\mathbb{Z}$ -représentations, resp. de $D^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ -représentations, resp. de W_K -représentations de déterminant 1 sur φ .

(3.3.5) REMARQUE.— Lorsque l'on enlève la condition “ ϖ ”, on ne peut parfois pas trouver de $P_{\rho(\pi)}$ dont le commutant soit un anneau commutatif (ou, de manière équivalente, tel que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell G}(P_{\rho(\pi)}, \rho(\pi))$ soit de dimension 1). Ceci est lié au fait que $\rho(\pi)$ et $\rho(\pi)^0$ n'ont pas nécessairement le même corps de rationalité. Lorsque cela se produit, on ne peut plus décomposer $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)_{\mathcal{C}_\pi}$ en un triple produit tensoriel. Plus précisément, on ne peut pas séparer l'action de D^\times de celle de W_K .

A Propriétés de perfection du complexe de cohomologie

A.1 Perfection dans $\mathcal{D}(G)$

Rappelons l'énoncé que nous voulons prouver, pour une \mathbb{Z}_ℓ -algèbre finie Λ :

PROPOSITION.— *Le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \Lambda) \in \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}_\Lambda^\infty(G))$ est localement parfait, d'amplitude parfaite $[0, 2d - 2]$.*

Notre preuve est une adaptation de l'argument de Deligne et Lusztig de [13, Prop. 3.7], avec quelques complications techniques.

(A.1.1) Preuve dans le cas de torsion. Nous fixons un niveau $H = H_n$ et notons $\mathcal{H} := \mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)$ l'algèbre de Hecke correspondante. Nous noterons simplement $R\Gamma_c^H$ le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \Lambda)^H$ qui est un objet de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{H}))$ des \mathcal{H} -modules à gauche. On veut montrer qu'il est parfait d'amplitude contenue dans $[0, 2d - 2]$.

Première étape. D'après [10, Lemme 3.5.9], ce complexe s'identifie à $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}, n}, \Lambda)$. En particulier, ses groupes de cohomologie sont de type fini sur \mathcal{H} , et nuls en degré $> 2d - 2$. Par (2.1.1), on peut donc représenter $R\Gamma_c^H$ par un complexe $(P_n, d_n)_{n \leq 2d-2}$ de \mathcal{H} -modules projectifs de type fini, à composantes nulles en degré $> 2d - 2$. Tronquons ce complexe en degré 0 en remplaçant P_0 par $Q_0 := P_0/\mathrm{im}(d_{-1})$ et en posant $Q_i = P_i$ pour $i > 0$. On obtient un complexe borné de \mathcal{H} -modules, nul en dehors de $[0, 2d - 2]$, dont tous les termes sont projectifs, sauf éventuellement Q_0 , et isomorphe à $R\Gamma_c^H$ dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{H}))$.

Deuxième étape. Il nous faut maintenant prouver que Q_0 est projectif. Comme il est de présentation finie, il suffira de prouver qu'il est *plat*, i.e. que pour tout $i > 0$ et pour tout \mathcal{H} -module à droite M , le Λ -module $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{H}}(M, Q_0) = \mathcal{H}^{-i}(M \otimes_{\mathcal{H}}^L Q_0)$ est nul. Il est alors utile de remarquer que le morphisme canonique $R\Gamma_c^H \rightarrow Q_0$ dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}(\mathcal{H}))$ induit justement des isomorphismes

$$\mathcal{H}^{-i}(M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{-i}(M \otimes_{\mathcal{H}}^L Q_0)$$

pour $i > 0$; ceci se voit facilement sur la suite spectrale $E_1^{pq} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{H}}(M, Q_q) \Rightarrow \mathcal{H}^{q-p}(M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H)$ qui dégénère en E_2 puisque $E_1^{pq} = 0$ dès que $pq \neq 0$.

Troisième étape. Afin de mieux comprendre l'objet $M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H$, nous exprimons le complexe $R\Gamma_c^H$ d'une autre manière. Soit $\mathcal{P}_{\mathrm{LT}}$ l'espace des périodes de Lubin-Tate, et soit

$$\xi_n : \mathcal{M}_{\mathrm{LT}, n} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{nr}} \simeq \mathbb{P}_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}^{d-1}$$

le morphisme de périodes de Gross-Hopkins et Rapoport-Zink. Comme ξ_n est un morphisme étale, on a $R\xi_{n,!}(\Lambda) = \xi_{n,!}(\Lambda)$, et donc un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\Lambda))$

$$(A.1.1.1) \quad R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT},n}^{\text{ca}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!}(\Lambda)).$$

LEMME.— *Le faisceau étale $\xi_{n,!}(\Lambda)$ sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$ est naturellement muni d'une structure de faisceau de \mathcal{H} -modules, telle que*

- i) ses fibres sont isomorphes au \mathcal{H} -module $\mathcal{C}_c(H \backslash G, \Lambda)$ (fonctions à support compact).*
- ii) l'isomorphisme (A.1.1.1) provient d'un isomorphisme dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\mathcal{H}))$.*

Preuve. Commençons plus généralement avec un faisceau étale de Λ -modules \mathcal{F} sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$, et montrons comment le faisceau $\xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F})$ est naturellement un faisceau de \mathcal{H} -modules. Soit $U \xrightarrow{f} \mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$ un morphisme étale. Pour expliciter la structure de \mathcal{H} -module sur $\Gamma(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F}))$, posons $U_n := \mathcal{M}_{\text{LT},n} \times_{\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}} U$. On peut alors identifier $\Gamma(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F}))$ au sous-module $\Gamma_!(U_n, \xi_n^*(\mathcal{F})) \subset \Gamma(U_n, \xi_n^*(\mathcal{F}))$ des sections à support propre au-dessus de U . Comme dans [10, 3.3.2], la colimite $\varinjlim_m \Gamma_!(U_m, \xi_m^*(\mathcal{F}))$ est munie d'une action lisse de G . Comme dans [10, 3.5.10], le morphisme canonique

$$\Gamma(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F})) = \Gamma_!(U_n, \xi_n^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \left(\varinjlim_m \Gamma_!(U_m, \xi_m^*(\mathcal{F})) \right)^{H_n}$$

est un isomorphisme et permet donc de munir le terme de gauche d'une action de \mathcal{H} . De même on a un isomorphisme

$$\Gamma_c(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F})) = \Gamma_c(U_n, \xi_n^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \left(\varinjlim_m \Gamma_c(U_m, \xi_m^*(\mathcal{F})) \right)^{H_n}$$

qui montre que $\Gamma_c(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F}))$ est un sous- \mathcal{H} -module de $\Gamma(U, \xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F}))$. Si le Λ -module \mathcal{F} est injectif, il en est de même de $\xi_n^*(\mathcal{F})$ (puisque ξ_n^* est adjoint à droite du foncteur exact $\xi_{n,!}$), et le faisceau $\xi_{n,!}\xi_n^*(\mathcal{F})$ est donc $\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, -)$ -acyclique (par [1, Thm 5.2.2]). Appliquant ceci à une résolution injective de Λ sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$, on obtient l'isomorphisme annoncé au ii) dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\mathcal{H}))$:

$$R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!}(\Lambda)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)^{H_n}.$$

Finalement, le point i) découle du fait que ξ_n fait de $\mathcal{M}_{\text{LT},n}$ un revêtement étale au sens de [20], dont les fibres géométriques sont isomorphes à G/H . □

Quatrième étape. Rappelons maintenant que le foncteur $R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, -)$, dont la source naturelle est $\mathcal{D}^+(\text{Mod}_\Lambda(\widehat{\mathcal{P}}_{\text{LTet}}))$ (catégorie dérivée des faisceaux étales de Λ -modules sur \mathcal{P}_{LT} , cf [10, 3x.3] pour les notations), est de dimension cohomologique finie, égale à $2d - 2$. Il se prolonge donc à la catégorie dérivée non bornée $\mathcal{D}(\text{Mod}_\Lambda(\widehat{\mathcal{P}}_{\text{LTet}}))$, ce qui nous permet de définir le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, M \otimes_{\mathcal{H}}^L \xi_{n,!}(\Lambda))$ pour un \mathcal{H} -module à droite M . Lorsque M est libre de type fini sur \mathcal{H} , le morphisme canonique

$$(A.1.1.2) \quad M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!}(\Lambda)) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, M \otimes_{\mathcal{H}}^L \xi_{n,!}(\Lambda))$$

est clairement un isomorphisme. Lorsque M est simplement de type fini, la noethériannité de \mathcal{H} permet d'en trouver une résolution (infinie) par des \mathcal{H} -modules libres de type fini. Un argument de double complexe montre alors que *le morphisme (A.1.1.2) est encore un isomorphisme.*

Maintenant, les fibres de $\xi_{n,!}(\Lambda)$, étant isomorphes à $\mathcal{C}_c(H \backslash G, \Lambda)$, sont *plates sur \mathcal{H}* . En effet, on a

FAIT.— La sous-catégorie de $\text{Rep}_\Lambda^\infty(G)$ formée des objets engendrés par leurs H -invariants est une sous-catégorie facteur direct.

Voir [10, Fait 3.5.8], ou appliquer [21, Thm 3.1] au système d'idempotents $(e_x)_{x \in BT^\circ}$ associé aux sous-groupes de congruences de niveau n , comme dans [21, Lem 2.6]. Dans cette situation, le foncteur $V \mapsto V^H = \text{Hom}_G(\mathcal{C}_c(H \backslash G, \Lambda), V)$ induit une équivalence de cette sous-catégorie sur la catégorie des \mathcal{H} -modules à droite, et son adjoint à gauche

$$(A.1.1.3) \quad M \mapsto M \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}_c(H \backslash G, \Lambda)$$

en est une équivalence inverse, donc est exact.

On a donc simplement $M \otimes_{\mathcal{H}}^L \xi_{n,!}(\Lambda) = M \otimes_{\mathcal{H}} \xi_{n,!}(\Lambda)$ et on obtient finalement un isomorphisme

$$M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, M \otimes_{\mathcal{H}} \xi_{n,!}(\Lambda)).$$

Mais le complexe de droite est le complexe de cohomologie d'un faisceau, donc n'a pas de cohomologie en degrés négatifs. On a donc bien $\mathcal{H}^{-i}(M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H) = 0$ pour $i > 0$.

Cinquième étape. A ce point, nous avons prouvé que $R\Gamma_c^H$ est parfait d'amplitude contenue dans $[0, 2d-2]$. Le fait que l'amplitude est exactement $[0, 2d-2]$ découle du lemme ci-dessous. On y note $\mathbf{1}_\Lambda$ le caractère "trivial" de \mathcal{H} à valeurs dans Λ , qui envoie la fonction caractéristique de HgH sur $\#(H \backslash HgH) \in q^{\mathbb{Z}}$. C'est l'image de la Λ -représentation triviale de G par le foncteur $V \mapsto V^H$.

LEMME.— On a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{1}_\Lambda \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda) = \bigoplus_{k=0}^{2d-2} \Lambda(-k)[-2k].$$

Preuve. D'après la quatrième étape, le terme de gauche s'identifie à $R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbf{1}_\Lambda \otimes_{\mathcal{H}} \xi_{n,!}(\Lambda))$. Comme le foncteur (A.1.1.3) est une équivalence inverse de $V \mapsto V^H$, on a $\mathbf{1}_\Lambda \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{C}_c(H \backslash G, \Lambda) \simeq \Lambda$, et le faisceau $\mathbf{1}_\Lambda \otimes_{\mathcal{H}} \xi_{n,!}(\Lambda)$ est donc un système local en Λ -modules libres de rang 1 sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$. D'après [20, Lemma 7.3], un tel système local est trivial sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}$. \square

(A.1.2) *Preuve dans le cas ℓ -adique.* Il n'y a rien à modifier aux deux premières étapes, mais l'isomorphisme (A.1.1.1) n'est plus correct. Pour le corriger, nous devons rappeler la construction du complexe $R\Gamma_c$. On utilise librement les notations de [10, 3.3]. On note en particulier Λ_\bullet le pro-anneau $(\Lambda/\ell^n \Lambda)_{n \in \mathbb{N}}$, $\text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{X}_{\text{et}})$ la catégorie abélienne des faisceaux étales de Λ_\bullet -modules sur un espace analytique X , et $\mathcal{D}^+(\text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{X}_{\text{et}}))$ sa catégorie dérivée. On dispose alors du foncteur limite projective

$$\lim_{\leftarrow}^{\widetilde{X}_{\text{et}}} : \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{X}_{\text{et}}) \longrightarrow \text{Mod}_\Lambda(\widetilde{X}_{\text{et}}).$$

Par [10, (3.5.10)], $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H$ est l'évaluation en le pro-faisceau constant Λ_\bullet sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$ du foncteur dérivé du foncteur

$$\mathcal{F}_\bullet \mapsto \Gamma_c \left(\mathcal{M}_{\text{LT},n}^{\text{ca}}, \lim_{\leftarrow}^{\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{LT},n,\text{et}}} (\xi_n^*(\mathcal{F}_\bullet)) \right) = \Gamma_c \left(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!} \xi_n^* \left(\lim_{\leftarrow}^{\widetilde{\mathcal{P}}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}} (\mathcal{F}_\bullet) \right) \right).$$

L'égalité utilise l'isomorphisme $\lim_{\leftarrow}^{\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{LT},n,\text{et}}} \circ \xi_n^* \xrightarrow{\sim} \xi_n^* \circ \lim_{\leftarrow}^{\widetilde{\mathcal{P}}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}$, qui lui-même vient du fait que ξ_n est étale. Maintenant, la formule de projection nous donne un isomorphisme

de faisceaux sur $\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{nr}}$

$$\xi_{n,!}\xi_n^* \left(\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\mathcal{F}_\bullet) \right) \xrightarrow{\sim} \xi_{n,!}(\Lambda) \otimes_{\Lambda} \left(\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\mathcal{F}_\bullet) \right)$$

dans lequel $\xi_{n,!}(\Lambda)$ désigne l'image directe à supports propres du faisceau constant de fibres Λ sur $\mathcal{M}_{\text{LT},n}$. Appliquant ceci à une résolution injective de Λ_\bullet , on obtient l'isomorphisme suivant dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\Lambda))$, analogue de (A.1.1.1) :

$$(A.1.2.1) \quad R\Gamma_c^H = R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT},n}^{\text{ca}}, \Lambda) \simeq R\Gamma_c \left(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!}(\Lambda) \otimes_{\Lambda}^L (R\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\Lambda_\bullet)) \right).$$

Comme dans le cas de torsion (lemme ci-dessus), cet isomorphisme vit par construction dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\mathcal{H}))$. Pour tout \mathcal{H} -module à droite de type fini M , l'isomorphisme (A.1.2.2) devient

$$(A.1.2.2) \quad M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c \left(\mathcal{P}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, (M \otimes_{\mathcal{H}}^L \xi_{n,!}(\Lambda)) \otimes_{\Lambda}^L (R\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\Lambda_\bullet)) \right).$$

Les fibres de $\xi_{n,!}(\Lambda)$ étant des \mathcal{H} -modules plats, on peut supprimer le premier L dans le terme de droite. Le complexe $R\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\Lambda_\bullet)$ de $\mathcal{D}^+(\text{Mod}_{\Lambda}(\widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}))$ est concentré en degrés ≥ 0 , et son \mathcal{H}^0 est le faisceau constant Λ , qui est donc sans ℓ -torsion. Il s'ensuit que le complexe $(M \otimes_{\mathcal{H}} \xi_{n,!}(\Lambda)) \otimes_{\Lambda}^L (R\lim_{\leftarrow} \widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}}(\Lambda_\bullet)) \in \mathcal{D}^+(\text{Mod}_{\Lambda}(\widetilde{\mathcal{P}_{\text{LT},\text{et}}^{\text{nr}}))$ est concentré en degrés ≥ 0 , et il en est donc de même du complexe $M \otimes_{\mathcal{H}}^L R\Gamma_c^H$.

A.2 Perfection dans $\mathcal{D}(D^\times)$

(A.2.1) PROPOSITION.— *Soit Λ une \mathbb{Z}_ℓ -algèbre finie et H un sous-groupe de congruences de $\text{GL}_d(\mathcal{O})$. Le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H$ est parfait d'amplitude $[d-1, 2d-2]$ dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\Lambda}^{\infty}(D^\times))$.*

Preuve. La preuve de cette proposition repose sur le théorème de Faltings-Fargues [15, IV.13.2] qui affirme l'existence d'un isomorphisme naturel

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda) \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda) \quad \text{dans } \mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\Lambda}^{\infty,c}(GD \times W_K))$$

où le terme de droite désigne le complexe de cohomologie équivariant de la “tour de Drinfeld”. Nous allons donc travailler du côté “Drinfeld” en renvoyant à [10, 3.3] pour les notations employées.

On sait que la cohomologie de $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H$ est de type fini sur le centre de G . Puisque le centre de D^\times agit comme celui de G , on en conclut que la cohomologie de $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)$ est de type fini sur D^\times . Fixons alors un sous-groupe de congruences $J_n := 1 + \varpi^n \mathcal{O}_D$ de D^\times agissant trivialement sur ces espaces de cohomologie. On sait d'après [10, 3.5.6] que $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda)^{J_n} \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr},n}^{\text{ca}}, \Lambda)$. Soit $\xi_n : \mathcal{M}_{\text{Dr},n} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{Dr}} = \Omega_{\overline{K}^{\text{nr}}}^{d-1}$ le morphisme de périodes de Drinfeld et Rapoport-Zink. Comme dans la preuve de la proposition (2.1.3), le faisceau $\xi_{n,!}(\Lambda)$ est naturellement un faisceau G -équivariant de $\Lambda[D^\times/J_n]$ -modules et on a un isomorphisme

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda)^{J_n} \simeq R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \xi_{n,!}(\Lambda))$$

dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda(D^\times/J_n))$, et même dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda^\infty(G \times D^\times/J_n))$. Les fibres de $\xi_{n,!}(\Lambda)$ sont ici encore des $\Lambda[D^\times/J_n]$ -modules plats, et même libres de rang 1. On a donc pour tout $\Lambda[D^\times/J_n]$ -module M un isomorphisme

$$M \otimes_{\Lambda[D^\times/J_n]}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda)^{J_n} \simeq R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, M \otimes_{\Lambda[D^\times/J_n]} \xi_{n,!}(\Lambda))$$

dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda^\infty(G))$, d'où l'on déduit un isomorphisme

$$M \otimes_{\Lambda[D^\times/J_n]}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H \simeq R\Gamma_c(\mathcal{P}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, M \otimes_{\Lambda[D^\times/J_n]} \xi_{n,!}(\Lambda))^H$$

dans $\mathcal{D}^b(\text{Mod}(\Lambda))$. On peut donc suivre le même raisonnement que dans la preuve de la proposition (2.1.3) pour en conclure que *le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H$ est parfait d'amplitude contenue dans $[0, 2d - 2]$ dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}(D^\times/J_n))$.*

Il reste maintenant à montrer que l'amplitude parfaite est en fait la meilleure possible, égale à l'amplitude cohomologique $[d - 1, 2d - 2]$. Pour cela, notons $D^0 := \mathcal{O}_D^\times$ le groupe des entiers inversibles de D . On se souvient [10, 3.5.2] que

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda) = \text{ind}_{D^0}^D \left(R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \Lambda) \right),$$

où $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \Lambda) \in \mathcal{D}^b(\text{Rep}_\Lambda^\infty(D^0))$ est le complexe de cohomologie de la tour $(\mathcal{M}_{\text{LT}, n}^{(0)})_{n \in \mathbb{N}}$ formée de revêtements étales finis de \mathcal{P}_{Dr} . De même

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{\text{ca}}, \Lambda)^H = \Lambda[D^\times/J_n] \otimes_{\Lambda[D^0/J_n]} (R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \Lambda)^H).$$

Notons que la même preuve que ci-dessus montre que $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \Lambda)^H$ est un complexe parfait de $\Lambda[D^0/J_n]$ -modules. Il nous suffira donc de montrer que son amplitude parfaite est bien $[d - 1, 2d - 2]$. On peut aussi se restreindre au cas $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell$ puisque les autres s'en déduisent par changement de coefficients.

Faisons ici une petite digression. Soit A un groupe et \mathcal{C} un complexe parfait de $\mathbb{Z}_\ell[A]$ -modules d'amplitude cohomologique $[a, b]$ et d'amplitude parfaite $[\alpha, \beta]$. Par définition, on a $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$. On voit aussi facilement que $b = \beta$, car si $\beta > b$, la différentielle $d_{\beta-1} : P_{\beta-1} \rightarrow P_\beta$ est surjective et donc scindable. Supposons de plus que A est *fini*. Dans ce cas le \mathbb{Z}_ℓ -dual d'un $\mathbb{Z}_\ell[A]$ -module projectif est encore un $\mathbb{Z}_\ell[A]$ -module projectif. Ainsi le complexe dual \mathcal{C}^\vee est parfait d'amplitude parfaite $[-\beta, -\alpha]$. De plus, les suites exactes

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\ell}^1(\mathcal{H}^{-i+1}(\mathcal{C}), \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{C}^\vee) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{C}), \mathbb{Z}_\ell)$$

montrent que $\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{C}^\vee)$ est nul pour $i > -a + 1$, et même pour $i = -a + 1$ si $\mathcal{H}^a(\mathcal{C})$ n'a pas de ℓ -torsion. Dans ce dernier cas, on a alors $\alpha = a$, *i.e.* l'amplitude parfaite coïncide avec l'amplitude cohomologique.

Ceci s'applique au complexe $\mathcal{C} = R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)^H$ et $A = D^0/J_n$, puisque l'on sait que $H_c^{d-1}(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion (vu que $H_c^{d-2}(\mathcal{M}_{\text{Dr}}^{(0), \text{ca}}, \mathbb{F}_\ell)$ est nul, par [2, Cor 6.2]). \square

(A.2.2) REMARQUE.— Contrairement à ce que pourraient laisser penser les propositions (2.1.3) et (A.2.1), le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \Lambda)$ n'est pas parfait en tant que complexe de $\mathcal{D}_\Lambda^b(G \times D^\times)$ ou $\mathcal{D}^b \text{Rep}_\Lambda^\infty(GD)$. Pour le voir, faisons $\Lambda = \mathbb{F}_\ell$ et considérons le complexe

$$\mathcal{C} := R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\text{LT}}^{\text{ca}}, \mathbb{F}_\ell) \otimes_{\text{GL}_d(\mathcal{O})_{K^\times}}^L \mathbb{F}_\ell \in \mathcal{D}^b \text{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(D^\times/K^\times).$$

Si ce complexe n'est pas parfait dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(D^\times)$, resp. $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(D^\times/K^\times)$, alors le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT}}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell)$ ne l'est pas dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(G \times D^\times)$, resp. $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(GD)$. Comme dans [10, 3.5.9] et [10, 3.5.5], on a

$$\mathcal{C} \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT},0}^{\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell) \otimes_{\varpi^{\mathbb{Z}}}^L \mathbb{F}_\ell = \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times/\varpi^{\mathbb{Z}}}^{D^\times} \left(R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{LT},0}^{(0),\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell) \right).$$

Or, $\mathcal{M}_{\mathrm{LT},0}^{(0)}$ est une boule unité ouverte de dimension $d - 1$ donc

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times/\mathcal{O}^\times}^{D^\times/K^\times} (\mathbb{F}_\ell) [2 - 2d].$$

Supposons maintenant que l'ordre de q dans \mathbb{F}_ℓ soit exactement d . Dans ce cas, la \mathbb{F}_ℓ -représentation triviale du groupe \mathbb{F}_ℓ^\times est de dimension cohomologique infinie, et il en est donc de même de la \mathbb{F}_ℓ -représentation lisse triviale de $\mathcal{O}_D^\times/K^\times$, ainsi que de la \mathbb{F}_ℓ -représentation $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^\times/\mathcal{O}^\times}^{D^\times/K^\times} (\mathbb{F}_\ell)$, qu'elle soit vue comme représentation de D^\times ou de D^\times/K^\times . Le complexe \mathcal{C} n'est donc pas parfait dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(D^\times)$, ni dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(D^\times/K^\times)$.

On en déduit, sous la même hypothèse de congruence, que le complexe de cohomologie du demi-espace de Drinfeld $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{\mathrm{Dr},0}^{(0),\mathrm{ca}}, \mathbb{F}_\ell)$ n'est pas parfait dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(G)$ ni dans $\mathcal{D}^b\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_\ell}^\infty(G/K^\times)$. Comme ce complexe est scindé (par les poids), cela signifie qu'au moins un des espaces de cohomologie est de dimension cohomologique infinie.

B Scindages de catégories, enveloppes projectives, et déformations

Dans cet appendice, nous rassemblons les résultats de pure théorie des représentations utilisés dans le corps du texte. Nous utiliserons le lemme suivant sur une manière générale de scinder une catégorie abélienne.

(B.0.1) LEMME.— *Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne avec produits et coproduits, et S un ensemble d'objets simples de \mathcal{C} . Notons \mathcal{C}_S , resp. \mathcal{C}^S la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets dont tous les sous-quotients simples sont dans S , resp. aucun sous-quotient simple n'est dans S .*

- i) Si \mathcal{C}_S contient un objet projectif P_S de \mathcal{C} tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_S, s) \neq 0$ pour tout $s \in S$, alors tout objet V de \mathcal{C} possède une unique filtration $V_S \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V^S$ avec $V_S \in \mathcal{C}_S$ et $V^S \in \mathcal{C}^S$.*
- ii) Si de plus \mathcal{C}_S contient un objet injectif I_S de \mathcal{C} tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s, I_S) \neq 0$ pour tout $s \in S$, alors la filtration est (canoniquement) scindée. Le foncteur somme directe $\mathcal{C}_S \times \mathcal{C}^S \longrightarrow \mathcal{C}$ est donc une équivalence de catégories.*

Preuve. *i)* Comme la somme de deux sous-objets de V appartenant à \mathcal{C}_S appartient encore à \mathcal{C}_S , on peut définir le plus grand sous-objet de V appartenant à \mathcal{C}_S . Notons-le V_S . Supposons que V/V_S n'est pas dans \mathcal{C}^S . Alors V possède un sous-objet W contenant V_S tel que W/V_S se surjecte sur un objet $s \in S$. Mais alors on en déduit un morphisme $P_S \longrightarrow W$ dont l'image n'est pas dans V_S : contradiction.

ii) Duale, comme le quotient de V par l'intersection de deux sous-objets de quotients dans \mathcal{C}_S est encore dans \mathcal{C}_S , on peut définir le plus grand quotient de V appartenant

à \mathcal{C}_S . Notons-le V_S^q . Toujours dualement, l'existence de I_S assure que le noyau de $V \rightarrow V_S^q$ est dans \mathcal{C}^S . Ceci entraîne alors que la composée $V_S \rightarrow V_S^q$ est un isomorphisme.

Le foncteur du *ii*) est clairement fidèle. Il est aussi plein car $\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(B, A) = 0$ si $A \in \mathcal{C}_S$ et $B \in \mathcal{C}^S$. On vient de montrer qu'il est essentiellement surjectif. \square

Nous aurons aussi besoin du fait suivant, très classique.

(B.0.2) FAIT– Soit P un générateur projectif compact (=de type fini) d'une catégorie abélienne \mathcal{C} essentiellement petite avec limites inductives exactes, et soit $\mathfrak{Z} := \text{End}_{\mathcal{C}}(P)^{\text{opp}}$ l'anneau opposé de son commutant. Alors les foncteurs $V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, V)$ et $M \mapsto P \otimes_{\mathfrak{Z}} M$ sont des équivalences de catégories entre \mathcal{C} et $\text{Mod}(\mathfrak{Z})$ “inverses” l'une de l'autre.

B.1 Représentations supercuspidales et scindages de $\text{Rep}(G)$

(B.1.1) Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ -représentation irréductible *supercuspidale* de G (au sens habituel de Vignéras rappelé au-dessus du théorème 1), et soit π^0 un sous-quotient irréductible de $\pi|_{G^0}$. On rappelle que $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}$ désigne l'extension non ramifiée maximale de \mathbb{Z}_{ℓ} dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\ell}$. On désigne par ϖ un élément de K de valuation $v > 0$, et par $\varpi^{\mathbb{Z}}$ le sous-groupe discret qu'il engendre, que l'on considère parfois comme un sous-groupe central de G . Sans perte de généralité pour ce qui suit, nous supposons que le caractère central de π est trivial sur ϖ . On s'intéresse aux sous-catégories pleines suivantes :

- $\mathcal{C}_{\pi} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(G)$ formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}G^0$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\pi|_{G^0}$.
- $\mathcal{C}_{\pi}^{\varpi} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$ formée des $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}$ -représentations de $G/\varpi^{\mathbb{Z}}$ et dont tous les $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}G$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à π .
- $\mathcal{C}_{\pi^0}^0 \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(G^0)$ formée des $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}$ -représentations de G^0 dont tous les $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}G^0$ -sous-quotients sont isomorphes à π^0 .

Nous voulons montrer qu'elles sont facteurs directs, en exhiber des progénérateurs convenables, et calculer les commutants de ces générateurs. Pour cela, choisissons un type simple (J°, λ) contenu dans π^0 , cf. [28, III.5.10.i]) où le type est dit “minimal-maximal”. Ainsi, J° est un sous-groupe ouvert compact de G et λ une $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ -représentation irréductible de J° , et l'on a d'après [28, III.5.3]

$$\pi^0 \simeq \text{ind}_{J^{\circ}}^{G^0}(\lambda).$$

Soit P_{λ} une enveloppe projective de λ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(J^{\circ})$. Dans les énoncés qui suivent, l'entier f désigne la longueur de $\pi|_{G^0}$.

(B.1.2) PROPOSITION.– Posons $P_{\pi^0} := \text{ind}_{J^{\circ}}^{G^0}(P_{\lambda})$ et $P_{\pi} := \text{ind}_{J^{\circ}}^G(P_{\lambda})$.

- i*) (a) La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\pi^0}^0$ est facteur direct de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(G^0)$, pro-engendrée par P_{π^0} .
- (b) Le commutant $\mathfrak{Z}_{\pi^0}^{\text{opp}} := \text{End}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}G^0}(P_{\pi^0})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}[\text{Syl}_{\ell}(\mathbb{F}_{q^f}^{\times})]$ du ℓ -Sylow du groupe $\mathbb{F}_{q^f}^{\times}$.
- ii*) (a) La sous-catégorie \mathcal{C}_{π} est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}}^{\infty}(G)$, pro-engendrée par P_{π} .
- (b) Le commutant $\mathfrak{Z}_{\pi}^{\text{opp}} := \text{End}_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}G}(P_{\pi})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}[\text{Syl}_{\ell}(\mathbb{F}_{q^f}^{\times}) \times \mathbb{Z}]$.

Preuve. *i*)(a) Le point clef est [28, III.4.28] qui nous dit que, puisque π est *supercuspidale*, tous les sous-quotients irréductibles de $P_{\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}^{\text{nr}}} \overline{\mathbb{F}}_{\ell}$, et donc aussi ceux de P_{λ} , sont isomorphes à λ (en fait, nous donnerons une preuve alternative de ce fait (moins

élémentaire) lorsque nous démontrerons le point ii)). Il s'ensuit que $P_{\pi^0} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ est une représentation de longueur finie de G^0 , et que tous ses sous-quotients irréductibles, ainsi que ceux de P_{π^0} , sont isomorphes à π^0 . En particulier, P_{π^0} est bien un objet de $\mathcal{C}_{\pi^0}^0$. C'est même un objet projectif, puisqu'induit à supports compacts d'un objet projectif.

Il reste à voir que $\mathcal{C}_{\pi^0}^0$ est bien facteur direct de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(G^0)$. Nous avons le nécessaire pour appliquer le i) du lemme (B.0.1) avec $\mathcal{C} = \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(G^0)$, $S = \{\pi^0\}$ et $P_S = P_{\pi^0}$. Pour appliquer le ii) de ce lemme, remarquons que la $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -contragédiente $P_{\pi^0}^\vee$ de P_{π^0} est encore un objet projectif de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(G^0)$ (cf lemme (3.1.2)) et que tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à $(\pi^0)^\vee$. Posons alors $I_{\pi^0} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(P_{\pi^0}^\vee, \mathbb{Q}_\ell^{\text{nr}}/\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$. C'est un objet injectif (pas de type fini) de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(G^0)$ qui appartient $\mathcal{C}_{\pi^0}^0$ et qui contient π_0 . On peut donc appliquer le lemme (B.0.1) et conclure.

i)(b) Pour calculer l'anneau $\text{End}_{G^0}(P_{\pi^0})$, on rappelle deux propriétés du type (J°, λ) .

- a) L'ensemble d'entrelacement de λ dans G^0 est égal à J° . En conséquence, le morphisme canonique $\text{End}_{J^\circ}(P_\lambda) \rightarrow \text{End}_{G^0}(P_{\pi^0})$ est un isomorphisme.
- b) Le quotient de J° par son pro- p -radical J^1 est isomorphe à un groupe du type $\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})$ et λ est de la forme $\kappa \otimes \tau$ avec κ une représentation dont la restriction à J^1 est irréductible et admettant un unique relèvement $\tilde{\kappa}$, et τ une représentation supercuspidale du quotient $\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})$. En conséquence, P_λ est de la forme $\tilde{\kappa} \otimes P_\tau$ et on a un isomorphisme $\text{End}_{\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})}(P_\tau) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{J^\circ}(P_\lambda)$.

Reste alors à calculer $\text{End}_{\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})}(P_\tau)$. Après son étude des relèvements possibles de τ , Vignéras a observé dans [28, III.2.9] que d'après les propriétés du triangle de Cartan-Brauer, $P_\tau \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{\tilde{\tau}} \tilde{\tau}$ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -relèvements de τ , chacun apparaissant avec multiplicité 1. Elle a compté $\ell^{v_\ell(q^{f'd'}-1)} = |\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times)|$ tels relèvements,

et l'anneau qui nous intéresse est donc un ordre local dans l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\ell^{v_\ell(q^{f'd'}-1)}}$. L'auteur n'ayant pas su identifier cet ordre par des moyens élémentaires, nous utiliserons la cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig $Y_{d',f'}$ associée à l'élément de Coxeter de $\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})$, et qui est munie d'une action de $\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}}) \times \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times$. Notons \mathcal{C}_τ la sous-catégorie facteur direct de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}}))$ formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à τ , qui est donc pro-engendrée par P_τ . On sait que le complexe $R\Gamma_c(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ est parfait dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})))$, donc son facteur direct $R\Gamma_c(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau}$ est aussi parfait. Comme dans la preuve de la proposition (3.2.1), ce facteur direct est concentré en degré $d' - 1$: cela découle par exemple du théorème 3.10 de [3] car P_τ est facteur direct du module de Gelfand-Graev. Il s'ensuit que $H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau}$ est projectif, et donc est un progénérateur de \mathcal{C}_τ . Cet espace se décompose encore selon l'action de $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times$ en

$$H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau} = \bigoplus_{\theta} H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta}$$

où θ décrit l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times$ et \mathcal{C}_θ désigne la sous-catégorie des $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentations de $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times$ dont tous les sous-quotients sont isomorphes à θ . La théorie de Deligne-Lusztig nous dit qu'il y a au moins un facteur comme ci-dessus non nul et que de plus on a

$$H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\tilde{\tau}} \tilde{\tau} \otimes \tilde{\theta}$$

où $\tilde{\tau}$ décrit l'ensemble des relèvements de τ et $\tilde{\theta}$ est l'unique caractère relevant θ et associé à $\tilde{\tau}$ par la "correspondance de Deligne-Lusztig". En particulier, $H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta}$ est une enveloppe projective de τ . Maintenant, le complexe $R\Gamma_c(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ est aussi parfait dans $\mathcal{D}^b(\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times))$, donc le facteur direct $H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta}$ est aussi projectif dans \mathcal{C}_θ . Considérons alors le morphisme canonique

$$\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times]_{\mathcal{C}_\theta} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times)] \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})} \left(H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta} \right)$$

Ce morphisme entre deux $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbres libres de rang fini devient bijectif après inversion de ℓ d'après la décomposition précédente. Pour voir qu'il est lui-même bijectif, il suffit de prouver que sa réduction

$$\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times]_{\mathcal{C}_\theta} \simeq \overline{\mathbb{F}}_\ell[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times)] \longrightarrow \text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell\text{GL}_{d'}(\mathbb{F}_{q^{f'}})} \left(H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta} \right)$$

l'est, ou encore, par égalité des rangs, que cette réduction est injective. Or, cela découle de la projectivité de $H_c^{d'-1}(Y_{d',f'}^{\text{ca}}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)_{\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\theta}$ sur l'anneau local $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathbb{F}_{q^{d'f'}}^\times]_{\mathcal{C}_\theta}$.

Pour achever la preuve du point $i)(b)$, il reste à montrer l'identité $f = f'd'$. On sait que le normalisateur J de la paire (J°, λ) est de la forme $J^\circ E^\times$ pour une extension $E \supset K$ de degré d/d' et degré résiduel f' , cf [28, III.5], et que λ s'étend en une représentation λ' telle que $\text{ind}_J^G(\lambda') \simeq \pi$. On a alors

$$\pi|_{G^0} = \bigoplus_{x \in J \backslash G/G^0} \text{ind}_{(J^0)_x}^{G^0}(\lambda^x) = \bigoplus_{x \in J \backslash G/G^0} (\pi^0)^x.$$

La longueur f de $\pi|_{G^0}$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} f = [G : G^0 J] &= [G : G^0 \varpi^{\mathbb{Z}}][G^0 J : G^0 \varpi^{\mathbb{Z}}]^{-1} = d[J : J^\circ \varpi^{\mathbb{Z}}]^{-1} \\ &= d[E^\times : \mathcal{O}_E^\times K^\times]^{-1} = de(E/K)^{-1} = d'f' \end{aligned}$$

$ii)(a)$ Les sous-quotients irréductibles de $\pi|_{G^0}$ sont en nombre fini, et permutés par conjugaison sous G . En appliquant la proposition précédente à chacun d'eux, on constate que la sous-catégorie $\mathcal{C}_\pi^0 \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(G^0)$ formée des $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentations de G^0 dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\pi|_{G^0}$ est *facteur direct* de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(G^0)$, et pro-engendrée par $\bigoplus_{x \in G/G^0 \varpi^{\mathbb{Z}}} P_{\pi^0}^x \simeq P_\pi^0$.

Par définition, une $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentation lisse de G est dans \mathcal{C}_π si et seulement si sa restriction à G^0 est dans \mathcal{C}_π^0 . Soit alors $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(G)$. Par unicité, la décomposition $V|_{G^0} = V_{\mathcal{C}_\pi^0} \oplus V^{\mathcal{C}_\pi^0}$ est nécessairement G -invariante, avec $V_{\mathcal{C}_\pi^0} \in \mathcal{C}_\pi$ et $V^{\mathcal{C}_\pi^0} \in \mathcal{C}^\pi$. Inversement, l'induite d'un objet de \mathcal{C}_π^0 à G appartient à \mathcal{C}_π , et envoie tout progénérateur de \mathcal{C}_π^0 sur un progénérateur de \mathcal{C}_π . Or, $\text{ind}_{G^0}^G(P_\pi^0) \simeq P_\pi^{[G:G^0 \varpi^{\mathbb{Z}}]}$, donc P_π est bien un progénérateur de \mathcal{C}_π .

$ii)(b)$ Soit J le normalisateur de la paire (J°, λ) (noté $J^\circ E^\times$ dans [28, III.5]). On sait que l'ensemble d'entrelacement de λ dans G est contenu dans (et donc égal à) J . Celui de P_λ est alors aussi contenu dans J , et on en déduit l'isomorphisme

$$\text{End}_J(\text{ind}_{J^\circ}^J(P_\lambda)) \xrightarrow{\sim} \text{End}_G(P_\pi).$$

Par unicité de l'enveloppe projective, J normalise aussi P_λ . Comme le quotient J/J° est isomorphe à \mathbb{Z} , on peut prolonger la représentation P_λ de J° en une représentation P_λ^\dagger de J . On a alors un isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentations de J

$$\text{ind}_{J^\circ}^J(P_\lambda) \simeq P_\lambda^\dagger \otimes \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ]$$

où J agit diagonalement sur le produit tensoriel (et par translations sur $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ]$). On en déduit un morphisme d'algèbres

$$(B.1.2.1) \quad \text{End}_J \left(P_\lambda^\dagger \right) \otimes \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ] \longrightarrow \text{End}_J \left(\text{ind}_{J^\circ}^J (P_\lambda) \right).$$

De plus, la réciprocity de Frobenius nous donne une décomposition de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ]$ -modules

$$\text{End}_J \left(\text{ind}_{J^\circ}^J (P_\lambda) \right) \simeq \text{Hom}_{J^\circ} \left(P_\lambda, P_\lambda^\dagger \otimes \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ] \right) \simeq \text{End}_{J^\circ} (P_\lambda) \otimes \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ],$$

et le morphisme (B.1.2.1) est induit par l'inclusion $\text{End}_J (P_\lambda^\dagger) \subset \text{End}_{J^\circ} (P_\lambda)$ et l'identité de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[J/J^\circ]$. Reste donc à voir que l'inclusion $\text{End}_J (P_\lambda^\dagger) \subset \text{End}_{J^\circ} (P_\lambda)$ est une égalité. Comme il s'agit d'une inclusion de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -modules libres de rang fini qui est manifestement scindée, il suffit de voir que ces modules ont même rang sur $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$, et pour cela on peut étendre les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Or on sait d'une part que $P_\lambda \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est la somme directe sans multiplicité des relèvements de λ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et d'autre part que chacun de ces relèvements est normalisé par J . On en déduit que les deux algèbres ont même rang égal au nombre de relèvements de λ . \square

(B.1.3) COROLLAIRE.— *La représentation π n'est pas sous-quotient d'une induite parabolique propre.*

Preuve. En effet, si on a $W \subset i_P^G(U)$ avec $W \twoheadrightarrow \pi$, alors par projectivité on a un morphisme non nul $P_\pi \rightarrow W \subset i_P^G(U)$, et par adjonction le module de Jacquet $(P_\pi)_{N_P} = \bigoplus_{x \in G/G^0} (P_{\pi^0}^x)_{N_P}$ est non nul, donc il existe $x \in G$ tel que $(P_{\pi^0}^x)_{N_P}$ est non nul, auquel cas $((\pi^0)^x)_{N_P}$ est aussi non nul, et finalement π_{N_P} est non nul, ce qui est absurde. \square

(B.1.4) Preuve de la proposition (3.0.2). Soit $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell}^\infty(G)$. Posons $V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} := V \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ et $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}/\mathbb{Z}_\ell)$. D'après la proposition (B.1.2), on a une décomposition

$$V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} = (V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}})_{\text{sc}} \oplus (V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}})', \quad \text{avec } (V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}})_{\text{sc}} := \bigoplus_{\pi \in \text{Scusp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G)/\sim} (V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}})_{c_\pi}$$

et $(V_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}})'$ n'a aucun $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G^0$ -sous-quotient isomorphe à un $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G^0$ -sous-quotient d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation supercuspidale. Comme une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible est supercuspidale si et seulement si ses conjuguées sous Galois le sont, on constate que la décomposition ci-dessus est stable par Γ , donc provient d'une décomposition $V = V_{\text{sc}} \oplus V'$, évidemment fonctorielle en V . Par construction, V' n'a aucun sous-quotient supercuspidal au sens de (3.0.1), et par le corollaire précédent, V_{sc} est bien un objet supercuspidal au sens de (3.0.1).

(B.1.5) Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du théorème (3.2.4).

LEMME.— *Soit V une $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -représentation lisse de G^0 . Fixons un ensemble $[G/G^0J]$ de représentants des G^0J classes dans G . Alors il existe un isomorphisme de \mathfrak{Z}_π -modules*

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(P_\pi, \text{ind}_{G^0}^G(V)) \simeq \mathfrak{Z}_\pi \otimes_{\mathfrak{Z}_{\pi^0}} \left(\bigoplus_{x \in [G/G^0J]} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}G}(P_{\pi^0}, V^x) \right).$$

Preuve. La réciprocité de Frobenius et la formule de Mackey fournissent

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} G}(P_\pi, \mathrm{ind}_{G^0}^G(V)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ} \left(P_\lambda, \bigoplus_{x \in [G/JG^0]} \bigoplus_{j \in J} V^{xj} \right) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ} \left(P_\lambda, \bigoplus_{x \in [G/JG^0]} \bigoplus_{j \in J} V^x \right) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ} \left(P_\lambda, \bigoplus_{x \in G/JG^0} V^x \right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}} \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}[J/J^\circ] \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ} \left(P_\lambda, \bigoplus_{x \in G/JG^0} V^x \right) \otimes_{\mathfrak{Z}_{\pi^0}} \mathfrak{Z}_\pi
\end{aligned}$$

Pour passer à la deuxième ligne, on identifie $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ}(P_\lambda, V^{xj}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} J^\circ}(P_\lambda, V^x)$ en envoyant α sur $\alpha \circ P_\lambda^\dagger(j)$, où P_λ^\dagger est le prolongement choisi dans (B.1.2.1). On constate alors que la décomposition de la troisième ligne est compatible avec (B.1.2.1). \square

(B.1.6) Pour traiter le cas de \mathcal{C}_π^ϖ , nous introduisons quelques notations supplémentaires. Comme dans les preuves précédentes, soit J le normalisateur de λ dans G et soit λ' l'unique prolongement de λ à J contenu dans $\pi|_J$. Ce prolongement est nécessairement trivial sur ϖ , et puisque le groupe $J/\varpi^\mathbb{Z}$ est compact, il admet une enveloppe projective $P_{\lambda'}$ dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}(J/\varpi^\mathbb{Z})$. On renvoie à l'introduction pour la notion de ϖ -relèvement et de ϖ -déformation, et on rappelle que v désigne la valuation de ϖ , et $\check{\mathbb{Z}}_\ell$ le compl et e de $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$.

PROPOSITION. – Soit $P_\pi^\varpi := \mathrm{ind}_J^G(P_{\lambda'})$.

- i) La catégorie \mathcal{C}_π^ϖ est facteur direct dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}(G/\varpi^\mathbb{Z})$, pro-engendrée par P_π^ϖ , qui est une enveloppe projective de π dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}}(G/\varpi^\mathbb{Z})$.
- ii) Le commutant $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi := \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} G}(P_\pi^\varpi)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}[\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})]$ du ℓ -Sylow du groupe $\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z}$.
- iii) Soit $\Lambda_\pi^\varpi := \mathfrak{Z}_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$. La Λ_π^ϖ -représentation $\check{P}_\pi^\varpi := P_\pi^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$ est une ϖ -déformation universelle de π . En particulier, l'anneau de ϖ -déformations de π est isomorphe à $\check{\mathbb{Z}}_\ell[\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})]$.

Preuve. i) Puisque l'on sait que tous les sous-quotients de P_π^ϖ sont isomorphes à π , [28, III.5.16], l'argument utilis e pour prouver le i)(a) de la proposition (B.1.2) montre que \mathcal{C}_π^ϖ est facteur direct et pro-engendrée par P_π^ϖ . Le fait que P_π^ϖ soit une enveloppe projective découlera du point ii) qui, à travers l'équivalence de catégories $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} G}(P_\pi^\varpi, V)$ de \mathcal{C}_π^ϖ vers $\mathrm{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi^\varpi)$, montre que P_π^ϖ est l'unique objet projectif indécomposable de \mathcal{C}_π^ϖ .

ii) On sait que l'ensemble d'entrelacement de λ' , donc aussi celui de $P_{\lambda'}$, est contenu dans J . Le morphisme canonique

$$\mathrm{End}_J(P_{\lambda'}) \longrightarrow \mathrm{End}_G(P_\pi^\varpi)$$

est donc un isomorphisme. Considérons l'induite $\mathrm{ind}_{J^\circ}^{J/\varpi^\mathbb{Z}}(P_{\lambda'})$. D'une part, elle est isomorphe aux coinvariants $\mathrm{ind}_{J^\circ}^J(P_{\lambda'})_{\varpi^\mathbb{Z}}$, donc par le ii)(b) du lemme précédent (et sa

preuve), on a

$$\mathrm{End}_J \left(\mathrm{ind}_{J^\circ}^{J/\varpi^\mathbb{Z}} (P_\lambda) \right) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} [\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times) \times J/J^\circ \varpi^\mathbb{Z}].$$

D'autre part elle se décompose en une somme

$$\mathrm{ind}_{J^\circ}^{J/\varpi^\mathbb{Z}} (P_\lambda) \simeq \bigoplus_{\lambda^\dagger} P_{\lambda^\dagger}$$

où λ^\dagger décrit tous les prolongements de λ à $J/\varpi^\mathbb{Z}$ (parmi lesquels figure λ').

Or, ces prolongements sont en bijection avec les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de $J/J^\circ \varpi^\mathbb{Z} \simeq f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z}$ [28, III.4.27.2], et l'algèbre décrite ci-dessus se décompose aussi en un produit

$$\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} [\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times) \times J/J^\circ \varpi^\mathbb{Z}] = \prod_{\chi} \mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}} [\mathrm{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^{\times, \ell}) \times \mathrm{Syl}_\ell(J/J^\circ \varpi^\mathbb{Z})]$$

indexé par les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de $J/J^\circ \varpi^\mathbb{Z}$. En identifiant les deux décompositions, on en déduit la propriété annoncée.

iii) Puisque le foncteur $M \mapsto P_\pi^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} M$ est une équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}(\mathfrak{Z}_\pi^\varpi)$ et \mathcal{C}_π^ϖ , on voit que P_π^ϖ est plat sur \mathfrak{Z}_π^ϖ , de réduction $P_\pi^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ isomorphe à l'unique objet simple de \mathcal{C}_π^ϖ , à savoir π . Ainsi, \check{P}_π^ϖ est bien un ϖ -relèvement de π sur Λ_π^ϖ .

Soit maintenant $\tilde{\pi}$ un ϖ -relèvement de π sur une $\mathbb{Z}_\ell^{\mathrm{nr}}$ -algèbre locale complète noethérienne Λ de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Montrons d'abord que $\mathrm{End}_{\Lambda G}(\tilde{\pi}) = \Lambda$. En effet, si H est un pro- p -sous-groupe ouvert tel que $\pi^H \neq 0$, alors la sous- Λ -algèbre de $\mathrm{End}_\Lambda(\tilde{\pi}^H)$ engendrée par les opérateurs de Hecke se surjecte sur la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -algèbre $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\pi^H)$ (par le théorème de densité de Jacobson appliqué à π), donc est égale à $\mathrm{End}_\Lambda(\tilde{\pi}^H)$ par le lemme de Nakayama.

Considérons alors l'action canonique du centre $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi)$ de la catégorie \mathcal{C}_π^ϖ sur $\tilde{\pi}$. Cette action "commute au commutant" donc est Λ -linéaire, et fournit un morphisme d'anneaux $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi) \rightarrow \mathrm{End}_{\Lambda G}(\tilde{\pi}) = \Lambda$. Dans le cas $\tilde{\pi} = P_\pi^\varpi$, le morphisme obtenu $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi) \rightarrow \mathfrak{Z}_\pi^\varpi$ est un isomorphisme. Par composition, on en déduit un morphisme $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \rightarrow \Lambda$, qui se prolonge au complété $\Lambda_\pi^\varpi \rightarrow \Lambda$.

Puisque P_π^ϖ est projectif, on peut choisir un relèvement $P_\pi^\varpi \rightarrow \tilde{\pi}$ de $P_\pi^\varpi \rightarrow \pi$. Ce relèvement est $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi)$ -linéaire, donc se factorise à travers un morphisme Λ -linéaire $P_\pi^\varpi \otimes_{\mathfrak{Z}_\pi^\varpi} \Lambda \rightarrow \tilde{\pi}$ qui se prolonge uniquement en $\check{P}_\pi^\varpi \otimes_{\Lambda_\pi^\varpi} \Lambda \rightarrow \tilde{\pi}$. Par Nakayama, ce dernier morphisme est surjectif. Par égalité des rangs (des H -invariants pour H pro- p -sous-groupe ouvert tel que $\pi^H \neq 0$), il est même bijectif. Cela montre que la ϖ -déformation \check{P}_π^ϖ est verselle.

Supposons maintenant donnés deux morphismes $\alpha_1, \alpha_2 : \Lambda_\pi^\varpi \rightarrow \Lambda$ tels que les déformations $\check{P}_\pi^\varpi \otimes_{\Lambda_\pi^\varpi, \alpha_1} \Lambda$ et $\check{P}_\pi^\varpi \otimes_{\Lambda_\pi^\varpi, \alpha_2} \Lambda$ soient ΛG -isomorphes. L'action du centre $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi)$ sur ces deux objets est alors donnée par un morphisme $\mathfrak{Z}(\mathcal{C}_\pi^\varpi) \rightarrow \Lambda$ égal à la restriction de α_1 et α_2 à $\mathfrak{Z}_\pi^\varpi \subset \Lambda_\pi^\varpi$. Par densité de \mathfrak{Z}_π^ϖ dans Λ_π^ϖ , on a donc $\alpha_1 = \alpha_2$ et la ϖ -déformation P_π^ϖ est universelle. \square

Remarquons que les déformations d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ont été étudiées dans [19] par une approche différente (mais reposant sur les types). Comme M. Emerton nous l'a signalé, notre argument reposant sur les propriétés très particulières de l'enveloppe projective de π (notamment la commutativité du commutant) est un cas particulier d'une théorie plus générale développée par Paskunas dans [23, Ch. 3].

B.2 Représentations supercuspidales et scindages de $\text{Rep}(D^\times)$

Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de D^\times dont le caractère central est trivial sur $\varpi \in K^\times \subset D^\times$, et soit ρ^0 un sous-quotient irréductible de $\rho|_{D^0}$, où l'on pose $D^0 := \mathcal{O}_D^\times$ pour homogénéiser les notations. Comme dans le paragraphe précédent, on définit des sous-catégories pleines $\mathcal{C}_\rho \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times)$, $\mathcal{C}_\rho^\varpi \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$ et $\mathcal{C}_{\rho^0} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^0)$.

(B.2.1) PROPOSITION.— *Soit P_{ρ^0} une enveloppe projective de ρ^0 dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^0)$.*

- i) La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\rho^0}^0$ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^0)$, pro-engendrée par P_{ρ^0} .*
- ii) La sous-catégorie \mathcal{C}_ρ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^\times)$, pro-engendrée par l'induite $P_\rho := \text{ind}_{D^0}^{D^\times}(P_{\rho^0})$.*

Supposons de plus que $\text{JL}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho)$ est supercuspidale, et notons f la longueur de $\rho|_{D^0}$. Alors

- iii) Le commutant $\mathfrak{Z}_{\rho^0}^{\text{opp}} := \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^0}(P_{\rho^0})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times)]$.*
- iv) Le commutant $\mathfrak{Z}_\rho^{\text{opp}} := \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_\rho)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times) \times \mathbb{Z}]$.*

Preuve. *i)* Soit \mathfrak{m}_D l'idéal maximal de \mathcal{O}_D . Le quotient $\mathcal{O}_D^\times/(1 + \mathfrak{m}_D)$ étant cyclique, la théorie de Clifford nous dit que $\rho^0 \simeq \text{ind}_{N_\tau}^{D^0}(\tau^\dagger)$, où τ^\dagger est un prolongement d'un sous-quotient irréductible τ de $\rho|_{1+\mathfrak{m}_D}$ à son normalisateur N_τ dans D^0 . Toujours par cyclicité de $N_\tau/(1 + \mathfrak{m}_D)$, N_τ possède un plus grand ℓ' -sous-groupe $N_{\tau'}^\ell$, dont le quotient est un ℓ -groupe cyclique. On en déduit que

$$P_{\rho^0} \simeq \text{ind}_{N_{\tau'}^\ell}^{D^0}(\tau^\dagger),$$

donc en particulier que tous les sous-quotients irréductibles de P_{ρ^0} sont isomorphes à ρ^0 . Il en va de même de ceux de P_ρ . À partir de là, on raisonne comme dans la preuve du point *i)(a)* de la proposition (B.1.2).

ii) Même preuve que le point *ii)(a)* de la proposition (B.1.2).

La preuve de *iii)* et *iv)* nécessite plus de notations. Elle est donnée à la fin de la preuve de la proposition (B.2.3) ci-dessous. \square

(B.2.2) Equivalences de catégories et dualité. La proposition précédente nous donne, grâce à (B.0.2), une paire d'équivalences "inverses" $\mathcal{C}_\rho \xLeftrightarrow{\quad} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\rho)$. Nous allons donner une autre forme à ces foncteurs à partir de la contragrédiente ρ^\vee de ρ .

Auparavant, il nous faut identifier \mathfrak{Z}_{ρ^\vee} et $\mathfrak{Z}_\rho^{\text{opp}}$. Pour cela, remarquons d'abord que la contragrédiente $P_{\rho^0}^\vee$ de P_{ρ^0} est un objet projectif indécomposable de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(D^0)$ dont tous les sous-quotients sont isomorphes à $\rho^{0,\vee}$. C'est donc une enveloppe projective de $\rho^{0,\vee}$ et nous identifierons $P_{\rho^0}^\vee$ et $P_{\rho^{0,\vee}}$. Maintenant, comme P_{ρ^0} est monogène, on peut trouver un idempotent ε_ρ de l'algèbre des mesures localement constantes $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}(D^0, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ sur D^0 tel que $P_{\rho^0} \simeq \mathcal{H}^0 \varepsilon_\rho$. On fixe un tel idempotent et un tel isomorphisme. Alors $P_{\rho^0}^\vee$ s'identifie à $\mathcal{H}^0 \check{\varepsilon}_\rho$ où \check{f} désigne l'image de f par l'automorphisme $d \mapsto d^{-1}$. En notant $\mathcal{H} := \mathcal{H}(D^\times, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ l'algèbre des mesures localement constantes à support compact sur D^\times , on a maintenant $P_\rho = \mathcal{H} \varepsilon_\rho$ et $P_{\rho^\vee} = \mathcal{H} \check{\varepsilon}_\rho$. En particulier on a $\mathfrak{Z}_\rho = \varepsilon_\rho \mathcal{H} \varepsilon_\rho$ et $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee} = \check{\varepsilon}_\rho \mathcal{H} \check{\varepsilon}_\rho$. Ainsi, l'application $d \mapsto d^{-1}$ induit un isomorphisme

$$(B.2.2.1) \quad \mathfrak{Z}_{\rho^\vee} \xrightarrow{\quad} \mathfrak{Z}_\rho^{\text{opp}}$$

PROPOSITION.— *Identifions \mathfrak{Z}_ρ et $\mathfrak{Z}_{\rho^\vee}^{\text{opp}}$ au moyen de l'isomorphisme (B.2.2.1).*

i) *Il y a un \mathfrak{Z}_ρ -isomorphisme fonctoriel en $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(D^\times)$*

$$P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times} V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_\rho, V).$$

ii) *Il y a un D^\times -isomorphisme fonctoriel en $M \in \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\rho)$*

$$P_\rho \otimes_{\mathfrak{Z}_\rho} M \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{Z}_\rho}(P_{\rho^\vee}, M).$$

Dans le produit tensoriel du premier isomorphisme, on fait implicitement de P_{ρ^\vee} un $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times$ -module à droite en composant l'action à gauche par $d \mapsto d^{-1}$.

Preuve. C'est essentiellement de l'“abstract nonsense”. Pour $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(D^\times)$, on a d'une part

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_\rho, V) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(\mathcal{H}\varepsilon_\rho, V) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_\rho V$$

et d'autre part

$$P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times} V = (\mathcal{H}\check{\varepsilon}_\rho \otimes V)_{D^\times} = \varepsilon_\rho \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}} V \xrightarrow{\sim} \varepsilon_\rho V.$$

Cela règle le premier isomorphisme. Pour le second, observons que le foncteur $M \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{Z}_\rho}(P_{\rho^\vee}, M)$ est adjoint à droite du foncteur $V \mapsto P_{\rho^\vee} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times} V$. Or, ce dernier est une équivalence $\mathcal{C}_\rho \xrightarrow{\sim} \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\rho)$ par le premier isomorphisme, donc $M \mapsto \text{Hom}_{\mathfrak{Z}_\rho}(P_{\rho^\vee}, M)$ en est un équivalence “inverse”, nécessairement isomorphe à l'équivalence “inverse” $M \mapsto M \otimes_{\mathfrak{Z}_\rho} P_\rho$. \square

Passons maintenant à la catégorie \mathcal{C}_ρ^ϖ . L'entier f désigne la longueur de $\rho|_{D^0}$ et v est toujours la valuation de ϖ .

(B.2.3) PROPOSITION.— *Supposons que $\text{JL}_{d, \overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho)$ est une représentation supercuspidale, et soit P_ρ^ϖ une enveloppe projective de ρ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$.*

- i) *La sous-catégorie \mathcal{C}_ρ^ϖ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$, pro-engendrée par P_ρ^ϖ .*
- ii) *Le commutant $\mathfrak{Z}_\rho^\varpi := \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_\rho^\varpi)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})]$.*
- iii) *Soit $\Lambda_\rho^\varpi := \mathfrak{Z}_\rho^\varpi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} \check{\mathbb{Z}}_\ell$. La Λ_ρ^ϖ -représentation P_ρ^ϖ est une ϖ -déformation universelle de ρ . L'anneau de ϖ -déformations de ρ est isomorphe à $\check{\mathbb{Z}}_\ell[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})]$.*

Preuve. Nous allons utiliser la théorie des types de Broussous pour D^\times pour décrire l'enveloppe projective P_ρ^ϖ de manière suffisamment explicite. L'article [7] n'est écrit que pour les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations, mais s'étend sans problème aux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations comme dans le chapitre III de [28]. Ainsi, la représentation ρ est de la forme $\rho \simeq \text{ind}_J^{D^\times}(\lambda)$ pour un “type simple étendu” (J, λ) formé d'un sous-groupe ouvert J de D^\times contenant le centre K^\times et d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible λ de J . Nous avons besoin de quelques précisions sur la forme de ces objets. Notons $J^0 := D^0 \cap J$ le sous-groupe compact maximal de J , et J^1 son pro- p -radical. Il existe une extension E de K contenue dans D , dont nous noterons B le commutant (qui est une algèbre à division de centre E) telle que $J = J^1 B^\times$ (B^\times normalise J^1) et $J^1 \cap B^\times = B^1 := 1 + \mathfrak{M}_B$. De plus λ est de la forme $\lambda \simeq \eta \otimes \tau$ où $\eta|_{J^1}$ est irréductible, et τ est une représentation de $J/J^1\varpi^\mathbb{Z}$, i.e. une

représentation modérément ramifiée de B^\times . Une telle représentation est facile à décrire, puisque $B^\times/(1 + \mathfrak{m}_B)$, resp. $B^\times/(1 + \mathfrak{m}_B)\varpi^\mathbb{Z}$, est isomorphe au groupe $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes \mathbb{Z}$, resp. au groupe $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes \mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}$ où

- f' est le degré résiduel de E sur K et e' est son indice de ramification
- $(d')^2$ est la dimension de B sur E
- le générateur positif de \mathbb{Z} agit sur $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}$ par le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q^{f'}}$.

Par conséquent, il existe un unique diviseur m de d' , et un caractère Frob-régulier χ de $\mathbb{F}_{q^{f'm}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}$ tel que

$$\tau = \text{ind}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}}^{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes \mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}} \left(\chi \circ N_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}|\mathbb{F}_{q^{f'm}}} \right).$$

L'entier m est le même que celui de [7, Déf. 10.1.4]. Un point crucial maintenant est que, vu notre hypothèse de supercuspidalité de $\text{JL}_{d,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\rho)$, on a $m = d'$. En effet, soit $\tilde{\rho}$ un relèvement de ρ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$; la représentation $\text{JL}_{d,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\rho})$ est alors également supercuspidale, et l'égalité $m = d'$ est une reformulation du point (2) de [8, Cor. 1]. On a donc finalement

$$\tau = \text{ind}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}}^{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes \mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}} (\chi)$$

pour un caractère Frob-régulier χ de $\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant produire une enveloppe projective P_ρ^ϖ à partir de ces objets. De la discussion précédente on déduit que si P_χ^ϖ est une enveloppe projective de χ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}}^\infty(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z})$, alors, son induite

$$P_\tau^\varpi = \text{ind}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}}^{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes \mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}} (P_\chi^\varpi)$$

est une enveloppe projective de τ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}}^\infty(J/J^1\varpi^\mathbb{Z})$, dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à τ . Par ailleurs, comme dans le cas des types de Bushnell-Kutzko, [28, III.4.20], on peut relever η en une $\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}$ -représentation $\tilde{\eta}$. La $\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}$ -représentation

$$P_\lambda^\varpi := \tilde{\eta} \otimes P_\tau^\varpi$$

de $J/\varpi^\mathbb{Z}$ est projective et se surjecte sur λ . Elle est aussi indécomposable (car si $\tilde{\eta} \otimes P_\tau^\varpi = W_1 \oplus W_2$, on obtient en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{J^1}(\tilde{\eta}, -)$ une décomposition de P_τ^ϖ , or ce foncteur n'annule aucun sous-objet non nul de $\tilde{\eta} \otimes P_\tau^\varpi$ puisque la restriction de ce dernier à J^1 est $\tilde{\eta}$ -isotypique). Ainsi, P_λ^ϖ est une enveloppe projective de λ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}}^\infty(J/\varpi^\mathbb{Z})$. Considérons maintenant l'induite

$$P_\rho^\varpi := \text{ind}_J^{D^\times} (P_\lambda^\varpi).$$

Elle est projective dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}}^\infty(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$, et tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à ρ . Par réciprocity de Frobenius, la dimension de $\text{Hom}_{D^\times}(P_\rho^\varpi, \rho)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est 1, donc P_ρ^ϖ est également indécomposable, et finalement est une enveloppe projective de ρ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^\text{nr}}^\infty(D^\times/\varpi^\mathbb{Z})$.

Passons maintenant à la preuve de la proposition. Puisque $P_\rho^\varpi \in \mathcal{C}_\rho^\varpi$, le point $i)$ se prouve comme le $i)(a)$ de la proposition (B.1.2).

ii) Par construction on a une suite de morphismes de $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbres

$$\text{End}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}}(P_\chi^\varpi) \longrightarrow \text{End}_J(P_\tau^\varpi) \longrightarrow \text{End}_J(P_\lambda^\varpi) \longrightarrow \text{End}_{D^\times}(P_\rho^\varpi).$$

Le premier est un isomorphisme car le caractère χ est Frob-régulier. Le troisième est un isomorphisme car l'ensemble d'entrelacement de (J, λ) est égal à J [7, (10.1.3)]. Enfin, le second est un isomorphisme car $\text{End}_{J^1}(\tilde{\eta}) = \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$. Maintenant, la première algèbre est facile à calculer :

$$\text{End}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z}}(P_\chi^\varpi) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z})].$$

Notons que $f'd'e' = d$, de sorte que $d'\mathbb{Z}/e'd'v\mathbb{Z} \simeq f'd'\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z}$. Il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que $f'd' = f$. Avec les notations ci-dessus, on a $\rho = \text{ind}_{J^0 E^\times}^{D^\times}(\eta \otimes \chi)$. Par la formule de Mackey on a donc

$$\rho|_{D^0} \simeq \bigoplus_{x \in J^0 E^\times \setminus D^\times / D^0} \left(\text{ind}_{J^0}^{D^0}(\eta \otimes \chi) \right)^x.$$

Chaque induite est irréductible puisque l'entrelacement de $\eta \otimes \chi$ dans D^0 est J^0 . Donc

$$f = [D^\times : D^0 E^\times] = d[D^0 E^\times : D^0 K^\times]^{-1} = d[E^\times : K^\times]^{-1} = de'^{-1} = d'f'.$$

iii) La preuve est la même que celle du *iii*) de la proposition (B.1.6).

Nous pouvons maintenant prouver les points *iii*) et *iv*) de la proposition (B.2.1). Comme ci-dessus, on utilise le type pour produire une enveloppe projective P_{ρ^0} sous la forme :

$$P_{\rho^0} := \text{ind}_{J^0}^{D^0}(\tilde{\eta} \otimes P_\chi^0)$$

où P_χ^0 est une enveloppe projective de χ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times)$. L'homomorphisme canonique

$$\text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times}(P_\chi^0) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^0}(P_{\rho^0})$$

est un isomorphisme, et on identifie facilement le terme de gauche à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times)]$.

Par ailleurs, posons $P_\chi := \text{ind}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times}^{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z}}(P_\chi^0)$ et $P_\tau := \text{ind}_{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z}}^{\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times \mathbb{Z}}(P_\chi)$, de sorte que $P_\rho = \text{ind}_J^{D^\times}(\tilde{\eta} \otimes P_\tau)$. Les deux homomorphismes canoniques

$$\text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times d'\mathbb{Z})}(P_\chi) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \times \mathbb{Z})}(P_\tau) \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} D^\times}(P_\rho)$$

sont des isomorphismes, et on identifie facilement le terme de gauche à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times) \times \mathbb{Z}]$ de la même manière que dans la preuve du *ii*)(b) de la proposition (B.1.2). \square

B.3 φ -déformations de représentations irréductibles de W_K

Fixons une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible σ de W_K de dimension d . D'après [27, 2.6], on peut écrire σ sous la forme

$$\sigma = \text{ind}_{W_L}^{W_K}(\tau), \text{ où}$$

- L est une extension modérément ramifiée de K , de degré résiduel noté $d' e'$ et d'indice de ramification noté f' .
- La restriction $\nu := \tau|_{P_K}$ de τ au sous-groupe d'inertie sauvage de W_K est irréductible, et son normalisateur $\text{Norm}_{W_K}(\nu)$ est le groupe de Weil W_E d'une sous-extension $E \subset L$ sur laquelle L est non ramifiée de degré d' .

La forme de σ montre que τ y apparait avec multiplicité 1. En fait on a mieux ; soit $I_L^{\ell'}$ le plus grand sous-groupe fermé d'ordre premier à ℓ du sous-groupe d'inertie I_L de W_L . C'est un sous-groupe distingué de W_E . et $W_L/I_L^{\ell'} \simeq \mathbb{Z}_\ell \rtimes \mathbb{Z}$.

(B.3.1) LEMME.— *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible σ' de W_K , on a*

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell I_L^{\ell'}}(\tau, \sigma')) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma' \sim \sigma \\ 0 & \text{si } \sigma' \not\sim \sigma \end{cases}$$

où $\sigma \sim \sigma'$ signifie que σ' est un twist non ramifié de σ .

Preuve. Si $\sigma' \sim \sigma$, on a $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell I_L^{\ell'}}(\tau, \sigma')) = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell I_L^{\ell'}}(\tau, \sigma)) \geq 1$. Pour montrer l'égalité, on écrit τ sous la forme $\rho|_{W_L} \otimes \chi$ où ρ est un prolongement de ν à W_E et χ est un caractère de W_L , dont le normalisateur dans W_E est nécessairement W_L . Il faut alors voir que le normalisateur de $\chi|_{I_L^{\ell'}}$ dans W_E est encore W_L . Via le corps de classes, on a une décomposition de l'abélianisé

$$W_L^{\text{ab}} \simeq L^\times = \mathcal{O}_L^{\times, \ell'} \times \mathcal{O}_L^{\times, \ell} \times \varpi_E^{\mathbb{Z}}$$

où $I_L^{\ell', \text{ab}} \simeq \mathcal{O}_L^{\times, \ell'}$, où $\mathcal{O}_L^{\times, \ell}$ est le ℓ -Sylow (cyclique) de \mathcal{O}_L^\times , et ϖ_E est une uniformisante de E qui en est une aussi de L puisque L est non ramifiée sur E . L'action de W_E est triviale sur $\varpi_E^{\mathbb{Z}}$ et le caractère χ est trivial sur $\mathcal{O}_L^{\times, \ell}$. Le normalisateur de $\chi|_{I_L^{\ell'}}$ est donc le même que celui de χ , à savoir W_L .

Soit maintenant σ' irréductible telle que $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell I_L^{\ell'}}(\tau, \sigma') \neq 0$. Il existe alors un caractère ψ de $W_L/I_L^{\ell'}$ tel que $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell W_L}(\tau\psi, \sigma') \neq 0$. Comme ψ est aussi trivial sur le ℓ -Sylow de W_L^{ab} , il est non ramifié. Il est donc restriction d'un caractère non ramifié encore noté ψ de W_K . Ainsi, $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell W_L}(\tau, \sigma'\psi^{-1}) \neq 0$, ce qui montre que $\sigma'\psi^{-1} \simeq \sigma$. \square

(B.3.2) On note $\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}_\sigma(K)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^c(W_K)$ formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ - I_K -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\sigma|_{I_K}$. De même on dispose de la sous-catégorie $\mathcal{C}_1(L)$ (pour la représentation triviale de W_L) de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^c(W_L)$. On choisit maintenant un relèvement $\tilde{\tau}$ de τ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^\infty(W_L)$. Comme le pro-ordre de $I_L^{\ell'}$ est premier à ℓ , la restriction $\tilde{\tau}|_{I_L^{\ell'}}$ est uniquement déterminée.

PROPOSITION.— *Soit $P_\sigma := \text{ind}_{I_L^{\ell'}}^{W_K} \left(\tilde{\tau}|_{I_L^{\ell'}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[I_L^{\ell'}]]} \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[I_L]] \right)$.*

i) La sous-catégorie $\mathcal{C}_\sigma(K)$ de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}^c(W_K)$ est facteur direct, pro-engendrée par P_σ . Le commutant $\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{opp}} := \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K}(P_\sigma)$ est isomorphe au produit croisé $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[I_L/I_L^{\ell'}]] \rtimes \varphi_L^{\mathbb{Z}}$.

ii) Le foncteur

$$I_{\tilde{\tau}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1(L) & \rightarrow & \mathcal{C}_\sigma(K) \\ M & \mapsto & \text{ind}_{W_L}^{W_K} \left(\tilde{\tau} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}} M \right) \end{array} .$$

est une équivalence de catégorie, dont une équivalence inverse est donnée par le foncteur

$$R_{\tilde{\tau}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_\sigma(K) & \rightarrow & \mathcal{C}_1(L) \\ (V, \sigma_V) & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} I_L^{\ell'}}(\tilde{\tau}, V) \end{array}$$

où W_L agit sur le terme de gauche par composition $w \cdot \alpha := \sigma_V(w) \circ \alpha \circ \tilde{\tau}(w)^{-1}$.

Preuve. *i)* Posons $\sigma^0 := \text{ind}_{I_L}^{I_K}(\tau)$. C'est un sous-quotient irréductible de $\sigma|_{I_K}$ et tous les autres lui sont conjugués. Le lemme précédent nous dit que σ^0 est la seule $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de I_K dont la restriction à $I_L^{\ell'}$ contient $\tau|_{I_L^{\ell'}}$. Il s'ensuit immédiatement que la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\sigma^0}^0$ de $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(I_K)$ formée des objets dont les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à σ^0 est stable par sous-objet (et quotients et sommes directes), et pro-engendrée par l'induite $P_{\sigma^0} := \text{ind}_{I_L}^{I_K} \left(\tilde{\tau}|_{I_L^{\ell'}} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[I_L^{\ell'}]]} \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[[I_L]] \right)$. Ceci s'appliquant à toute représentation irréductible de I_K , on en déduit aussi qu'elle est facteur direct. La première assertion du point *i)* en découle, comme dans la preuve de (B.1.2) *ii)(a)*. La deuxième assertion peut se voir par un calcul direct, ou comme conséquence du *ii)*, cf plus bas.

ii) Les deux foncteurs sont visiblement exacts. On a une transformation naturelle

$$\alpha_V : \text{ind}_{W_L}^{W_K} \left(\tilde{\tau} \otimes \text{Hom}_{I_L^{\ell'}}(\tilde{\tau}, V) \right) \rightarrow V$$

donnée par évaluation des morphismes et réciprocity de Frobenius. En utilisant le fait que $\text{Hom}_{I_L^{\ell'}}(\tau, \tau^w)$ est nul si w n'est pas dans W_L , on constate que $R_{\tilde{\tau}}(\alpha_V)$ est inversible. Comme ce foncteur est pleinement fidèle par *i)*, α_V est aussi inversible. Dans l'autre sens, on a la transformation naturelle

$$\beta_M : M \rightarrow \text{Hom}_{I_L^{\ell'}} \left(\tilde{\tau}, \text{ind}_{W_L}^{W_K}(\tilde{\tau} \otimes M) \right)$$

qui envoie m sur $\text{Id}_{\tilde{\tau}} \otimes m$. Toujours grâce au fait que $\text{Hom}_{I_L^{\ell'}}(\tau, \tau^w)$ est nul si w n'est pas dans W_L , on constate que β_M est un isomorphisme. On notera que $P_\sigma = I_{\tilde{\tau}}(P_1)$, donc le commutant de P_σ est isomorphe à celui de P_1 qui est bien comme annoncé au *i)*. \square

(B.3.3) *La catégorie $\mathcal{C}_\sigma^{\text{ab}}$.* Soit $\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}}$ le plus grand quotient commutatif de \mathfrak{Z}_σ . La catégorie $\text{Mod}(\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}})$ est naturellement une sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathfrak{Z}_\sigma)$, stable par sous-quotients et sommes directes.

DÉFINITION.— On note $\mathcal{C}_\sigma^{\text{ab}}$ l'image essentielle du foncteur $M \in \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}}) \mapsto P_\sigma \otimes_{\mathfrak{Z}_\sigma} M \in \mathcal{C}_\sigma$, et $P_\sigma^{\text{ab}} := P_\sigma \otimes_{\mathfrak{Z}_\sigma} \mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}}$.

Ainsi $\mathcal{C}_\sigma^{\text{ab}}$ est une sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_σ , stable par sous-quotients et sommes directes. En tant que catégorie abélienne, elle est pro-engendrée par P_σ^{ab} , mais on prendra garde au fait que celui-ci n'est pas un objet projectif dans \mathcal{C}_σ . Par construction, on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K}(P_\sigma^{\text{ab}})$.

Concrètement, le foncteur $R_{\tilde{\tau}}$ induit une équivalence $\mathcal{C}_\sigma^{\text{ab}}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1^{\text{ab}}(L)$, ce qui via le corps de classes montre que

$$\mathfrak{Z}_\sigma^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(k_L^\times) \times \mathbb{Z}].$$

D'autre part,

$$P_\sigma^{\text{ab}} \simeq \text{ind}_{I_L^{\ell-\text{ab}}}^{W_K} \left(\tilde{\tau}|_{I_L^{\ell-\text{ab}}} \right)$$

où $I_L^{\ell-\text{ab}}$ désigne le noyau de la composée $I_L \xrightarrow{\text{Art}_\ell} \mathcal{O}_L^\times \rightarrow \text{Syl}_\ell(k_L^\times)$.

(B.3.4) Dualité et équivalences. Ce paragraphe est l'analogue du paragraphe (B.2.2). Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W_K, \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}})$ l'algèbre des mesures continues à support compact sur W_K et localement constantes pour l'action de I_K^ℓ . La représentation $\tilde{\tau}|_{I_K^\ell}$ fournit un idempotent abusivement noté ε_σ qui permet d'identifier P_σ à $\mathcal{H}\varepsilon_\sigma$ et fournit un progénérateur $P_{\sigma^\vee} := \mathcal{H}\check{\varepsilon}_\sigma$ de $\mathcal{C}_{\sigma^\vee}$. L'inversion $w \mapsto w^{-1}$ permet alors d'identifier $\mathfrak{Z}_\sigma = e_\sigma \mathcal{H} e_\sigma$ à $\mathfrak{Z}_{\sigma^\vee}$.

PROPOSITION.— Avec cette identification,

i) Il y a un \mathfrak{Z}_σ -isomorphisme fonctoriel en $V \in \text{Rep}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}}(W_K)$

$$P_\sigma \otimes_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K} V \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}} W_K}(P_{\sigma^\vee}, V).$$

ii) Il y a un W_K -isomorphisme fonctoriel en $M \in \text{Mod}(\mathfrak{Z}_\sigma)$

$$P_\sigma \otimes_{\mathfrak{Z}_\sigma} M \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{Z}_\sigma}(P_{\sigma^\vee}, M).$$

Preuve. Cela se prouve comme la proposition (B.2.2). □

(B.3.5) Notons $\mathcal{R}\text{el}(\sigma)$ la catégorie cofibrée en groupoïdes au-dessus de la catégorie des $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbres locales complètes noethériennes, dont les objets sont les paires $(\Lambda, \tilde{\sigma})$ avec $\tilde{\sigma}$ un relèvement de σ sur Λ . De même on a la catégorie $\mathcal{R}\text{el}(1_{W_L})$ des relèvements de la représentation triviale de W_L . La proposition (B.3.2) nous assure que *les foncteurs $I_{\tilde{\tau}}$ et $R_{\tilde{\tau}}$ induisent des équivalences (fibrées) inverses entre $\mathcal{R}\text{el}(\sigma)$ et $\mathcal{R}\text{el}(1_{W_L})$.*

Fixons maintenant un élément ϖ de valuation $v > 0$ dans K et un élément $\varphi \in W_K$ d'image ϖ via l'homomorphisme $W_K \rightarrow K^\times$ du corps de classes, puis supposons que le déterminant de σ sur φ soit égal à 1. Si ε désigne la signature de l'action de φ sur W_K/W_L , et si $t : W_K^{\text{ab}} \rightarrow W_L^{\text{ab}}$ désigne le transfert, on a la formule [16]

$$\det(\sigma(\varphi)) = \varepsilon(\varphi) \det(\tau(t(\varphi))) = 1.$$

Quitte à ajuster notre choix de relèvement $\tilde{\tau}$ par un caractère non ramifié de W_L , nous supposons que

$$\varepsilon(\varphi) \det(\tilde{\tau}(t(\varphi))) = 1.$$

On s'intéresse à la catégorie φ - $\mathcal{R}\text{el}(\sigma)$ des φ -relèvements de σ . De l'autre côté, on note $t(\varphi)^\delta$ - $\mathcal{R}\text{el}(1_{W_L})$ la catégorie des relèvements du caractère trivial de W_L qui valent 1 sur l'élément $t(\varphi)^\delta \in W_L^{\text{ab}}$. On rappelle que δ est la dimension de τ .

(B.3.6) COROLLAIRE.— *les foncteurs $I_{\tilde{\tau}}$ et $R_{\tilde{\tau}}$ induisent des équivalences (fibrées) inverses entre φ - $\mathcal{R}\text{el}(\sigma)$ et $t(\varphi)^\delta$ - $\mathcal{R}\text{el}(1_{W_L})$. En particulier,*

i) L'anneau Λ_σ de φ -déformation de σ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[\text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})]$, où f désigne la longueur de $\sigma|_{I_K}$.

ii) Soit $\tilde{\sigma}$ un φ -relèvement de σ sur Λ_σ tel que

$$\tilde{\sigma} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_{r_\ell \sigma^\dagger = \sigma, \det \sigma^\dagger(\varphi) = 1} \sigma^\dagger.$$

Alors $\tilde{\sigma}$ est la φ -déformation universelle de σ .

Preuve. On sait que ces foncteurs induisent des équivalences entre catégories de déformations sans conditions de déterminant. Il suffit donc de vérifier que ces conditions se correspondent. Ecrivons

$$\tilde{\sigma} = I_{\tilde{\tau}}(\widetilde{1_{W_L}}) = \text{ind}_{W_L}^{W_K} \left(\tilde{\tau} \otimes \widetilde{1_{W_L}} \right).$$

La formule

$$\det(\tilde{\sigma}(\varphi)) = \varepsilon(\varphi) \det(\tilde{\tau}(t(\varphi))) \widetilde{1_{W_L}}(t(\varphi))^\delta = \widetilde{1_{W_L}}(t(\varphi))^\delta$$

(vu notre choix de relèvement $\tilde{\tau}$) montre que les conditions se correspondent bien.

i) Il suffit de calculer la $t(\varphi)$ -déformation universelle de 1_{W_L} , c'est-à-dire la déformation universelle du caractère trivial du groupe $W_L^{\text{ab}}/t(\varphi)^{\delta\mathbb{Z}}$. Via le corps de classe, ce groupe est isomorphe à $L^\times/\varpi^{\delta\mathbb{Z}}$, puisque le transfert s'identifie à l'inclusion de K^\times dans L^\times . Ce dernier groupe se décompose en

$$L^\times/\varpi^{\delta\mathbb{Z}} \simeq (1 + \mathfrak{m}_L) \times k_L^\times \times \mathbb{Z}/e'\delta v\mathbb{Z}.$$

La catégorie des $t(\varphi)^\delta$ -relèvements de 1_{W_L} est donc équivalente à la catégorie des relèvements du caractère trivial du ℓ -Sylow $\text{Syl}_\ell(k_L^\times \times \mathbb{Z}/e'\delta v\mathbb{Z})$. En particulier l'anneau de ϖ -déformation de σ est isomorphe à la $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$ -algèbre de ce ℓ -Sylow. Maintenant, vu nos notations, on a $k_L \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}$, et $\mathbb{Z}/e'\delta v\mathbb{Z} \simeq f'd'\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z}$. Il suffit donc de vérifier que $f = f'd'$. La formule de Mackey donne

$$\sigma|_{I_K} \simeq \bigoplus_{w \in W_K/I_K W_L} \text{ind}_{I_L}^{I_K} (\tau|_{I_L})^w.$$

On sait que $\sigma|_{I_K}$ est semi-simple, donc l'induite $\text{ind}_{I_L}^{I_K}(\tau)$ l'est aussi, mais puisque l'entrelacement de $\tau|_{I_L}$ est égal à I_L , cette induite est indécomposable, donc finalement irréductible. La longueur f est donc égale à $[W_K : W_L I_K] = f'd'$.

ii) En vertu du *i)* et de sa preuve ci-dessus, il suffit de montrer que si $\tilde{\Gamma}$ est une déformation du caractère trivial du groupe $S_\ell := \text{Syl}_\ell(\mathbb{F}_{q^f}^\times \times f\mathbb{Z}/dv\mathbb{Z})$ sur son algèbre de fonctions $\Lambda := \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[S_\ell]$ telle que $\tilde{\Gamma} \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \bigoplus_{\chi: S_\ell \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}} \chi$, alors elle est universelle.

Partons de la déformation universelle, à savoir la représentation régulière $\tilde{\Gamma}_{\text{un}}$ de S_ℓ vue comme déformation du caractère trivial sur l'algèbre $\Lambda_{\text{un}} = \mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}[S_\ell]$. Par universalité, la déformation $\tilde{\Gamma}$ est obtenue en poussant $\tilde{\Gamma}_{\text{un}}$ par un morphisme $\Lambda_{\text{un}} \xrightarrow{\alpha} \Lambda$. Par hypothèse, α induit une bijection entre $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -caractères de Λ et de Λ_{un} . En particulier α est injectif, car Λ_{un} est réduit et sans ℓ -torsion. Il induit donc une injection $\mu_{\ell^\infty}(\Lambda_{\text{un}}) \rightarrow \mu_{\ell^\infty}(\Lambda)$, laquelle est une bijection puisque ces deux groupes sont finis de même cardinal. Or, Λ est engendré par $\mu_{\ell^\infty}(\Lambda)$ sur $\mathbb{Z}_\ell^{\text{nr}}$, donc α est aussi surjectif. \square

Références

- [1] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Publ. Math. I.H.É.S.*, 78 :1–159, 1993.
- [2] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes II. *Invent. Math.*, 125 :367–390, 1996.
- [3] C. Bonnafé and R. Rouquier. Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183 :1–34, 2006.

- [4] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et conjecture de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138 :573–629, 1999.
- [5] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [6] P. Boyer. Pour $l > 2$, la cohomologie entière du modèle de Deligne-Carayol et de quelques variétés de Shimura simples de Kottwitz est sans torsion. *preprint*, <http://www.math.jussieu.fr/boyer>, 2009.
- [7] P. Broussous. Extension du formalisme de Bushnell-Kutzko au cas d’un algèbre à division. *Proc. London Math. Soc.*, 77(3) :292–326, 1998.
- [8] C.J. Bushnell and G. Henniart. Local Jacquet-Langlands correspondence and parametric degrees. *Manuscripta Math.*, 114 :1–7, 2004.
- [9] J.-F. Dat. Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, pages 1–74, 2006.
- [10] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169 :75–152, 2007.
- [11] J.-F. Dat. Finitude pour les représentations lisses de groupes p -adiques. *J. Inst. Math. Jussieu*, 8(2) :261–333, 2009.
- [12] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . *preprint*, <http://www.math.jussieu.fr/dat/recherche/travaux.html>, 2010.
- [13] P. Deligne and G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1) :103–161, 1976.
- [14] M. Emerton and D. Helm. The local langlands correspondence in families. *En préparation*.
- [15] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. In *L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 of *Progr. Math.*, pages 1–321. Birkhäuser, 2008.
- [16] P. Gallagher. Determinants of representations of finite groups. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 28 :162–167, 1965.
- [17] M. Harris. On the local Langlands correspondence. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 583–597, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [18] M. Harris and R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Number 151 in Ann. of Math. studies. Princeton Univ. Press, 2001.
- [19] D. Helm. On l -adic families of cuspidal representations of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. *preprint*, <http://www.math.utexas.edu/users/dhelm/>, 2009.
- [20] A.J. De Jong. Etale fundamental group for non-archimedean analytic spaces. *Compos. Math.*, 97(2) :89–118, 1995.
- [21] R. Meyer and M. Solleveld. Resolutions for reductive groups over p -adic fields via their buildings. *preprint arXiv :math.RT/0902.4856v2*, 2009.
- [22] Y. Mieda. Non-cuspidality outside the middle degree of l -adic cohomology of the Lubin-Tate tower. *Advances in Mathematics*, 225(4) :2287 – 2297, 2010.
- [23] V. Paskunas. The image of Colmez’s Montreal functor. *preprint*, <http://www.math.uni-bielefeld.de/paskunas/Preprints.html>, 2010.

- [24] M. Strauch. Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology. *Adv. Math.*, 217(3) :889–951, 2008.
- [25] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.
- [26] M.-F. Vignéras. Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL(n, F)$ modulo $\ell \neq p$. *Invent. Math.*, 144 :177–223, 2001.
- [27] M.-F. Vignéras. La conjecture de Langlands locale pour $GL(n, F)$ modulo l quand $l \neq p$, $l > n$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(6) :789–816, 2001.
- [28] M.F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe p -adique avec l différent de p* . Number 137 in Progress in Math. Birkhäuser, 1996.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE.
 4, PLACE JUSSIEU, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
 dat@math.jussieu.fr