РАЗРЕЗАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

М. ПРАСОЛОВ И М. СКОПЕНКОВ

Задачи на разрезание с давних пор привлекали внимание благодаря своей наглядности и красоте, сочетающейся со сложностью решения. Они находят применение в архитектуре и дизайне. Интерес к ним растет в связи с обнаружением взаимосвязи этих задач с физикой, гармоническим анализом, теорией вероятностей.

В данной научно-популярной статье мы ответим на следующие геометрические вопросы:

- Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты?
- Когда из подобных друг другу прямоугольников можно составить квадрат?

Доказательства основаны на физической интерпретации, использующей электрические цепи. Для понимания статьи достаточно знакомства со школьной программой по математике и физике.

ЧАСТЬ I. Разрезания прямоугольника на квадраты.

Начнём с примера.

Прямоугольник размером $a \times b$, где a и b — целые числа, легко разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов. Разумеется, то же самое верно и для любого подобного ему прямоугольника. Значит, прямоугольник с рациональным отношением перпендикулярных сторон разрезается на равные квадраты.

Естественный вопрос, какие прямоугольники можно разрезать на квадраты произвольного, не обязательно одинакового, размера. Оказывается, ответ тот же самый:

Теорема Дена. *Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его перпендикулярных сторон рационально.*

Эту теорему открыл Макс Ден в 1903 году. Оригинальное рассуждение Дена было довольно сложно. Впоследствии появились более простые доказательства[1]. Мы приведем одно из них, принадлежащее Р.Л. Бруксу, К.А.Б. Смиту, А.Г. Стоуну и У.Т. Татту[2].

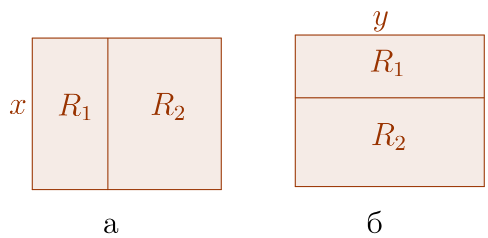

Рис. 1. Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

Как искать отношение сторон прямоугольника.

Итак, нам нужно научиться находить отношение сторон прямоугольника, разрезанного на квадраты. Будем рассматривать разрезания не только на квадраты, но и на произвольные прямоугольники, отношения сторон которых считаются известными.

Задача 1. Большой прямоугольник разрезан на несколько меньших. Докажите, что стороны меньших прямоугольников параллельны сторонам большого. (*Указание.* Если есть меньшие прямоугольники, расположенные "криво", то рассмотрите ближайший из них к вершине большого.)

Будем считать, что стороны всех рассматриваемых прямоугольников параллельны координатным осям, то есть либо *вертикальны*, либо *горизонтальны*. Под *отношением сторон* прямоугольника мы всегда понимаем отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

[1] См., например, книгу И.М. Яглома "Как разрезать квадрат?" М.: Наука, 1968, или обзор на сайте http://www.squaring.net.

[2] Увлекательный рассказ о том, как эти авторы придумали свой метод, можно прочитать в главе "Квадрирование квадрата" книги М. Гарднера "Математические головоломки и развлечения", М.: Мир, 1999.

Начнем с простейших примеров.

Пример 1. Прямоугольник с отношением сторон R разделён вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 1а). Тогда $R = R_1 + R_2$. Действительно, пусть вертикальная сторона большого прямоугольника равна x. Тогда горизонтальные стороны меньших прямоугольников равны R_1x и R_2x. Значит, $R = (R_1x + R_2x)/x = R_1 + R_2$.

Пример 2. Прямоугольник с отношением сторон R разделён горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис. 1б). Тогда $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Действительно, пусть горизонтальная сторона большого прямоугольника равна y. Тогда вертикальные стороны меньших прямоугольников равны y/R_1 и y/R_2. Значит,

$$R = \frac{y}{y/R_1 + y/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Покажем на примере, как искать отношение сторон прямоугольника в общей ситуации.

Пример 3. Имеется прямоугольный шкаф с квадратными полками, изображённый на рисунке 2[3]. Найдем отношение ширины шкафа к его высоте.

Рис. 2. Каково отношение ширины этого шкафа к его высоте?

Занумеруем квадраты (полки) как показано на рис. 3. Можно считать, что вертикальная сторона большого прямоугольника (шкафа) равна 1. Горизонтальную сторону большого прямоугольника обозначим через x. Тогда искомое отношение сторон равно $R = 1/x$. Сторону квадрата номер k обозначим через x_k.

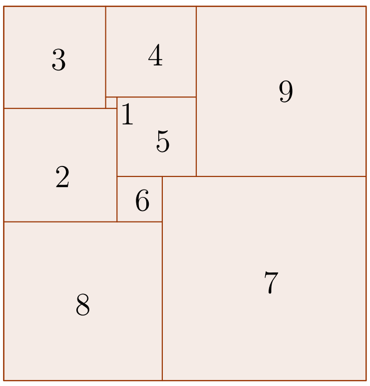

Рис. 3. Разрезание прямоугольника на 9 неравных квадратов

К левой стороне большого прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $x = x_2+x_3+x_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $x_3 = x_1+x_4$. Аналогично, $x_6 + x_8 = x_7$, $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$, $x_4 + x_5 = x_9$. Сформулируем наше наблюдение в общем виде:

[3] Фото с сайта http://www.mynl.com/ww/project11.html

Условие вертикальной стыковки. *Для каждого вертикального разреза сумма вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу слева, равна сумме вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих справа. Вертикальная сторона большого прямоугольника равна сумме вертикальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Глядя на схему разрезания, можно написать аналогичные уравнения, описывающие примыкание квадратов друг к другу горизонтальными сторонами:

Условие горизонтальной стыковки. *Для каждого горизонтального разреза сумма горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу сверху, равна сумме горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих снизу. Горизонтальная сторона большого прямоугольника равна сумме горизонтальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Из этого условия: $1 = x_3+x_4+x_9$, $x_4 = x_1+x_5$, $x_1+x_3 = x_2$, $x_5+x_9 = x_6+x_7$, $x_2+x_6 = x_8$.

Итак, нахождение отношения сторон прямоугольника сводится к решению системы уравнений, в нашем случае:

$$\begin{gathered} x = x_2+x_3+x_8, \quad x_3 = x_1+x_4, \quad x_6+x_8 = x_7, \quad x_1+x_2 = x_5+x_6, \quad x_4+x_5 = x_9, \\ x_3+x_4+x_9 = 1, \quad x_4 = x_1+x_5, \quad x_1+x_3 = x_2, \quad x_5+x_9 = x_6+x_7, \quad x_2+x_6 = x_8. \end{gathered}$$

Как решать систему линейных уравнений.

Напомним, что *линейным уравнением* называется уравнение вида $R_1x_1+R_2x_2+\cdots+R_nx_n = h$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, а $h, R_1, R_2, \ldots, R_n$ — заданные числа. Уравнения, получающиеся переносом некоторых слагаемых в другую часть, также считаются линейными.

Проиллюстрируем известный алгоритм Гаусса–Жордана решения системы линейных уравнений на нашем примере. Наша цель — преобразовать систему так, чтобы каждая неизвестная участвовала ровно в одном уравнении. Для неизвестной x это уже выполнено — она содержится только в первом уравнении.

Перейдем ко второму уравнению. В нем неизвестная x_3 выражена через x_1 и x_4. Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную x_3 — в первое, шестое и восьмое. Получим систему:

$$\begin{gathered} x = x_2+x_1+x_4+x_8, \quad x_3 = x_1+x_4, \quad x_6+x_8 = x_7, \quad x_1+x_2 = x_5+x_6, \quad x_4+x_5 = x_9, \\ x_1+2x_4+x_9 = 1, \quad x_4 = x_1+x_5, \quad 2x_1+x_4 = x_2, \quad x_5+x_9 = x_6+x_7, \quad x_2+x_6 = x_8. \end{gathered}$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная x_3 участвует только во втором уравнении.

Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $x_7 = x_6+x_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую x_7 только в третьем уравнении:

$$\begin{gathered} x = x_2+x_1+x_4+x_8, \quad x_3 = x_1+x_4, \quad x_6+x_8 = x_7, \quad x_1+x_2 = x_5+x_6, \quad x_4+x_5 = x_9, \\ x_1+2x_4+x_9 = 1, \quad x_4 = x_1+x_5, \quad 2x_1+x_4 = x_2, \quad x_5+x_9 = 2x_6+x_8, \quad x_2+x_6 = x_8. \end{gathered}$$

Будем продолжать таким же образом дальше. Каждый раз будем выражать одну из неизвестных в очередном уравнении через остальные. Будем подставлять полученное выражение в другие уравнения. В полученной системе выбранная неизвестная будет присутствовать только в одном уравнении. После этого процесс продолжается[4]

В итоге мы получим систему "уравнений" (проверьте!):

$$\begin{gathered} x = 33/32, \quad x_3 = 9/32, \quad x_7 = 1/2, \quad x_1 = 1/32, \quad x_4 = 1/4, \\ x_9 = 15/32, \quad x_5 = 7/32, \quad x_2 = 5/16, \quad x_8 = 7/16, \quad x_6 = 1/8. \end{gathered}$$

Тем самым решение исходной системы найдено. Итак, в примере 3 отношение сторон большого прямоугольника равно $R = 1/x = 32/33$. Значения неизвестных $x_1, \ldots, x_9$ — это стороны квадратов. Тем самым мы получили пример разрезания прямоугольника на попарно различные квадраты.

Задача 2[5]. Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых — целые числа.

[4]Вообще говоря, возможно, что после нашей подстановки все неизвестные в некотором уравнении сократятся, и оно примет вид $0 = 0$. В этом случае выбросим его из системы. Если же в результате подстановки получилось уравнение, в котором правая часть — ненулевое число, а все коэффициенты в левой части нулевые, то это означает, что исходная система не имеет решений.

[5]F.V. Henle, J.M. Henle, Squaring the plane, Amer. Math. Monthly 115:1 (2008), 3–12

Задача 3. Прямоугольник разделён на пять прямоугольников с отношениями сторон $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 3$ так, как показано на рисунке 4 слева. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

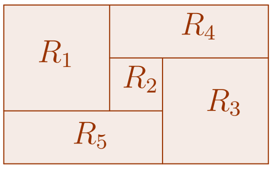

Рис. 4. Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

Посмотрим, что дает алгоритм Гаусса–Жордана в общем случае. Возможны два случая.

Первый случай. Возможно (как в разобранном примере), что *каждую* неизвестную мы выбрали на каком-то шаге и выразили через остальные неизвестные и коэффициенты уравнений. В этом случае полученная на последнем шаге система определяет единственное решение исходной системы. Заметим, что на каждом шаге коэффициенты уравнений системы выражаются через коэффициенты уравнений предыдущей (а значит, и исходной) системы с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления. В частности, это означает, что если все коэффициенты исходной системы рациональны, то и ее решение состоит из рациональных чисел.

Второй случай. Возможно, что некоторые неизвестные мы не выражали ни на каком шаге алгоритма. В этом случае для каждого выбора значений таких неизвестных остальные находятся из конечной системы. Таким образом, исходная система имеет бесконечно много решений.

Например, алгоритм Гаусса-Жордана приводит систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_3 = 1; \qquad \text{к виду} \qquad x_1 = -x_2, \quad x_3 = 1 + x_2.$$

При этом неизвестную x_2 мы “не успели” выразить через остальные. Для каждого числа t тройка $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 1 + t$ является решением системы.

Мы получили следующую теорему:

Теорема о решении системы. *Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.*

Итак, для доказательства теоремы Дена нам остается показать, что система уравнений, построенная по условиям стыковки, имеет единственное решение. Это мы сделаем с помощью физической интерпретации.

Задача 4. Докажите, что если система линейных уравнений имеет единственное решение, то в этом решении каждая неизвестная выражается через коэффициенты уравнений с помощью четырёх арифметических действий.

Физическая интерпретация.

Читателю, знакомому с физикой, полученные в примерах 1 и 2 выражения напомнят формулы для сопротивления цепей из последовательно и параллельно соединённых резисторов. Дадим объяснение этой аналогии; см. рисунок 5абв.

Представим себе проводящую электрический ток тонкую прямоугольную пластинку, разбитую на меньшие прямоугольные пластинки. Вертикальные стороны пластинки соединим с полюсами батарейки. Будем считать, что меньшие пластинки строго изолированы друг от друга вдоль горизонтальных линий разреза, осуществляющих разбиение; вдоль же вертикальных линий разреза пластинки стыкуются. Каждая меньшая пластинка будет играть роль резистора. Как известно из физики, её сопротивление пропорционально отношению длины к площади поперечного сечения, то есть, пропорционально отношению сторон маленькой пластинки. Общее сопротивление полученной электрической цепи равно сопротивлению большой пластинки, то есть, пропорциональному отношению сторон большой пластинки. Тем самым, отношение сторон большой пластинки можно выразить через отношения сторон малых пластинок, пользуясь формулой для общего сопротивления электрической цепи.

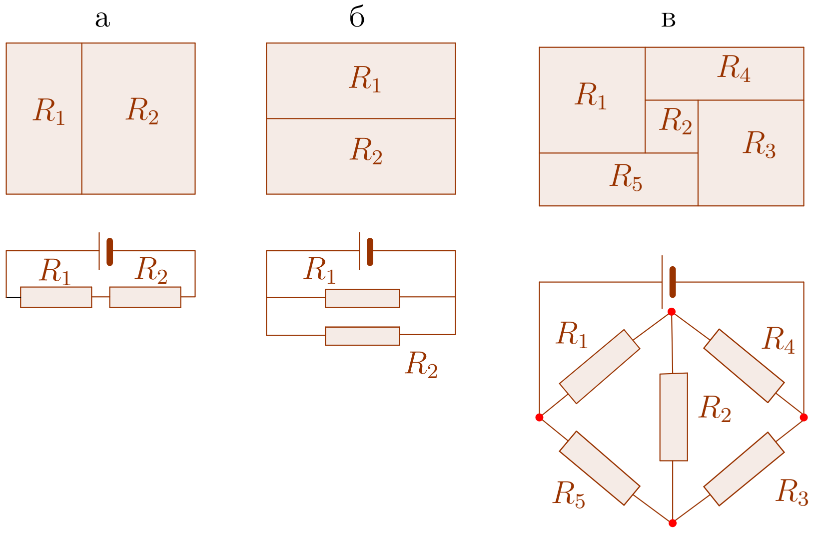

Рис. 5. Физическая интерпретация

Мы объяснили совпадение выражений в рассмотренных примерах с формулами для сопротивления простейших цепей. Однако наше обоснование было, что называется, “на физическом уровне строгости”. Теперь мы собираемся дать “математически строгое” обоснование.

Для этого построим *математическую модель* электрической цепи. Напомним, что *граф* — это некоторое множество точек, называемых *вершинами*, соединенных между собой линиями, называемыми *ребрами*. Назовем электрической *цепью* связный граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое положительное число, и концы одного из ребер которого отмечены знаками “+” и “−”. Ребро с отмеченными концами назовем *батарейкой*, остальные — *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, назовем *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, — их *сопротивлениями*. Вершины графа назовем *клеммами*, отмеченные клеммы батарейки — *положительным* и *отрицательным полюсами*.

Покажем, как можно сопоставить разрезанию прямоугольника на меньшие прямоугольники электрическую цепь (как математический объект); на рисунке 6 приведен пример.

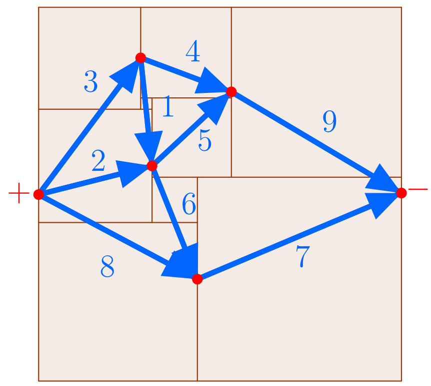

Рис. 6. Построение электрической цепи по разрезанию

Каждой вертикальной линии разреза и вертикальным сторонам большого прямоугольника сопоставлена клемма электрической цепи. Клемма лежит на соответствующем ей отрезке.

Каждый меньший прямоугольник ограничен слева и справа двумя вертикальными отрезками. В электрической цепи его изображением служит резистор, соединяющий две клеммы. Одна из этих клемм изображает левую сторону маленького прямоугольника, а другая — правую. Сопротивление этого резистора полагается численно равным отношению сторон соответствующего прямоугольника. Клеммы, соответствующие вертикальным сторонам разрезаемого прямоугольника, соединяются с разными полюсами батарейки (на рисунке 6 сама батарейка не изображена). Напряжение батарейки полагается численно равным длине горизонтальной стороны разрезаемого прямоугольника.

Нужная нам электрическая цепь построена. Внимательный читатель заметит, что построенная цепь *эквивалентна* цепи, определенной ранее с помощью разрезания проводящей пластинки.

Как считать сопротивление электрической цепи[6].

Теперь объясним, что такое *сопротивление* электрической цепи и как его можно посчитать. Мы рассматриваем лишь плоские электрические цепи, хотя рассматриваемый метод переносится с небольшими изменениями на общий случай.

Немного поговорим о физике происходящего. Напомним, что сопротивление резистора — это характеристика самого резистора, не зависящая от цепи, в которую он подключен. Мы считаем батарейку идеальной, то есть обладающей нулевым внутренним сопротивлением. В этом случае напряжение батарейки также не зависит от подключаемой цепи.

Когда цепь, содержащая батарейку, замыкается, в ней начинает течь электрический ток. Ток в каждом резисторе и батарейке характеризуется направлением и величиной (*силой тока*). Сила тока может быть и нулевой. Суммарная сила тока, протекающего через цепь, пропорциональна напряжению батарейки. Данное соотношение было открыто экспериментально и известно как *закон Ома.* Величина, обратная коэффициенту пропорциональности, называется *сопротивлением* цепи. Ток измеряется в Амперах, напряжение — в Вольтах, а сопротивление — в Омах.

Из школьного курса физики известны следующие правила вычисления общего сопротивления (сравните их с примерами 1 и 2).

Пример 1′. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *последовательно* (см. нижнюю часть рисунка 5а). Тогда сопротивление полученной цепи равно $R_1 + R_2$.

Пример 2′. Пусть два резистора R_1 и R_2 соединены *параллельно* (см. нижнюю часть рисунка 5б). Тогда сопротивление полученной цепи вычисляется по формуле $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Не любая электрическая цепь “сводится” к последовательно и параллельно соединенным резисторам (например, см. нижнюю часть рисунка 5в). Покажем на примере рисунка 6, как искать сопротивление “плоской” цепи в общем случае. Сопротивления всех резисторов в цепи считаем равным 1 Ом, напряжение батарейки — равным 1 Вольт.

Вернёмся к нашей математической модели. Занумеруем ребра графа, как показано на рисунке 6. Произвольным образом выберем одно из двух направлений на каждом резисторе; для определенности, выберем направление слева направо. На батарейке выберем направление от отрицательного полюса к положительному[7]. Для нас *сила тока* через резистор k — это некоторое действительное число I_k, сопоставленное резистору (оно меняет знак при смене выбранного направления резистора на противоположное). *Сила тока* через батарейку — это некоторое действительное число I. *Напряжение* на резисторе — это произведение силы тока на сопротивление. *Сопротивление* цепи — это отношение напряжения батарейки к силе тока через нее. Силы тока определяются следующими аксиомами:

Первое правило Кирхгофа. *В каждой клемме сумма входящих токов равна сумме выходящих.*

Получаем уравнения: $I = I_2 + I_3 + I_8, I_3 = I_1 + I_4, I_6 + I_8 = I_7, I_1 + I_2 = I_5 + I_6, I_4 + I_5 = I_9$.

Назовём *контуром* цепочку резисторов, получающуюся при обходе против часовой стрелки границы любой части, на которые цепь делит плоскость.

Второе правило Кирхгофа. *Для любого контура алгебраическая сумма напряжений на резисторах равна алгебраической сумме напряжений на батарейках, попавших в контур.При этом напряжение на резисторе или батарейке, попавшей в контур, берется со знаком “+”, если выбранное направление на резисторе или батарейке совпадает с направлением обхода контура, и со знаком “−”, если эти направления противоположны.*

[6]На эту тему см. также статьи А. Варламова “Правила Кирхгофа”, О. Ляшко “Почему не уменьшится сопротивление” в Кванте №1 (1985) и циклы задач: М. Прасолов, М. Скопенков, Б. Френкин, “Инварианты многоугольников”, http://www.turgor.ru/lktg/2007/1/index.php, Д. Баранов, М. Скопенков, А. Устинов, “Случайные блуждания и электрические цепи”, http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/4/index.htm, представленных на Летних конференциях Турнира городов.

[7]Это может смутить читателя, знающего, что “ток в цепи идет от плюса к минусу”. Ток в *цепи* действительно идет в этом направлении, а вот в самой *батарейке* — наоборот

Получаем: $I_3+I_4+I_9=1, I_4-I_1-I_5=0, I_1+I_3-I_2=0, I_5+I_9-I_6-I_7=0, I_2+I_6-I_8=0.$

Оказывается, выписанных уравнений всегда будет достаточно, чтобы найти все силы тока (а следовательно, и общее сопротивление цепи):

Теорема единственности. *Система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, в которой силы тока — неизвестные, а напряжение батарейки и сопротивления резисторов известны, имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что при данных напряжении батарейки, сопротивлениях и выбранных направлениях резисторов система уравнений Кирхгофа имеет два различных решения. Рассмотрим разность этих решений (то есть положим силу тока на каждом резисторе равной разности соответствующих сил тока для этих решений). Легко видеть, что разность решений удовлетворяет правилам Кирхгофа для цепи, в которой резисторы имеют такие же сопротивления, как и в исходной цепи, а напряжение батарейки равно нулю.

Достаточно показать, что если напряжение батарейки равно нулю, то система уравнений Кирхгофа имеет только нулевое решение (то есть, при нулевом напряжении тока нет[8]). Предположим, что ненулевое решение есть. Выберем на каждом резисторе с ненулевой силой тока новое направление так, чтобы сила тока (в новом выбранном направлении) стала положительной.

Рассмотрим произвольный резистор с ненулевой силой тока. Будем двигаться по нему в выбранном направлении. Мы попадем в некоторую клемму цепи. В нее входит ненулевой ток по резистору, по которому мы в нее пришли. Сумма входящих токов равна сумме выходящих, значит, найдется другой резистор, по которому ненулевой ток выходит из данной клеммы. Продолжим движение по этому новому резистору в выбранном на нем направлении. Продолжая таким образом, в конце концов мы получим цикл, не содержащий батарейку, на каждом резисторе которого напряжение положительно. По задаче 6 получаем противоречие со вторым правилом Кирхгофа. Следовательно, система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, имеет единственное решение.

Определение. Потенциалом клеммы называется величина, равная сумме напряжений на всех резисторах некоторого пути, соединяющего положительный полюс батарейки с данной клеммой.

Задача 5. Докажите, что потенциал клеммы не зависит от выбора пути.

Задача 6. Докажите, что если во втором правиле Кирхгофа “любой контур” заменить на “любой замкнутый путь в графе”, то мы получим систему уравнений, эквивалентную исходной.

Задача 7. Пусть из первой электрической цепи выбросили некоторый резистор, а из второй цепи выбросили батарейку и соединили цепи по освободившимся клеммам. Предположим, что сопротивление выброшенного резистора совпадает с общим сопротивлением второй цепи. Докажите, что после данной операции в оставшейся части первой цепи токи не изменились, и общее сопротивление первой цепи осталось прежним.

Следствие. *Сопротивление любой цепи положительно*[9].

Доказательство. Заметим, что сопротивление цепи не может быть равно нулю по своему определению (если напряжение батарейки ненулевое). Предположим, что сопротивление цепи равно $-R$, где $R>0$. Соединим последовательно нашу цепь с резистором сопротивлением R. Сопротивление цепи станет равно нулю (по задаче 7). Противоречие. Следствие доказано.

Читатель, конечно, заметил, что для рассматриваемого примера система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, идентична системе, построенной ранее по условиям стыковки. Это проявление общей закономерности.

Связь цепей с разрезаниями.

Мы сопоставили разрезанию прямоугольника электрическую цепь. Покажем, что система уравнений на длины сторон прямоугольников, построенная по условиям стыковки для разрезания, совпадает с системой уравнений на силы тока, построенной по правилам Кирхгофа для цепи. Положим силу тока на резисторе численно равной вертикальной стороне соответствующего резистору прямоугольника. Выберем направление тока в каждом резисторе от

[8]Это, конечно, очевидно из физических соображений. Но нам нужно, чтобы именно *система уравнений Кирхгофа* имела только нулевое решение. Отсутствие у нее “посторонних” ненулевых решений ни из каких простых физических соображений не следует и нужно доказывать.

[9]Это утверждение не следует напрямую из нашего определения сопротивления цепи, так как силе тока I через батарейку разрешается a priori принимать отрицательные значения.

клеммы, соответствующей левой стороне прямоугольника, к клемме, сопоставленной правой стороне того же прямоугольника.

Рассмотрим первое правило Кирхгофа. Зафиксируем вертикальный разрез и соответствующий ему узел. Согласно выбранной ориентации токов, входящие в узел токи соответствуют прямоугольникам, примыкающим к разрезу слева, а выходящие из узла — прямоугольникам справа. Значит, первое правило Кирхгофа в этом узле для токов совпадает с правилом вертикальной стыковки в соответствующем вертикальном разрезе.

Рассмотрим второе правило Кирхгофа. Напряжение на резисторе по определению — произведение силы тока на сопротивление. Напомним, что сопротивление резистора в цепи мы положили численно равным отношению горизонтальной и вертикальной сторон соответствующего прямоугольника. Значит, напряжение на резисторе численно равно длине горизонтальной стороны соответствующего резистору прямоугольника.

Возьмем любой контур в нашей цепи. Самый левый узел этой цепи (обозначим его m) соответствует некоторому вертикальному разрезу. К этому разрезу примыкают справа два прямоугольника (скажем, A и B), соприкасающиеся горизонтальными сторонами — те два прямоугольника, которые соответствуют выходящим из узла m двум резисторам контура. Горизонтальный разрез h, по которому примыкают друг к другу A и B, продолжается вправо и в каком-то месте впервые встречает еще один вертикальный разрез v (пересекающий h). Верхняя часть нашего контура тогда соответствует прямоугольникам, примыкающим к h сверху, а нижняя — прямоугольникам, примыкающим к h снизу; эти части сомкнутся в узле, отвечающем разрезу v.

Тогда второе правило Кирхгофа означает просто, что суммы длин горизонтальных сторон тех прямоугольников, которые примыкают к разрезу h сверху, и тех, которые примыкают снизу, одинаковы — это в точности условие горизонтальной стыковки.

Итак, правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки.

Мы готовы доказать теорему Дена. Пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Будем считать его горизонтальную сторону равной 1. Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую этому разрезанию. По теореме единственности система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа для нее, имеет единственное решение. По теореме о решении системы это решение состоит из рациональных чисел. В частности, величина тока через источник рациональна. Эта величина численно равна вертикальной стороне прямоугольника. Теорема Дена доказана.

О Формулах для сопротивления цепи.

Примеры $1'$ и $2'$ — частные случаи формул для сопротивления цепи. Покажем, что подобную формулу можно записать для произвольной цепи.

Теорема существования. *Система уравнений Кирхгофа имеет решение.*

Доказательство. Заметим, что если сложить все уравнения из первого правила Кирхгофа, то получится уравнение $0 = 0$. Действительно, каждый ток встречается в двух уравнениях, в одном — как входящий, а в другом — как выходящий, поэтому в сумме каждый ток сократится. Значит, одно из этих уравнений следует из остальных. Выбросим его.

Применим к графу нашей цепи формулу Эйлера: число вершин минус число рёбер плюс число граней равно двум. Число рёбер графа равно числу резисторов, то есть равно числу неизвестных в нашей системе. Число вершин графа равно числу клемм, то есть на 1 больше числа уравнений из первого правила Кирхгофа (не считая то уравнение, которое мы выбросили). Число граней на 1 больше числа контуров, то есть на 1 больше числа уравнений из второго правила Кирхгофа. Получаем, что количество уравнений в нашей системе равно количеству неизвестных.

Уравнения Кирхгофа — линейные, значит, можем применить алгоритм Гаусса–Жордана. Согласно анализу алгоритма в общем случае нам нужно исключить появление уравнения с нулевой левой частью и ненулевой правой.

Положим сначала напряжение батарейки равным нулю. Тогда правые части всех уравнений будут равны нулю, и в этом случае система имеет единственное решение (нулевое). Значит, результат работы алгоритма – это система уравнений, каждое из которых утверждает, что некоторая неизвестная равна нулю. Значит на каждом шаге никакое уравнение не принимало вид $0 = 0$, потому что иначе мы бы его выкинули, и число уравнений уменьшилось.

Теперь пусть напряжение произвольно. Тогда на каждом шаге единственным отличием будет то, что правые части могут содержать общее напряжение с некоторым коэффициентом, и в конце мы получаем искомые выражения для неизвестных сил тока. Теорема существования доказана.

Следующая теорема следует из теорем существования, единственности и задачи 4:

Теорема о сопротивлении цепи. *Пусть цепь состоит из резисторов и одной батарейки. Тогда существует формула, в которой участвуют только операции сложения, вычитания, умножения и деления, выражающая сопротивление цепи через сопротивления отдельных резисторов.*

Иными словами, сопротивление цепи есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от сопротивлений отдельных резисторов.

Задача 8. Попробуйте доказать, что каждая плоская электрическая цепь, в которой через все резисторы течёт ненулевой ток, и в любой грани нет клемм с одинаковым потенциалом, получается из некоторого разрезания прямоугольника (указанным в пункте "Физическая интерпретация" способом).

ЧАСТЬ II. Разрезания квадрата на подобные прямоугольники.

Попытаемся теперь найти ответ на второй вопрос, сформулированный в начале статьи. С учетом соглашения, сделанного перед примерами 1–3, он звучит так: *при каком R квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон R и $\frac{1}{R}$?*

Ясно, что при рациональном R это сделать можно (придумайте, как). По аналогии с теоремой Дена можно было бы предположить, что при иррациональном R требуемого разрезания не существует. Однако здесь ситуация сложнее.

Пример 4. Рассмотрим разрезание квадрата, изображенное на рисунке 7. Найдем отношение сторон R прямоугольников разрезания. Пусть сторона квадрата равна 1. Тогда последовательно находим $AB = 1/3$, $AC = R/3$, $CD = 1 - R/3$, $DE = R - R^2/3$. С другой стороны, $DE = 1/2$, значит, $R - R^2/3 = 1/2$. Решая квадратное уравнение, находим $R = (3 \pm \sqrt{3})/2$ — иррациональное число.

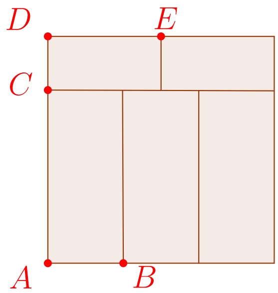

Рис. 7. Разрезание квадрата на 5 подобных прямоугольников

Следующая теорема ограничивает множество чисел R, для которых возможно требуемое разрезание.

Теорема 1. *Пусть квадрат разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и $\frac{1}{R}$. Тогда R — корень ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.*

Докажем эту теорему. Рассмотрим некоторое разрезание. Растянем картинку в R раз по горизонтали. Получим прямоугольник с отношением сторон R, разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон R^2. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Согласно теореме о сопротивлении цепи число R можно выразить через числа 1 и R^2, пользуясь только четырьмя арифметическими действиями. Это означает, что найдутся два ненулевых многочлена $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, такие что $R = \frac{p(R^2)}{q(R^2)}$. Значит, $q(R^2) \cdot R - p(R^2) = 0$. Получаем, что число R — корень многочлена $q(x^2) \cdot x - p(x^2)$. Последний многочлен имеет целые коэффициенты. Он ненулевой, так как многочлены $p(x^2)$ и $q(x^2)$ — ненулевые, причём в многочлен $p(x^2) \cdot x$ переменная x входит только в нечётной степени, а в многочлен $q(x^2)$ — только в чётной. Теорема 1 доказана.

Но эта теорема не дает полного ответа на вопрос о том, какие отношения R возможны. Существуют числа R, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами, для которых требуемое разрезание невозможно.

Задача 9. Покажите, что квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $\sqrt{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Приведем ключевой пример такого числа.

Теорема 2. *Квадрат нельзя разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $1+\sqrt{2}$ *и* $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Лемма. *Пусть* $1+\sqrt{2}$ *— корень многочлена с целыми коэффициентами. Тогда* $1-\sqrt{2}$ *— тоже корень этого многочлена.*

Докажем лемму. Подставив в наш многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами вместо x число $1+\sqrt{2}$, получим выражение вида $m+\sqrt{2}n$, где m и n — целые числа. Должны получить 0, и так как $\sqrt{2}$ иррационально, имеем $n=0$ и $m=0$. Если же мы подставим в $P(x)$ вместо x число $1-\sqrt{2}$, то получим выражение $m-\sqrt{2}n$ (подумайте, почему). Так как $n=m=0$, то снова получим 0, и значит $P(x)$ имеет корнем также и число $1-\sqrt{2}$.

Вот другое доказательство леммы. Пусть $P(1+\sqrt{2})=0$, где $P(x)$ — некий многочлен с целыми коэффициентами. Заметим, что число $1+\sqrt{2}$ является также корнем многочлена $(x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{2}))=x^2-2x-1$. Поделим многочлен $P(x)$ на x^2-2x-1 в столбик, получим в остатке некий многочлен $ax+b$ не более чем первой степени с рациональными коэффициентами: $P(x)=Q(x)(x^2-2x-1)+ax+b$. Подставим в это равенство $x=1+\sqrt{2}$. Получим, что $a(1+\sqrt{2})+b=0$, откуда, так как $1+\sqrt{2}$ иррационально, $a=0$, а значит и $b=0$. Поэтому $P(x)$ делится на x^2-2x-1, а значит имеет корнем также и число $1-\sqrt{2}$.

Докажем теорему 2. Предположим, что квадрат разрезан на прямоугольники с отношениями сторон $1+\sqrt{2}$ и $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. Растянем его в $1+\sqrt{2}$ раз по горизонтали. Получим разрезание прямоугольника с отношением сторон $1+\sqrt{2}$. Рассмотрим соответствующую электрическую цепь. Она состоит из резисторов сопротивлением 1 и $(1+\sqrt{2})^2$, и имеет сопротивление $1+\sqrt{2}$. Согласно теореме о сопротивлении цепи, найдутся такие многочлены $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, что $1+\sqrt{2}=\frac{p((1+\sqrt{2})^2)}{q((1+\sqrt{2})^2)}$. Значит, $q((1+\sqrt{2})^2)\cdot(1+\sqrt{2})-p((1+\sqrt{2})^2)=0$. Согласно предыдущей лемме, $q((1-\sqrt{2})^2)\cdot(1-\sqrt{2})-p((1-\sqrt{2})^2)=0$, то есть $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)}=1-\sqrt{2}$.

Заменим теперь в нашей цепи все резисторы сопротивлением $(1+\sqrt{2})^2$ на резисторы сопротивлением $(1-\sqrt{2})^2$. Сопротивление полученной цепи равно $\frac{p((1-\sqrt{2})^2)}{q((1-\sqrt{2})^2)}$. По доказанному выше, это число равно $1-\sqrt{2}$. Мы получили, что сопротивление цепи из резисторов с положительными сопротивлениями отрицательно. Это противоречит следствию из теореме единственности. Значит, требуемое разрезание невозможно. Теорема 2 доказана.

Теперь мы в одном шаге от ответа на второй вопрос, поставленный в начале статьи. Посмотрим внимательно на наше последнее рассуждение. Противоречие возникло из-за того, что число $1-\sqrt{2}$, *алгебраически сопряженное* числу $R=1+\sqrt{2}$, отрицательно. (Число z называется *алгебраически сопряженным* числу R, если оно является корнем многочлена минимальной степени с целыми коэффициентами, имеющего корень R.) Это — проявление следующей общей закономерности:

Теорема Ласковича–Ринна–Секереша–Фрайлинга (1994)[10]. *Для числа* $R>0$ *следующие три условия эквивалентны:*

1) Квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон R *и* $\frac{1}{R}$.

2) Для некоторых положительных рациональных чисел c_i *выполнено равенство*

$$c_1R+\cfrac{1}{c_2R+\cfrac{1}{c_3R+\cdots+\cfrac{1}{c_nR}}}=1.$$

3) Число R *является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, причем все комплексные числа, алгебраически сопряженные числу* R, *имеют положительную действительную часть.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящей статьи. Отметим только, что ее можно доказать в целом аналогично теореме 2 выше, используя цепи *переменного* тока[11].

[10]Freiling C., Rinne D., Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. 1 (1994), 547–558; Laszkovich M., Szekeres G., Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geometry 13 (1995), 569–572.

[11]M. Prasolov, M. Skopenkov, Tiling by rectangles and alternating current, J. Combin. Theory Ser. A (2011), doi:10.1016/j.jcta.2010.11.012.

В заключение приведем еще несколько задач.

Задача 10[12]**.** Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, у каждого из которых длина хотя бы одной стороны — целое число. Доказать, что и у исходного прямоугольника длина хотя бы одной стороны — целое число.

Задача 11[13]**.** Пусть A и B — два прямоугольника. Из прямоугольников, равных A, сложили прямоугольник, подобный B. Докажите, что из прямоугольников, равных B, можно сложить прямоугольник, подобный A.

Задача 12[14]**.** Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c, d, чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $c \times d$.

Задача 13[15]**.** Можно ли куб разрезать на несколько попарно-различных кубиков?

Благодарности. Авторы благодарны Сергею Дориченко за многочисленные полезные обсуждения в течение последних лет. Авторы также благодарны Евгению Выродову, Сергею Маркелову, Евгению Могилевскому, Владимиру Протасову, Александру Прохорову и Борису Френкину за ценные замечания.

Московский Государственный Университет
E-mail address: 0x00002a@gmail.com

Институт проблем передачи информации Российской Академии Наук
E-mail address: skopenkov@rambler.ru

[12] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, Amer. Math. Monthly 94:7 (1987).

[13] А. Шаповалов, XXVI Турнир Городов.

[14] А. Колотов, Об одном разбиении прямоугольника, Квант № 1 (1973), http://kvant.mccme.ru/1973/01/ob_odnom_razbienii_pryamougoln.htm.

[15] Л. Курляндчик, Г. Розенблюм, Метод бесконечного спуска, Квант № 1 (1978).