

# Méthodes quasi-statiques pour la simulation numérique discrète des assemblages granulaires

Jean-Noël ROUX<sup>(1)</sup> et Gaël COMBE<sup>(2)</sup>

- (1) Laboratoire Navier, Unité Mixte de Recherche LCPC-ENPC-CNRS  
2, allée Kepler, Cité Descartes, 77420 Champs-sur-Marne, France  
(2) Laboratoire 3S-R, Unité Mixte de Recherche UJF-INPG-CNRS  
Domaine universitaire 2, BP53 38041 Grenoble cedex 9, France

**AVANT-PROPOS** : Le présent document constitue le chapitre 3 du traité **Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires**, ouvrage collectif, sous la direction de Farhang Radjaï et Frédéric Dubois, publié dans la collection « mécanique et ingénierie des matériaux » aux éditions Lavoisier en 2010. Le titre, la pagination et l'indexation des références en sont différents. Il introduit diverses définitions et propriétés relatives à la mécanique des assemblages granulaires de type solide, pour lesquels un réseau de contacts est à même de reprendre les efforts extérieurement appliqués et de maintenir l'équilibre mécanique sous un chargement variable, et indique comment les calculs peuvent alors être menés pour déterminer forces et déplacements sans faire appel à l'inertie ou à des forces dépendant du temps. Ce texte contient quelques références aux autres chapitres du même traité mais peut se lire indépendamment.

## 1 Introduction

Dans l'immense majorité des simulations numériques de matériaux granulaires à l'échelle du discret, on détermine les trajectoires d'une collection de grains en résolvant les équations issues du principe fondamental de la dynamique, où interviennent l'inertie et les accélérations. C'est ainsi que fonctionnent les méthodes de dynamique moléculaire, de dynamique des contacts ou pilotées par événements qui sont décrites dans les chapitres suivants de ce traité. Pourtant dans beaucoup de situations d'intérêt pratique, l'usage est de décrire les matériaux granulaires à l'échelle macroscopique par la mécanique des milieux continus solides et de traiter des problèmes d'évolution quasi-statique, dans lesquels l'inertie n'entre pas en compte. Le système, sous chargement variable, passe alors par une succession d'états d'équilibres. Les calculs aux éléments finis dans les modèles élastoplastiques de la mécanique des sols, par exemple, sont de ce type. Par ailleurs, les raisonnements de changement d'échelle que l'on est tenté de bâtir pour passer du comportement d'un assemblage de grains avec un réseau de contact donné à une loi constitutive de matériau continu solide se fondent aussi sur une approche quasi-statique, dans laquelle l'objectif est de déterminer vers quel état d'équilibre voisin de l'état initial le système est conduit par de petits incréments de forces appliquées, sans référence au temps physique.

Comme nous le verrons, la possibilité même d'une telle évolution quasi-statique pose question, et c'est pourquoi les exemples d'utilisations de méthodes quasi-statiques sont encore rares dans la littérature [1, 2, 3, 4, 5]. L'approche quasi-statique se fonde sur les *matrices de raideur*, élastiques ou élastoplastiques, dont la définition et la structure sont rappelées au § 2, où on présente également d'autres notions fondamentales de la mécanique des réseaux de contact, comme les *matrices de rigidité* (à ne pas confondre avec les matrices de raideur). On montre ensuite (§3) comment ces différentes matrices et leurs propriétés conditionnent les configurations des assemblages granulaires en équilibre stable, et on rappelle des observations issues des simulations de systèmes de disques ou de sphères qui illustrent leur importance pratique et théorique. L'application des méthodes matricielles quasi-statiques à l'élasticité des assemblages granulaires, puis à leurs déformations inélastiques fait l'objet des § 4 et 5. La conclusion 6 évoque brièvement quelques directions nouvelles vers lesquelles on pourrait appliquer ou étendre la méthode.

## 2 Statique et cinématique des réseaux de contact

On considère ici des grains en interaction par des contacts ponctuels ou de très faible étendue (on supposera par exemple que la forme des grains est régulière et strictement convexe, en excluant les contacts par des faces ou des arêtes de polyèdre). Les modèles mécaniques de matériaux granulaires utilisent en général des lois de contact, qui mettent en correspondance certains *mouvements relatifs* des grains avec les *efforts de contact*. Ces correspondances peuvent être linéarisées pour de petits incréments, de même que la cinématique, et on fait ainsi apparaître certaines matrices, dont le rôle est central dans l’approche quasi-statique. Pour simplifier, on ne donnera leur écriture complète que dans le cas de grains circulaires à deux dimensions (2D) ou sphériques à trois dimensions (3D). La définition de la *matrice de rigidité* est ici conforme à celle de la théorie de la rigidité (pour les treillis ou les systèmes de tenségrité [6]), que nous étendons aux assemblages granulaires (ce n’est pas une matrice de raideur).

### 2.1 Hypothèse des petites perturbations (HPP)

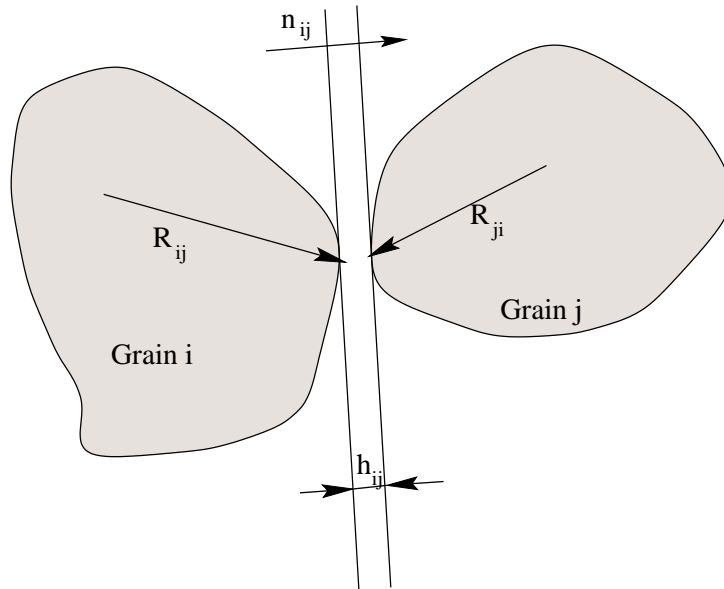


FIGURE 1 – Grandeurs associées à l’interaction entre deux grains  $i$  et  $j$ . On définit le point de contact, ou, pour chacun des deux grains, le point de sa surface le plus proche de son vis-à-vis. Ces points définissent les extrémités des vecteurs-branches  $\mathbf{R}_{ij}$  et  $\mathbf{R}_{ji}$ , dont les origines respectives sont les centres (arbitrairement choisis) de  $i$  et de  $j$ . Le vecteur unitaire  $\mathbf{n}_{ij}$  pointe de  $i$  vers  $j$  et est normal aux deux surfaces lorsqu’elles sont en contact.  $h_{ij}$  désigne l’interstice ou distance minimale entre les deux surfaces.

Les approches quasi-statiques sont adaptées aux calculs incrémentaux, dans lesquels on cherche à relier de petits incréments de forces appliquées aux petits déplacements des grains, dont la cinématique est celle d’une collection d’objets solides indéformables. Sauf indication contraire on aura recours dans la suite à l’*hypothèse des petites perturbations* (HPP), c’est-à-dire que l’on fera l’approximation qui consiste à négliger l’effet des déplacements sur la géométrie de l’assemblage granulaire. On traite alors les déplacements comme des vitesses, et les grandeurs géométriques, dont la définition est rappelée sur la figure 1, sont gardées constantes. Ainsi, les vecteurs  $\mathbf{R}_{ij}$ ,  $\mathbf{R}_{ji}$ ,  $\mathbf{n}_{ij}$  restent fixes, tandis que  $h_{ij}$  sera une fonction affine des déplacements et des (petites) rotations des grains. Les effets de l’HPP seront discutés *a posteriori*. Cette approximation n’est pas une vraie limitation à l’approche quasi-statique, qui peut s’en dispenser.

Mais on verra que les erreurs qu'elle introduit sont faibles, et nous l'adoptons aussi parce que l'exposé des méthodes de calcul en est simplifié.

## 2.2 Déplacements, déplacements relatifs et matrice de rigidité

Nous considérons, en dimension  $D$  égale à deux ou trois, une collection de  $N$  grains. Chacun d'entre eux possède  $n_l = D(D + 1)/2$  degrés de liberté (translation et rotation). Nous nous plaçons au voisinage d'une configuration de référence, à partir de laquelle les déplacements sont traités selon l'HPP. Les conditions aux limites peuvent faire intervenir des objets particuliers, comme des parois, dont certains degrés de liberté sont figés ou bien astreints à un mouvement extérieurement imposé. Pour simplifier, on admettra que les actions extérieures sur le système consistent soit à interdire certains mouvements (cas d'une paroi fixe par exemple), soit à imposer des forces (ou des moments) sur certains objets. On notera  $n_g$  le nombre de degrés de liberté associés aux conditions aux limites imposées au système. Le nombre total de degrés de liberté est  $N_l = n_l \times N + n_g$ , soit  $6N + n_g$  en 3D et  $3N + n_g$  en 2D. Un exemple simple est illustré par la figure 2 : on considère un assemblage 2D de  $N$  grains, enfermé dans une cellule rectangulaire constituée de 4 parois, dont 2 (marquées 3 et 4 sur la figure) sont fixes, tandis que celles qui leur sont opposées (respectivement : 1 et 2) possèdent un seul degré de liberté de translation dans la direction qui leur est orthogonale. Cette configuration permet ainsi la compression biaxiale. Un cas intéressant (objet du chapitre 6 du présent ouvrage) est celui des conditions aux limites

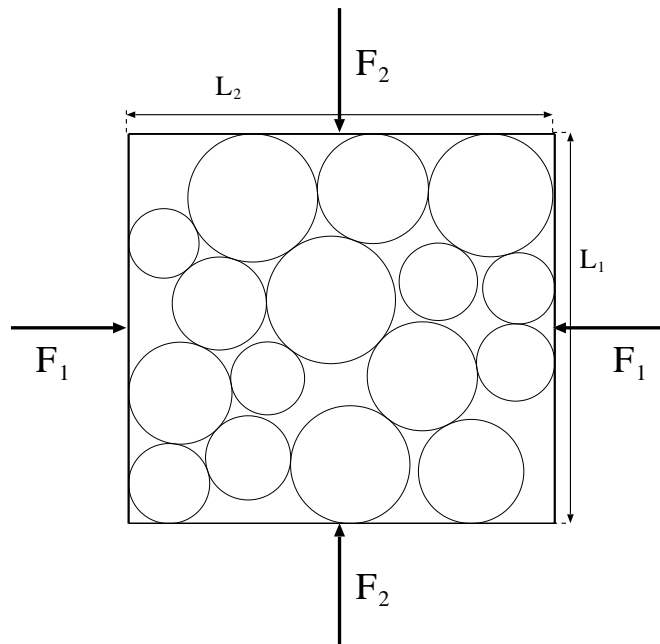


FIGURE 2 – Un choix de conditions aux limites en 2D adaptées à la compression biaxiale, avec  $n_g = 2$  degrés de liberté associés aux parois.

périodiques. On peut alors avoir des déformations globales de la cellule de simulation, qui se superposent aux mouvements des grains à l'intérieur d'une cellule périodique de forme et de taille fixes. Ainsi, au lieu de simuler la compression biaxiale d'un échantillon 2D en le confinant entre des parois comme sur la figure 2, on peut se donner une cellule rectangulaire périodique, et écrire le déplacement  $\mathbf{u}_i$  de chaque grain  $i$ , dont la position du centre, par rapport à une origine quelconque (mais qu'il est commode de placer au centre de symétrie de la cellule), est repérée par le vecteur  $\mathbf{r}_i$ , sous la forme :

$$\mathbf{u}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i - \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \mathbf{r}_i. \quad (1)$$

Dans (1), le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  (ici défini selon la convention de la mécanique des sols, c'est-à-dire que les raccourcissements sont positifs) a la forme diagonale

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta L_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta L_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

avec de petites variations  $\Delta L_1, \Delta L_2$  des dimensions de la boîte, traitées comme infinitésimales dans le cadre HPP, tandis que  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  désigne un déplacement supplémentaire qui satisfait aux conditions de périodicité.  $\Delta L_1$  et  $\Delta L_2$  sont les  $n_g = 2$  degrés de liberté associés aux conditions aux limites dans ce cas.

La mécanique de l'assemblage granulaire est sensible aux déplacements *relatifs* dans les contacts. Comme on considère de petits mouvements dans le voisinage immédiat d'une configuration donnée, on peut se donner une liste a priori de paires de grain en contact, ou éventuellement susceptibles d'entrer en contact. Pour chaque paire  $i, j$ , on choisit arbitrairement le grain origine  $i$  et le grain extrémité  $j$  (comme quand on oriente les connexions sur un graphe), et le déplacement relatif  $\vec{\mathcal{U}}_{ij}$  se définit comme la différence entre les déplacements du point de contact selon le mouvement de  $i$  et selon le mouvement de  $j$ . Si on désigne les (petites) rotations par  $\vec{\theta}_i, \vec{\theta}_j$ , les déplacements des centres étant  $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ , on a alors

$$\vec{\mathcal{U}}_{ij} = \mathbf{u}_i + \vec{\theta}_i \times \mathbf{R}_{ij} - \mathbf{u}_j - \vec{\theta}_j \times \mathbf{R}_{ji}, \quad (3)$$

formule générale faisant apparaître les vecteurs-branches définis sur la figure 1, ce qui donne dans le cas des grains sphériques ou circulaires de rayons  $R_i$  et  $R_j$ , en choisissant le centre conventionnel au centre géométrique du grain,

$$\vec{\mathcal{U}}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j + (R_i \vec{\theta}_i + R_j \vec{\theta}_j) \times \mathbf{n}_{ij}. \quad (4)$$

Dans le cas de conditions aux limites périodiques on fera apparaître les déplacements  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  au second membre de (3) ou (4), ainsi qu'un terme supplémentaire impliquant les déformations globales au niveau de la cellule de simulation. Dans le petit exemple précédent de la compression biaxiale 2D, on aura ainsi, pour des grains circulaires (le vecteur rotation devenant scalaire)

$$\vec{\mathcal{U}}_{ij} = \tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_j + (R_i \theta_i + R_j \theta_j) \mathbf{t}_{ij} + \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \mathbf{r}_{ij} \quad (5)$$

où  $\mathbf{r}_{ij}$  désigne la plus petite image de  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  par l'une des translations qui à la cellule associent la famille de ses copies périodiques, la matrice  $\underline{\underline{\epsilon}}$  étant définie ainsi qu'en (2), et le vecteur unitaire tangentiel  $\mathbf{t}_{ij}$  complétant  $\mathbf{n}_{ij}$  pour former une base directe.

Il est commode de définir un unique vecteur déplacement  $\mathbf{U}$  avec autant de coordonnées que de degrés de liberté,  $N_l$ , en agrégeant les coordonnées des déplacements et des vecteurs rotations de tous les grains, de 1 à  $N$ , puis les  $n_g$  degrés de liberté associés aux conditions aux limites (déplacements de parois, paramètres de déformation d'une cellule périodique). Avec  $N_c$  contacts, on définit de même un vecteur des déplacements relatifs  $\vec{\mathcal{U}}$ , avec  $DN_c$  coordonnées en dimension  $D$ . Il est d'usage d'utiliser un système de coordonnées dans lequel on isole, pour chaque contact, la composante normale du déplacement relatif, soit  $\mathbf{n}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{U}}_{ij}$ . Les coordonnées dans l'espace des  $\vec{\mathcal{U}}$  sont donc, étant donnée a priori une liste ordonnée des contacts, le déplacement relatif normal, puis la ou les  $(D - 1)$  coordonnée(s) du déplacement relatif tangentiel dans le premier contact, puis le déplacement relatif normal dans le deuxième, etc., pour terminer par les incréments des  $n_g$  degrés de liberté de la cellule de simulation.

On voit alors que les relations (3) définissent une application linéaire  $\mathbf{U} \mapsto \vec{\mathcal{U}}$ ,

$$\vec{\mathcal{U}} = \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  est la *matrice de rigidité* associée à l'ensemble de grains et de contacts – la structure granulaire (au sens de la mécanique des structures).  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  est une matrice à  $DN_c$  lignes et  $N_l$  colonnes. Le noyau de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  est l'espace des vecteurs déplacements  $\mathbf{U}$  qui ne conduisent à aucun déplacement relatif. De tels déplacements sont aussi appelés des mouvements de mécanismes. La dimension de l'espace qu'ils forment, notée  $k$  dans la suite, est par définition le *degré d'hyperstaticité* de la structure. L'image de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^{DN_c}$  constitué des déplacements relatifs pour lesquels il est effectivement possible de trouver des valeurs de déplacements (et de rotations, etc.) qui leur correspondent. C'est l'espace des déplacements relatifs *compatibles*, de dimension  $N_l - k$ .

### 2.3 Efforts extérieurs, forces de contact et matrice de rigidité.

Sur chacun des grains, dont la cinématique est celle d'un objet rigide, on peut appliquer une force et un moment. De plus, à chacun des  $n_g$  degrés de liberté associés aux parois ou à la cellule de simulation, soit  $X$ , on peut aussi faire correspondre une force extérieure généralisée  $\mathcal{F}$ , telle que son travail dans un « déplacement »  $\Delta X$  soit  $\mathcal{F}\Delta X$ . Dans le cas du mouvement d'une paroi, comme sur la figure 2, il s'agit d'une force au sens le plus ordinaire. En général, on peut avoir affaire à des forces en un sens généralisé. Ainsi lorsque le degré de liberté de la cellule a le sens d'une coordonnée du tenseur des déformations,  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , alors la force généralisée est le produit du volume par la coordonnée correspondante du tenseur des contraintes,  $\sigma_{\alpha\beta}$ . Ces efforts extérieurs définissent donc un vecteur  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  avec  $N_l$  coordonnées, le travail s'écrivant  $\mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{U}$ . Ils doivent être équilibrés par les forces aux contacts qui définissent un vecteur  $\mathbf{f}$  dans un espace de dimension  $DN_c$ . Par définition, la force de contact  $\mathbf{f}_{ij}$  est la force transmise par le grain origine,  $i$ , au grain extrémité,  $j$ , au point de contact. L'équilibre des forces généralisées correspondant à tous les degrés de liberté prend la forme d'un ensemble de relations linéaires :

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \mathbf{f}, \quad (7)$$

définissant une matrice  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  à  $N_l$  lignes et  $DN_c$  colonnes. Le théorème des travaux virtuels, dont la vérification directe est facile dans les cas qui nous intéressent ici, énonce que  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  n'est autre que la matrice transposée de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  :

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} = {}^t \underline{\underline{\mathbf{G}}}. \quad (8)$$

La même matrice de rigidité apparaît donc dans les relations statiques et cinématiques. Par exemple, dans le cas de la compression biaxiale d'un système de disques avec des conditions aux limites périodiques, évoqué plus haut, les forces généralisées correspondant aux paramètres de déformation  $\epsilon_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  sont  $A\sigma_{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ),  $A$  désignant l'aire du système dans la configuration de référence. On sait que l'on a, la somme étant étendue à tous les contacts (identifiés par la paire ordonnée de disques concernés) :

$$A\sigma_{\alpha\alpha} = \sum_{i < j} r_{ij}^\alpha f_{ij}^\alpha. \quad (9)$$

Cette relation est l'équation du système linéaire (7) relative relative à force conjuguée de la déformation  $\epsilon_\alpha$ , et les coefficients de la ligne correspondante de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  sont les  $r_{ij}^\alpha$ . D'après (5) ce sont aussi les coefficients de la colonne de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  correspondante.

Le noyau de  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  est constitué des forces de contact  $\mathbf{f}$  autoéquilibrées, c'est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{DN_c}$  dont la dimension  $h$  est par définition le degré d'hyperstaticité de la structure (ou degré d'indétermination des forces). Les forces intérieures équilibrant le chargement  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  appliqué, si elles existent, forment un espace affine de dimension  $h$ , car à toute solution particulière de (7) on peut ajouter une solution du système homogène associé, c'est-à-dire un vecteur de forces

de contact autoéquilibrées. Quant à l'image de  $\underline{\mathbf{H}}$ , c'est le sous-espace de  $\mathbb{R}^{N_i}$  constitué des chargements supportables, qu'il est possible d'équilibrer avec des forces intérieures.

L'image d'un opérateur étant égale à l'orthogonal du noyau de son transposé, on dispose d'une caractérisation des déplacements relatifs compatibles comme orthogonaux à tous les systèmes de forces de contacts autoéquilibrées, ainsi que d'une caractérisation des chargements supportables comme orthogonaux aux mouvements de mécanisme (c'est-à-dire qu'ils ne travaillent pas dans ces mouvements). De plus on obtient une relation entre degrés d'hypostaticité et d'hyperstaticité :

$$N_l + h = DN_c + k. \quad (10)$$

## 2.4 Lois de contact et matrices de raideur

Les lois de contact, dont nous supposons, conformément aux modèles les plus courants, qu'elles combinent élasticité et frottement de Coulomb, peuvent être mises sous une forme incrémentale. Elles font alors apparaître des paramètres de raideur. À chaque contact  $i, j$  est associée une matrice de raideurs locales  $\underline{\underline{K}}_{ij}$ , qui relie les incréments des coordonnées de la force de contact aux variations du vecteur déplacement relatif :

$$\Delta \mathbf{f}_{ij} = \underline{\underline{K}}_{ij} \cdot \Delta \vec{\mathbf{U}}_{ij}. \quad (11)$$

Les lois de contact habituelles conduisent à décomposer  $\mathbf{f}_{ij}$  en ses composantes normale et tangentielle, selon

$$\mathbf{f}_{ij} = N_{ij} \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{T}_{ij} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_{ij} \perp \mathbf{n}_{ij}. \quad (12)$$

Dans (11), on choisit par conséquent pour les deux membres des axes de coordonnées selon la direction normale pour le premier et selon celle de la force de contact tangentielle actuelle (avant incrémentation)  $\mathbf{T}_{ij}$  pour le deuxième, c'est-à-dire les 3 vecteurs de base suivants :

$$\mathbf{n}_{ij}, \mathbf{t}_{ij} = \frac{\mathbf{T}_{ij}}{\|\mathbf{T}_{ij}\|}, \quad \mathbf{w}_{ij} = \mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{t}_{ij}. \quad (13)$$

Dans les modèles simples où l'élasticité du contact est prise linéaire et unilatérale, chaque contact est doté de raideurs  $K_N^{ij}$ ,  $K_T^{ij}$  indépendantes des forces qu'ils transmettent et on a pour  $\underline{\underline{K}}_{ij}$  la forme diagonale simple :

$$\underline{\underline{K}}_{ij}^E = \begin{bmatrix} K_N^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & K_T^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & K_T^{ij} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

l'usage de la forme élastique (11)–(14) ne convient que si l'inégalité de Coulomb est satisfaite sous forme stricte :  $\|\mathbf{T}_{ij}\| < \mu N_{ij}$ . S'il y a égalité dans la condition de Coulomb, alors les raideurs locales dépendront de la *direction* de l'incrément  $\Delta \vec{\mathbf{U}}_{ij}$ , car il faut alors discuter selon le statut du contact [7]. On a donc : ( $\mathbf{t}_{ij}$  est défini en 13)

$$\underline{\underline{K}}_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} K_N^{ij} & 0 & 0 \\ \mu K_N^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_T^{ij} \end{bmatrix} & \text{si } K_T^{ij} \Delta \vec{\mathbf{U}}_{ij} \cdot \mathbf{t}_{ij} - \mu K_N^{ij} \mathbf{n}_{ij} \cdot \Delta \vec{\mathbf{U}}_{ij} > 0 \\ \underline{\underline{K}}_{ij}^E & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \quad (15)$$

La prise en compte de l'élasticité de Hertz-Mindlin au contact [8, 9] introduit plusieurs modifications, car les raideurs  $K_N$  et  $K_T$  dépendent de la déflexion au contact  $h_{ij}$  (ou de la force normale) [8, 9], ainsi qu'en général de l'histoire du mouvement relatif tangentiel au contact. En fait la matrice des raideurs locales prend différentes formes suivant la direction de  $\Delta \vec{\mathbf{U}}_{ij}$  même

si le frottement n'est mobilisé nulle part dans la région du contact [9] (c'est-à-dire même si le coefficient de frottement  $\mu$  est infini). Cette dépendance directionnelle des raideurs locales n'a toutefois qu'une influence très faible dans le calcul des propriétés élastiques macroscopiques, comme il est montré dans la référence [7], où on trouvera davantage de détails sur la forme des matrices de raideur avec un modèle de Hertz-Mindlin. Dans la suite on se limitera dans les exemples à la discussion des propriétés élastiques dans le cas de grains sphériques avec élasticité de Hertz-Mindlin (§ 4) ou des propriétés élastoplastiques (§ 5) avec des disques (2D) et une élasticité linéaire unilatérale dans les contacts.

Quelle que soit la forme des matrices carrées  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{i,j}$  (de taille  $D \times D$ ) associées à chacun des contacts, on peut les rassembler dans une grande matrice carrée de dimension  $DN_c \times DN_c$ , la matrice des raideurs de contact  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ , qui est diagonale par blocs, car elle ne couple pas les contacts différents, et qui relie des vecteurs de  $\mathbb{R}^{DN_c}$ , incréments de déplacements relatifs et de forces de contact :

$$\Delta \mathbf{f} = \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \Delta \vec{\mathcal{U}}. \quad (16)$$

Rappelons qu'en général, la relation (16) n'est linéaire qu'en apparence puisque la matrice prend des formes différentes selon la direction de  $\Delta \vec{\mathcal{U}}$ . Rassemblant les équations (6), (16), puis (7) et (8), on obtient la relation entre incréments de déplacements et de chargement extérieur, qui fait apparaître la *matrice de raideur*  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  :

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} = \mathbf{T} \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \quad (17)$$

À la différence de la matrice de rigidité, la matrice de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  est carrée, avec autant de lignes et de colonnes que de degrés de liberté. Dans le cas où chaque bloc diagonal de  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$  est de la forme élastique (14), avec des raideurs toutes strictement positives, alors (17) montre immédiatement que  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  est symétrique et positive, et que son noyau coïncide avec celui de la matrice de rigidité  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ .

## 2.5 Contributions géométriques à la matrice de raideur

En ignorant les variations des directions normales et des vecteurs-branches dans les déplacements, on néglige, dans le cadre de l'HPP, une autre contribution à la matrice de raideur – notons-là  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  – dont l'origine est la suivante. Nous étudions l'effet de petits déplacements au voisinage d'une configuration donnée, dans laquelle l'assemblage est déjà soumis à des forces extérieures. Chaque contact  $i$ - $j$  transmet alors une force  $\mathbf{f}_{ij}$ , qui varie lorsque les grains se déplacent, d'abord en raison du mouvement relatif au point de contact, d'où l'incrément de force calculé avec le comportement du contact, qui s'exprime avec la matrice de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$ ; mais aussi simplement parce que la force de contact doit suivre les grains dans leur mouvement, ce qui donne une seconde contribution à l'incrément  $\Delta \mathbf{f}_{ij}$  et fait apparaître le second terme  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  de la matrice de raideur. Si, par exemple,  $i$  et  $j$  se déplacent ensemble comme un seul corps rigide, il n'y a aucun mouvement relatif au contact. La force  $\mathbf{f}_{ij}$  doit alors suivre ce déplacement matériel. Si le mouvement relatif de  $i$  et  $j$  est un roulement sans glissement, c'est-à-dire une rotation par rapport à un axe orthogonal au vecteur normal  $\mathbf{n}_{ij}$ , ou un pivotement, c'est-à-dire une rotation autour de  $\mathbf{n}_{ij}$ , alors aucune variation de  $\mathbf{f}_{ij}$  ne provient non plus du déplacement relatif, qui reste inchangé. La variation de la force  $\mathbf{f}_{ij}$  dans de tels mouvements n'est curieusement presque jamais discutée dans la littérature où sont présentées les lois de contact et la mise en œuvre des méthodes aux éléments discrets. Il est en général supposé que la force de contact suit le mouvement de rotation du vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}_{ij}$  dans le roulement. Cette règle est automatique pour la composante normale  $N_{ij} \mathbf{n}_{ij}$ , dont l'intensité  $N_{ij}$  est généralement fonction de la déflexion normale  $h_{ij}$ . On doit tenir compte du terme  $N_{ij} \Delta \mathbf{n}_{ij}$  dû à la rotation du vecteur

unitaire normal dans le calcul de l'incrément de la force de contact. Pour deux sphères centrées en  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$ , avec  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  et  $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$ , on a :

$$\Delta \mathbf{n}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} (\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}) \cdot (\Delta \mathbf{u}_j - \Delta \mathbf{u}_i). \quad (18)$$

Pour la composante tangentielle  $\mathbf{T}_{ij}$ , le traitement habituel des calculs 2D, dans lequel on construit un vecteur unitaire tangentiel, est similaire à celui de la composante normale. Dans les calculs 3D, il faut explicitement faire tourner la force tangentielle avec  $\mathbf{n}_{ij}$ , et aussi prendre en compte le pivotement. Pour ce faire, un choix naturel est d'imprimer à  $\mathbf{T}_{ij}$  la rotation moyenne des objets  $i$  et  $j$  autour de  $\mathbf{n}_{ij}$ . Au total [10, 7] cela conduit à incrémenter la force tangentielle de  $\Delta \mathbf{T}_{ij}^{(2)}$  défini pour deux grains sphériques par la règle suivante :

$$\Delta \mathbf{T}_{ij}^{(2)} = -[\mathbf{T}_{ij} \cdot (\Delta \mathbf{u}_i - \Delta \mathbf{u}_j)] \frac{\mathbf{n}_{ij}}{r_{ij}} + \frac{1}{2} \left[ (\Delta \vec{\theta}_i + \Delta \vec{\theta}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right] (\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{T}_{ij}). \quad (19)$$

Cette contribution  $\Delta \mathbf{T}_{ij}^{(2)}$  est à ajouter au terme  $\Delta \mathbf{T}_{ij}^{(1)}$ , partie tangentielle de  $\Delta \mathbf{f}_{ij}$  calculée selon (16). En rassemblant les contributions des composantes normales et tangentielles on trouve pour les incréments de force de contact dus à la précontrainte

$$\Delta \mathbf{f}^{(2)} = \underline{\underline{\mathcal{L}}} \cdot \Delta \mathbf{U}, \quad (20)$$

où  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$  est une matrice à  $DN_c$  lignes et  $N_l$  colonnes, dont la ligne de blocs  $D \times n_l$  relative au contact  $i$ - $j$  ne contient que les deux éléments non nuls  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,i}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,j}$ , qui s'écrivent, si on prend la base (13) pour écrire les coordonnées de  $\Delta \mathbf{f}_{ij}$  et aussi de  $\Delta \mathbf{U}$ , et en notant  $T_{ij} = \|\mathbf{T}_{ij}\|$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,i} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{T_{ij}}{r_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_{ij}}{r_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N_{ij}}{r_{ij}} & \frac{T_{ij}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,j} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{T_{ij}}{r_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{ij}}{r_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{ij}}{r_{ij}} & \frac{T_{ij}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Pour obtenir la partie géométrique  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  de la matrice de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ , il faut revenir à un système de coordonnées dans une base fixe, le même pour tous les blocs de  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ , c'est-à-dire que chacun des deux blocs  $3 \times 3$  des matrices  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,i}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{ij,j}$  écrites en (21), le bloc correspondant aux déplacements comme le bloc correspondant aux rotations, est à multiplier à droite par la matrice  $3 \times 3$  dont les vecteurs-colonnes sont ceux de (13). Une fois  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$  ainsi transformée on peut alors écrire

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}, \text{ avec } \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} \text{ donné par (17) et } \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)} = \mathbf{T}_{\underline{\underline{\mathbf{G}}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}. \quad (22)$$

C'est en toute rigueur avec la matrice de raideur complète  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  qu'il faut écrire la relation entre incrément de chargement et variation de déplacement plutôt qu'avec  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  seulement

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \Delta \mathbf{U}. \quad (23)$$

La distance  $r_{ij}$  présente dans les formules (21) est confondue en général avec la somme des rayons  $R_i + R_j$ , en négligeant  $h_{ij}$ . Comme elle provient de la variation du vecteur normal selon (18), il s'agit des rayons de courbure des surfaces en contact et non des vecteurs-branches qui, eux, interviennent dans la matrice de rigidité selon (4). Des formules générales pour les coefficients des



matrices  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  dans le cas de grains de forme quelconque (mais régulière et strictement convexe) sont fournies dans les références [11] et [12]. On notera que la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  n'est pas symétrique. Elle le devient toutefois dans le cas particulier de grains sphériques ou circulaires sans frottement, pour lesquels on peut ignorer toutes les rotations (qui sont autant de mouvements de mécanisme), car on a alors pour les blocs  $D \times D$  couplant forces et déplacements :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(2)} = \frac{N_{ij}}{r_{ij}} (\underline{\mathbf{1}} - \mathbf{n}_{ij} \otimes \mathbf{n}_{ij}) & \text{si } j \neq i \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ii}^{(2)} = - \sum_j \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij}^{(2)} & \text{(somme sur tous les } j \text{ en contact avec } i) \end{cases} \quad (24)$$

D'après (21) et (22), et compte tenu des coefficients de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ , les coefficients de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  couplant les forces aux déplacements sont d'ordre  $F/R$ , où  $F$  est une force de contact typique et  $R$  un rayon de courbure ou une longueur de vecteur-branche, alors que les coefficients de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  correspondants sont les raideurs  $K_N$ ,  $K_T$ , multipliées par des coefficients d'ordre 1 (comme les coordonnées des  $\mathbf{n}_{ij}$ ). Les coefficients qui couplent les forces aux rotations font apparaître un vecteur-branche supplémentaire et sont de l'ordre de  $F$  (et ceux de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  d'ordre  $K_N$ ), et ceux des lignes relatives aux moments comportent également un facteur  $R$  supplémentaire. Chacun des coefficients de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$  se compare donc à son analogue dans  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  comme  $F/R$  aux raideurs  $K_N$  ou  $K_T$ . Or  $F$  est d'ordre  $K_N h$  pour une déflexion de contact typique  $h$ , et on a  $h \ll R^1$ , d'où  $K^{(2)} \ll K^{(1)}$  pour chacun des coefficients de la matrice couplant deux objets en contact [11, 12, 7]. Il est donc légitime de négliger la contribution géométrique à la matrice de raideur, et d'approximer (23) par (17), sauf pour les vecteurs  $\mathbf{U}$  tels que  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)} \cdot \mathbf{U} = 0$ .

## 2.6 Stabilité

Un critère classique de stabilité d'un état d'équilibre [11] est que la forme quadratique  $\Delta^2 W(\Delta \mathbf{U})$ , définie par

$$\Delta^2 W(\Delta \mathbf{U}) = \Delta \mathbf{U} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \Delta \mathbf{U} \quad (25)$$

soit positive. Comme dans (25),  $\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \Delta \mathbf{U}$  est un incrément de chargement  $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}$ , on peut écrire la condition comme  $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \Delta \mathbf{U} > 0$  pour tout  $\Delta \mathbf{U}$ , c'est-à-dire que le « travail du second ordre » doit être positif. Pour comprendre l'origine de ce critère, notons que la relation (23), que nous avons écrite en supposant l'équilibre de forces, exprime en fait que l'incrément des forces *intérieures*  $\Delta \mathbf{F}^{\text{int}}$  est égal à  $-\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \Delta \mathbf{U}$ . Lorsque, partant d'un état d'équilibre, une perturbation extérieure imprime aux grains des vitesses  $\mathbf{V}$  (rassemblées dans un vecteur à  $N_l$  coordonnées, comme les petits déplacements), à temps court les grains se sont déplacés de  $\mathbf{U} = \mathbf{V}t + O(t^3)$  (puisque à  $\mathbf{U} = 0$  on a une configuration d'équilibre par hypothèse) et subissent des forces intérieures  $\Delta \mathbf{F}^{\text{int}} = -\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \mathbf{V}t$ . La puissance  $\Delta \mathbf{F}^{\text{int}} \cdot \mathbf{V}$  en sera strictement négative si  $\Delta^2 W$  est définie positive, d'où une décroissance de l'énergie cinétique produite par la perturbation, qui aura tendance à augmenter, en revanche, pour un vecteur  $\mathbf{V}$ , s'il existe, tel que  $\Delta^2 W(\mathbf{V}) < 0$ . Une telle situation est similaire à celle d'un ressort dont la raideur serait négative, et dont la réponse tendrait à augmenter l'élongation plutôt que de s'y opposer par une force de rappel.

Si  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  est une matrice symétrique alors on peut, pour de petits déplacements  $\mathbf{U}$  au départ d'une configuration équilibrée, décrire les incréments de forces intérieures  $-\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \mathbf{U}$  comme dérivant de l'énergie potentielle quadratique  $\Delta^2 W$  (la symétrie de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  assure l'égalité des dérivées secondes croisées). L'état d'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, ce qui requiert la positivité de  $\Delta^2 W$ . Pour les matériaux granulaires la symétrie de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ , et donc la définition d'une

---

1. Au chapitre 9 de ce même traité on définit un paramètre sans dimension  $\kappa$  caractérisant le niveau de raideur de l'assemblage granulaire, tel que  $h/R$  soit d'ordre  $\kappa^{-1}$ , à partir de la pression de confinement, du diamètre des grains et des raideurs de contact. On aura donc  $K^{(2)}/K^{(1)} = O(\kappa^{-1})$  en général.

énergie potentielle au voisinage d'un état d'équilibre sous un chargement donné, signifie qu'il existe, au moins pour de faibles déplacements, un régime de comportement élastique.

### 3 Illustrations et discussion

Après le rappel de diverses notions liés aux réseaux de contact nous évoquons dans cette section divers résultats et observations numériques qui montrent leur importance comme outils, pratiques (critères d'équilibre) ou théoriques (formulation de problèmes de calcul à la rupture, évaluation des influences de la géométrie du réseau, de la forme des grains) d'analyse et de compréhension de la mécanique des structures de contacts intergranulaires.

#### 3.1 Définitions, rôles des matrices de rigidité et de raideur

L'approche quasi-statique étant relativement peu répandue, les définitions et la terminologie ne sont pas fixées de façon unique. Ainsi les références [5, 13] utilisent une matrice (dite de contact ou de configuration) notée  $\mathbf{c}$  qui est définie comme  $-\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  ici, et c'est à  $-\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  que les auteurs de [14] donnent le nom de matrice de rigidité. Quant à la matrice de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  elle est parfois appelée « matrice dynamique » [15, 16], comme en physique du solide.

La matrice de rigidité  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  est une donnée fondamentale de la structure granulaire, elle apparaît naturellement dans la description de la méthode de dynamique des contacts, où elle se combine à une matrice d'inertie, alors qu'elle se combine à l'élasticité du contact en dynamique moléculaire (chapitre 2 de cet ouvrage) comme dans l'approche quasi-statique décrite ici. Elle ne dépend, par (3), que des positions des centres des grains et des points de contact. Sa transposée  $\underline{\underline{\mathbf{H}}} = \mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  exprime l'équilibre des forces de contact par (7). De telles forces de contact  $\mathbf{f}$  sont dites *statiquement admissibles*. On dit que  $\mathbf{f}$  est plastiquement admissible si l'inégalité de Coulomb est satisfaite dans chaque contact. On peut alors, sans se préoccuper de la forme précise de la loi de contact et de petites déformations éventuelles, s'intéresser à l'ensemble  $\mathcal{S}$  des forces de contact à la fois statiquement et plastiquement admissibles.  $\mathcal{S}$  est l'intersection de l'espace affine de dimension  $h$  (le degré d'hyperstaticité) des forces de contact statiquement admissibles et du cône des forces de contact *plastiquement admissibles*, c'est un ensemble convexe. L'approche du calcul à la rupture consiste à déclarer chargement supportable tout  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  pour lequel  $\mathcal{S}$  est non vide. Nous verrons que cette condition, certes nécessaire, ne garantit pas la stabilité d'un réseau de contact sous le chargement considéré, et qu'il peut y avoir rupture avec  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .

Nous admettons dans ce chapitre que les efforts de contact sont des forces ponctuelles. Il arrive toutefois que, pour modéliser les contacts entre grains par plusieurs aspérités dans le cas de surfaces rugueuses, on introduise une résistance au roulement dans les contacts [17, 18]. La loi de contact correspondante, reliant un moment à une rotation relative peut être prise analogue à la loi tangentielle [19], avec un coefficient de frottement de roulement  $\mu_R$  (une longueur) qui limite la valeur du moment  $\Gamma$  à  $\mu_R N$ , et une raideur en rotation. On doit alors étendre la définition de  $\mathbf{f}$ , dont la dimension passe de  $DN_c$  à  $D(D+1)N_c/2$  pour y inclure des moments au contact (avec deux moments de roulement et un moment de pivotement en dimension 3), tandis que  $\vec{\mathcal{U}}$  contiendra des rotations relatives. La référence [20] contient une brève discussion des matrices de rigidité et de raideur dans un assemblage granulaire 2D avec résistance à la rotation.

L'écriture de la matrice de raideur sous la forme  $\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} + \mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}$  permet de dégager le rôle et l'influence des différentes données géométriques et mécaniques : la structure du réseau de contacts détermine la matrice de rigidité  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ , les lois de contact, une fois linéarisés pour de petits incréments, fournissent la matrice (diagonale par blocs associés à chacun des contacts) des raideurs de contact  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ , et la forme des grains, plus précisément leur courbure aux points de contact, n'apparaît que dans  $\underline{\underline{\mathcal{L}}}$ . Cette contribution géométrique à la matrice de raideur intervient dans les questions de stabilité. Enfin, le terme de pivotement au second membre de (19) affecte

aussi la matrice  $\underline{\mathcal{L}}$ , mais son origine n'est pas liée à la courbure des surfaces. Il est nécessaire (bien qu'en général oublié!) pour assurer l'objectivité [11] du modèle mécanique du contact : si les deux grains en contact sont animés d'une même rotation de corps rigide autour du vecteur normal, la force tangentielle doit subir cette rotation elle aussi.

### 3.2 Stabilité et équilibre

On est très souvent confronté, dans les calculs par éléments discrets à la question de la tolérance avec laquelle des équations d'équilibre sont satisfaites. Lors de la simulation d'un essai biaxial, comme schématisé sur la figure 2, le matériau est censé être sollicité en régime quasi-statique, et évoluer par une suite d'états d'équilibre. Or (comme il est indiqué au chapitre 9 du présent trait'e MIM), les simulations sont toujours rapides par rapport aux essais de laboratoire. Il est classique de caractériser l'évolution du système dans une telle simulation au moyen de diverses grandeurs liées au réseau des contacts telles que le nombre de coordination  $z$  (le nombre moyen de contacts par grain), la distribution des orientations des contacts, ou la distribution des forces. Toutes ces variables peuvent dépendre de l'écart à l'équilibre : un système mal équilibré comprendra en général moins de contacts, ceux qui portent de petites forces à l'équilibre pouvant facilement s'ouvrir sous l'effet d'une faible agitation résiduelle. Lorsque l'on cherche à savoir si le réseau des contacts est correctement déterminé, il est utile de tester la stabilité de l'équilibre au moyen du critère de positivité de la forme quadratique (25). Cette opération se trouve facilitée si la contribution géométrique  $\underline{\mathbf{K}}^{(2)}$  est négligeable (absence de mécanisme) et si le frottement n'est pas mobilisé. Or c'est effectivement ce qui arrive, comme on l'observe dans la pratique des simulations, du moins avec des disques ou des sphères : on constate que le nombre de contacts glissants tend à diminuer et à s'annuler à mesure que les écarts à l'équilibre se réduisent. Comme le système approche de son équilibre final, il est animé de différents modes de vibrations, dans lesquelles les forces de contact  $\mathbf{f}$  oscillent de façon assez erratique, et, génériquement, l'arrêt de ces oscillations en un point de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des forces statiquement et plastiquement admissibles ne se produit pas sur sa frontière (là où l'inégalité de Coulomb est saturée dans au moins un contact). La positivité de la matrice de raideur, alors en bonne approximation symétrique, est assurée si les mouvements de mécanisme n'affectent pas la structure qui porte les forces. Pour choisir la tolérance sur l'équilibre on peut prendre une valeur de force telle que l'on obtienne avec des écarts plus faibles des matrices de raideur définies positives. On a ainsi observé, pour des assemblages de billes [10] qu'une tolérance de l'ordre de  $10^{-4}F_N$ , où  $F_N$  est la force de contact normale moyenne, est en général assez faible pour cela. Si on impose que le résultante des forces sur chaque grain soit inférieure à  $10^{-4}F_N$ , que le moment résultant soit inférieure à  $10^{-4}F_N d$  où  $d$  est le diamètre du grain, tandis que les contraintes extérieurement imposées sont équilibrées par les forces intérieures avec une erreur relative inférieure à  $10^{-4}$ , alors on vérifie que le réseau des contacts définit une matrice de raideur qui assure la stabilité du système.

### 3.3 Hyperstaticité, hypostaticité, isostaticité et rareté des contacts

Les réseaux de contact des assemblages granulaires à l'équilibre, dans le cas de grains circulaires (2D) ou sphériques, ne possèdent en général que des mouvements de mécanisme simples qu'il est facile d'éliminer lors de la construction des matrices de rigidité, quitte à diminuer la dimension  $N_l$  de l'espace des vitesses ou des petits déplacements. Ainsi, dans le cas d'une cellule périodique, les translations d'ensemble (mais pas les rotations) sont des mécanismes triviaux, au nombre de  $D$ . En général notons  $k_0 \leq D(D+1)/2$  le nombre de mécanismes qui sont des mouvements d'ensemble de corps rigide. Une structure qui ne possède pas d'autre mouvement

de mécanisme est dite rigide (ou, plus précisément, rigide au premier ordre<sup>2</sup>).

D'autres mécanismes évidents sont les mouvements des grains flottants, c'est-à-dire qui ne transmettent aucune force. Dans les assemblages de disques ou de sphères faiblement polydispersés, la proportion  $x_0$  de grains flottants, selon la manière de préparer l'état d'équilibre peut varier de proche de zéro à plus de 15% [15, 10]. Avec une grande étendue granulométrique [21], le nombre de flottants parmi les grains de petite taille peut être beaucoup plus élevé. Tous les degrés de liberté des grains flottants sont des mécanismes, d'où  $k \geq n_l x_0 N$ .

Beaucoup d'études ont porté sur le cas des disques ou des sphères sans frottement [1, 2, 22, 14, 10]. Toutes les rotations sont alors des mécanismes, et on peut en fait les retirer de la liste des degrés de liberté car elles ne changent évidemment pas la géométrie du système et ne donnent lieu à aucun déplacement relatif normal dans les contacts. On peut retrancher  $2DN_c$  à la dimension des espaces de forces de contact ou de déplacements relatifs (en supprimant les composantes tangentielles), retrancher  $N$  à  $k$ , et remplacer  $N_l$  par  $N_l^{(0)} = N_l - D(D-1)N/2$  (en supprimant les rotations), de sorte que (10) devient

$$N_l^{(0)} + h = N_c + k. \quad (26)$$

Pour des objets non frottants de forme générale, les rotations ne sont plus a priori des mouvements de mécanisme, et on aura simplement

$$N_l + h = N_c + k, \quad (27)$$

tandis que pour des objets de révolution (3D) on a une rotation libre par grain et (26) s'applique avec  $N_l^{(0)} = N_l - N$ .

La forme (24) de  $\underline{\mathbf{K}}^{(2)}$  dans ce cas est une matrice symétrique négative, ce qui montre que tous les mécanismes dans lesquels il y a un déplacement relatif normal non nul dans au moins un contact conduisent à des instabilités. Si on a obtenu un état d'équilibre stable, alors on doit avoir  $k = k_0 + DN_0$  dans (27),  $N_0$  étant le nombre de grains flottants. Dans un grand système, ceci entraîne une inégalité pour le nombre de coordination  $z^*$  de l'ensemble des  $N^* = N - N_0$  grains portant des forces à l'équilibre ( $z^* = z/(1 - x_0)$ ). En prenant  $N_C = 2z^*N^*$ , (27), où  $k = k_0$  est négligeable et  $h \geq 0$  donne  $z^* \geq 6$  pour des sphères (3D) et  $z^* \geq 4$  pour des disques (2D). En revanche, des grains de forme ellipsoïdale peuvent former sans frottement des assemblages stables avec des mouvements de mécanismes possibles non triviaux [23], la matrice  $\underline{\mathbf{K}}^{(2)}$  pouvant, selon la courbure des surfaces aux points de contact [11], stabiliser ces mouvements ce qui autorise, selon (10), des valeurs  $z^* < 12$ .

Avec des grains frottants, l'unique mécanisme non trivial observé pour des billes sphériques est celui de la figure 3, qui met en mouvement les particules à deux contacts, le reste de l'assemblage restant fixe [10]. En chacun des deux contacts de la sphère mobile, il s'agit d'une combinaison de roulement et de pivotement, dans laquelle les forces de contact restent constantes, alors que les points de contact changent et décrivent sur la surface des grains une trajectoire circulaire. On vérifie que dans ce mouvement la contribution des contacts de la bille mobile au travail du second ordre est nul, le vecteur vitesse  $\mathbf{V}$  est tel que  $\underline{\mathbf{K}}^{(1)} \cdot \mathbf{V} = \underline{\mathbf{K}}^{(2)} \cdot \mathbf{V} = 0$ . La stabilité ou l'instabilité ne se manifeste donc qu'au travers des effets d'une variation de moment subi de la part de la bille marquée 1 sur la figure par les billes marquées 2 et 3. Les simulations donnent une population faible (2 ou 3%) mais non négligeable de telles particules divalentes dans les assemblages faiblement coordonnés [10], les forces qu'elles transmettent peuvent être importantes, et la proportion de mécanismes instables tend à disparaître quand la pression de confinement augmente. Si on trouve des grains de forme non sphérique avec deux contacts dans

---

2. En général la propriété de rigidité au premier ordre est plus forte que la seule rigidité, qui est l'impossibilité de déformer la structure sans qu'il y ait déplacement relatif dans un contact [6].

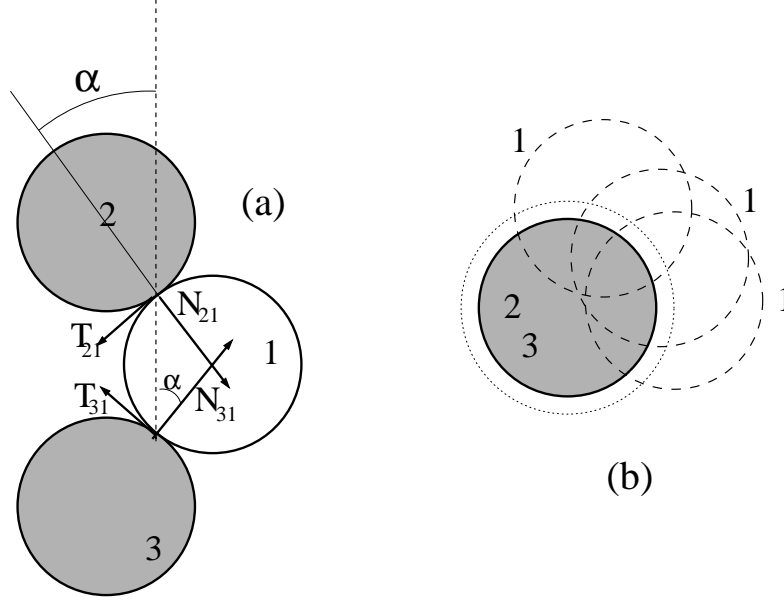


FIGURE 3 – Mouvement de mécanisme d’une sphère divalente (numéro 1), la droite joignant ses deux points de contact avec les sphères 2 et 3, immobiles, est l’axe instantané de rotation et porte les 2 forces de contact. (a) Équilibre des forces sur la sphère 1, dans le plan défini par les trois centres. L’équilibre est possible si  $\alpha$  est inférieur à l’angle de frottement de contact. (b) Mouvement, vu de dessus (2 et 3 sont en position éclipse). Le centre de la sphère mobile 1 décrit le cercle en pointillés fins autour de l’axe joignant les centres de 2 et 3.

un assemblage 3D, on peut également leur associer un mouvement de mécanisme similaire, mais l’occurrence de telles configurations et leur stabilité ne semble pas encore avoir été répertoriées dans la littérature.

En admettant l’absence de mécanismes non triviaux autres qu’associés aux grains divalents, en proportion  $x_2^*$  parmi les  $N^* = N(1 - x_0)$  grains qui transmettent des forces, la relation (10) permet de minorer la coordination  $z^* = 2N_c/N^*$  du réseau des contacts actifs

$$\begin{aligned} z^* &\geq 4 - \frac{2}{3}x_2^* && \text{(grains sphériques 3D, } \mu = 0) \\ z^* &\geq 3 && \text{(grains circulaires 2D, } \mu = 0) \end{aligned} \tag{28}$$

Pour le degré d’hyperstaticité, on dispose également de résultats pour les grains non frottants [24, 25, 26, 27]. En effet, pour des configurations génériquement désordonnées (en pratique, pour tous les assemblages sauf les réseaux parfaitement ordonnés), le degré d’hyperstaticité des assemblages de grains non frottants est nul dans la limite rigide des faibles contraintes de confinement, ou des grandes raideurs de contact<sup>3</sup>. Une situation analogue familière est celle de la table à quatre pieds qui en général est bancal si ses contacts avec le sol sont rigides, parce que les incertitudes géométriques sur la forme des pieds comme sur les irrégularités du sol interdisent la configuration hyperstatique à quatre contacts. Cette propriété d’absence d’hyperstaticité est en fait de nature géométrique – le réseau des contacts ne peut pas supporter un système de forces normales auto-équilibrées – et sa validité est indépendante de la valeur effective du coefficient de frottement intergranulaire. Une conséquence immédiate en est une majoration du nombre de coordination  $z^*$  de l’assemblage privé de ses grains flottants dans la limite rigide. À partir des

3. C’est la limite où  $\kappa \rightarrow +\infty$ ,  $\kappa$  étant le paramètre de raideur défini au chapitre 9.

relations (26) ou (27), on obtient en effet :

$$\begin{aligned}
z^* &\leq 2D && \text{(disques ou sphères, } D = 2 \text{ ou } 3) \\
z^* &\leq D(D+1)/2 && \text{(grains quelconques, } D = 2 \text{ ou } 3) \\
z^* &\leq 10 && \text{(grains axisymétriques, } D = 3)
\end{aligned}
\tag{29}$$

À la différence de (28), ces inégalités restent vraies quel que soit le coefficient de frottement  $\mu$ , mais seulement dans la limite des contacts rigides et indéformables.

La structure des grains en contact portant des forces est *isostatique* quand elle est dépourvue d'hyperstaticité ( $h = 0$ ) et d'hypostaticité, sauf les éventuels mouvements d'ensemble de corps rigide ( $k = k_0$ ). La matrice  $\underline{\mathbf{G}}$ , si on restreint l'espace des vitesses ou des petits déplacements en excluant de tels mouvements, est carrée et inversible. C'est effectivement le cas pour des billes ou des disques rigides non frottants (et non cohésifs), en présence de désordre générique. On a alors  $z^* = 6$  pour les billes,  $z^* = 4$  pour les disques, d'après (28) et (29). Ces propriétés sont effectivement observées dans la limite rigide [28, 1, 22, 14, 10]. L'isostaticité est propre aux grains circulaires ou sphériques, des objets de forme différente pouvant s'assembler dans des configurations avec des mécanismes stables [23]. L'isostaticité a été exploitée pour mettre au point des méthodes de calcul quasi-statique d'assemblages de disques rigides se réarrangeant sous chargement variable sans aucun autre paramètre que géométrique [28]. L'absence d'hyperstaticité s'applique plus généralement dans la limite rigide. Elle a des conséquences remarquables (les forces ne dépendent pas de la loi de contact) mais ne vaut pas pour les grains frottants, même dans la limite rigide [10], sauf éventuellement pour certains procédés d'assemblage dans la limite  $\mu \rightarrow \infty$  (qui est une curiosité théorique). Il a parfois été suggéré qu'on pourrait avoir une sorte d'isostaticité « généralisée » pour des grains frottants à l'approche d'une rupture d'un assemblage, en donnant une coordonnée de moins au vecteur des forces de contact là où il y a glissement et donc égalité dans la condition de Coulomb. Cette prédiction est toutefois contredite par les observations numériques [1]. De plus, cette notion d'indétermination des forces prenant en compte le statut des contacts est d'un usage plus délicat, car elle dépend des forces appliquées et ne correspond à aucune propriété duale pour les déplacements.

On notera que ces questions d'hyperstaticité ou d'hypostaticité ne prennent aucunement en compte les conditions inégalités qui portent sur les forces. Cependant, la majoration (29) du nombre de contacts dans un assemblage granulaire désordonné entraîne une certaine limitation du degré d'hyperstaticité, qui est lié à certaines propriétés assez générales des matériaux granulaires (comme la distribution des forces), et tend à restreindre l'influence de la loi de contact et à renforcer celle de la géométrie. Ainsi, en général, si l'on connaît avec précision les positions (et éventuellement les orientations) des grains, on peut calculer, avec les lois les plus habituelles, les forces de contact normales, qui sont élastiques et liées à la déflexion des contacts (qui apparaît dans une simulation numérique comme une « interpénétration »). En revanche la force tangentielle dépend de l'histoire des sollicitations du contact et n'est pas directement déterminée par les positions actuelles. C'est pourquoi, dans la pratique des calculs par éléments discrets, on ne sauvegarde pas seulement les positions mais aussi les forces à la fin du calcul. Cependant, on peut montrer que dans un état d'équilibre les forces tangentielles sont en général uniquement déterminées pour les disques ou les sphères satisfaisant aux inégalités (29). Dans le cas de sphères, les équations d'équilibre sont au nombre de  $N_l = 6N^*$  et contiennent  $z^*N^*$  coordonnées inconnues de forces tangentielles (c'est-à-dire 2 pour chacun des  $z^*N^*/2$  contacts), et celles-ci sont donc, généralement, déterminées. Une conséquence en est que dans bien des évolutions quasi-statiques, l'oubli du dernier terme de (19), qui viole le principe d'objectivité [11] peut s'avérer inoffensif, la stabilité impliquant finalement un retour à l'équilibre avec les mêmes valeurs des forces tangentielles.

## 4 Applications à l'élasticité

Nous rappelons ici quelques résultats relatifs aux propriétés élastiques évaluées numériquement pour des assemblages de billes pour lesquels l'élasticité des contacts obéit aux lois de Hertz-Mindlin-Deresiewicz [8]. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux sont possibles, pour les valeurs des modules ainsi que pour l'extension du domaine de comportement (approximativement) élastique. Elles donnent de bons résultats pourvu que les états internes du matériau dans l'expérience et dans la simulation soient proches, en particulier les nombres de coordination et les tenseurs de texture (orientation des contacts). Nous renvoyons à [29, 7] pour les références aux travaux expérimentaux sur les sables ou sur les billes et pour le détail des confrontations entre simulations et expériences. L'élasticité relie de petits incréments de contrainte à de très faibles déformations au voisinage immédiat d'un état de référence, et pourrait de ce fait être considérée comme peu pertinente pour le comportement mécanique des matériaux granulaires. Toutefois, les modules élastiques sont accessibles à l'expérience et fournissent indirectement des mesures non destructives de caractéristiques importantes des assemblages granulaires comme le nombre de coordination, qui, le plus souvent, échappent aux techniques d'observation directe [7]. La simulation de la réponse à de petites variations de chargement est en outre justifiée par l'étude de critères de localisation de la déformation [30], qui demandent une connaissance précise de la loi constitutive sous forme incrémentale. Dans cette partie notre propos est d'illustrer les apports de la méthode quasi-statique. Nous ne traitons pas des valeurs des modules, de leur dépendance par rapport aux contraintes et à la structure de l'assemblage [29, 7], ni de leur prédiction, ou des propriétés quelque peu anormales des réseaux faiblement hyperstatiques [31, 16, 7].

### 4.1 Calcul des modules élastiques

De petits déplacements donneront des forces élastiques, comme on l'a vu au § 2.6, si on peut écrire une matrice de raideur symétrique définie positive. La cause majeure d'asymétrie dans la matrice de raideur est la mobilisation du frottement, Eq. (15). Lorsque l'on a affaire à un assemblage bien équilibré on a en pratique  $\|\mathbf{T}_{ij}\| < \mu N_{ij}$  dans tous les contacts  $i$ - $j$  (§ 3.2), de sorte que l'on peut garder la forme symétrique et définie positive de chacun des blocs diagonaux de  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ . L'élasticité suppose aussi que l'on puisse négliger la contribution géométrique non symétrique évaluée (pour des sphères) au § 2.5, ce qui est possible s'il n'y a pas de mécanisme. Lorsqu'il s'agit de calculer une réponse élastique, on ignore bien sûr les grains flottants. Restent les mécanismes associés aux grains divalents (figure 3), qui appartiennent au noyau de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  et à celui de  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$ . À moins d'exercer directement des efforts sur la particule divalente (marqué 1 sur la figure 3), un incrément de chargement, en particulier une variation de contrainte globale, ne travaille pas dans ces mécanismes, que l'on peut éliminer soit en réduisant le nombre de degrés de liberté, soit en attribuant une raideur finie au mouvement libre, comme si, par exemple, le centre de la particule mobile était maintenue dans le plan de la figure 3(a) par un ressort. Enfin, une dernière cause d'asymétrie de la matrice de raideur réside dans la sensibilité des champs de contraintes et de déformation dans la région du contact entre deux grains au trajet de chargement [9]. Il a été vérifié que ces subtilités de la loi de contact n'ont qu'un très faible impact sur le calcul des modules [7]. On peut donc à partir d'une configuration bien équilibrée construire la matrice de raideur élastique sous la forme  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(1)}$  avec la forme élastique (14) de la matrice des raideurs locales  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ . Après élimination éventuelle des mécanismes associés aux grains divalents, on résout le système linéaire

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad (30)$$

dont l'inconnue est le vecteur déplacement  $\mathbf{U}$ , et l'incrément  $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}$  au second membre a des coordonnées nulles sauf celles qui expriment un incrément de contrainte (ou de force sur une paroi). Alternativement, on peut imposer des déformations de l'échantillon en manipulant les

conditions aux limites, ce qui revient à imposer certaines coordonnées de  $\mathbf{U}$ . En partitionnant les degrés de liberté entre ceux qui sont imposés, coordonnées d'un vecteur  $\mathbf{u}_g$  de dimension  $n_g \ll N^*$  et ceux qui sont laissés libres, coordonnées de  $\tilde{\mathbf{U}}$  de dimension  $N_l^* - n_g$ , ainsi que la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  en blocs correspondants, (30) prend la forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{\underline{\mathbf{K}}}} & \underline{\underline{\mathbf{L}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\underline{\mathbf{L}}} & \underline{\underline{\mathbf{k}}}_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{u}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}^{\tilde{\text{ext}}} \\ \Delta \mathbf{f}_g \end{bmatrix}. \quad (31)$$

On trouve alors le système d'équations à résoudre pour  $\tilde{\mathbf{U}}$  en prenant  $\Delta \mathbf{F}^{\tilde{\text{ext}}} = 0$  dans (31), où  $\mathbf{u}_g$  est connu :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{K}}}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = -\underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \mathbf{u}_g. \quad (32)$$

Que l'on utilise (30) ou bien (32), on doit résoudre un système linéaire avec une matrice symétrique positive définie et creuse. Pour ce faire, on dispose de diverses méthodes, dont celle du gradient conjugué [32] (éventuellement préconditionné), peu coûteuse en mémoire mais pouvant donner de longs calculs si la matrice de raideur est mal conditionnée, ou bien la factorisation de Cholesky, plus coûteuse pour un seul système linéaire, et pour laquelle il faut tenter de minimiser le stockage mémoire nécessaire en réordonnant au besoin les inconnues, mais qui finit par être avantageuse si on doit résoudre des systèmes avec la même matrice mais pour de nombreuses valeurs différentes du second membre. Les matrices de raideur des assemblages granulaires ayant une structure très similaire à celles que l'on rencontre dans les problèmes d'élasticité discrétisés par éléments finis, on trouvera des indications utiles sur la résolution numérique dans la littérature plus vaste qui leur est consacrée.

Bien entendu, il est possible de calculer des modules élastiques sans recourir à la matrice de raideur, en simulant par les méthodes dynamiques habituelles la réponse à de petits incréments de contrainte appliquée. Il faut ensuite s'assurer qu'il y a bien une réponse linéaire dans un certain intervalle de sollicitations, car des incréments de chargement trop faibles donnent des résultats affectés par les petits écarts à l'équilibre, et des incréments trop grands sortent du domaine élastique. Un tel calcul renseigne aussi sur le domaine élastique (ou approximativement élastique). Le recours à la matrice de raideur [15, 7, 16] donne cependant un accès plus direct et plus rapide à l'ensemble des modules.

## 4.2 Le domaine élastique

La figure 4 montre les variations du déviateur des contraintes  $q = \sigma_1 - \sigma_3$ , normalisé par la contrainte latérale  $\sigma_3$ , et de la déformation volumique  $\epsilon_v$ , près de l'état initial isotrope dans un essai de compression triaxiale de révolution simulé pour des billes de verre, en fonction de la déformation axiale  $\epsilon_a = \epsilon_1$ . L'indice 1 correspond ici à la direction principale majeure des contraintes. Les résultats sont montrés pour différentes valeurs de la contrainte isotrope initiale  $P = \sigma_2 = \sigma_3$ . On voit que l'élasticité au voisinage de l'état initial décrit en bonne approximation la relation entre incréments de déformation et de contrainte pour des déformations de l'ordre de  $10^{-5}$ , et que ce domaine approximativement élastique augmente avec  $P$ . Hors du domaine de validité de l'élasticité linéaire initiale, il est connu que la déformation est irréversible, comme le montre la figure 5. Au cours de la compression triaxiale, on voit que la pente de la courbe de déviateur décroît progressivement. Sous l'effet d'une décharge, on retrouve une pente plus élevée, proche du module élastique initial. En fait, la tangente à la courbe de décharge, on peut le vérifier, coïncide bien avec le module élastique correspondant, que l'on peut évaluer en faisant appel à la matrice de raideur pour l'état considéré. Ceci n'est possible que si la configuration est bien équilibrée. On doit donc, avant de calculer les modules par l'approche statique, laisser s'équilibrer l'état intermédiaire obtenu au cours de la simulation dynamique, en imposant des contraintes constantes plutôt qu'en poursuivant la déformation à vitesse contrôlée. Comme le montre la



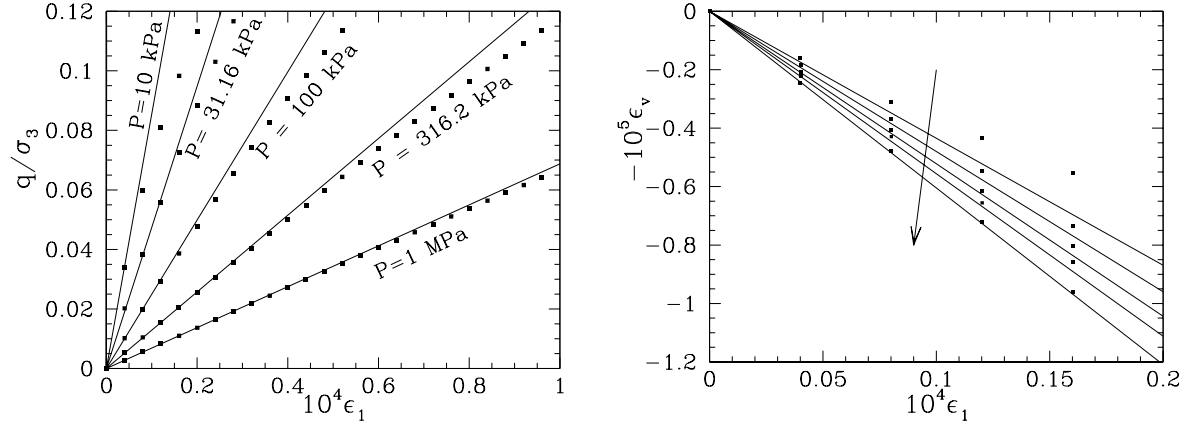


FIGURE 4 – Déviateur des contraintes (à gauche), normalisé par la contrainte latérale  $\sigma_3 = P$ , et déformation volumique (à droite) fonctions de la déformation axiale dans la compression triaxiale simulée d’un assemblage de billes de verre pour 5 valeurs de  $P$ . Les points donnent les résultats du calcul par dynamique moléculaire, et les droites en lignes continues ont pour pentes  $E^*$  et  $(1 - 2\nu^*)$ ,  $E^*$  et  $\nu^*$  étant le module d’Young et le coefficient de Poisson du matériau granulaire dans l’état initial isotrope. La flèche indique pour les courbes de  $\epsilon_v$  le sens de  $P$  croissant.

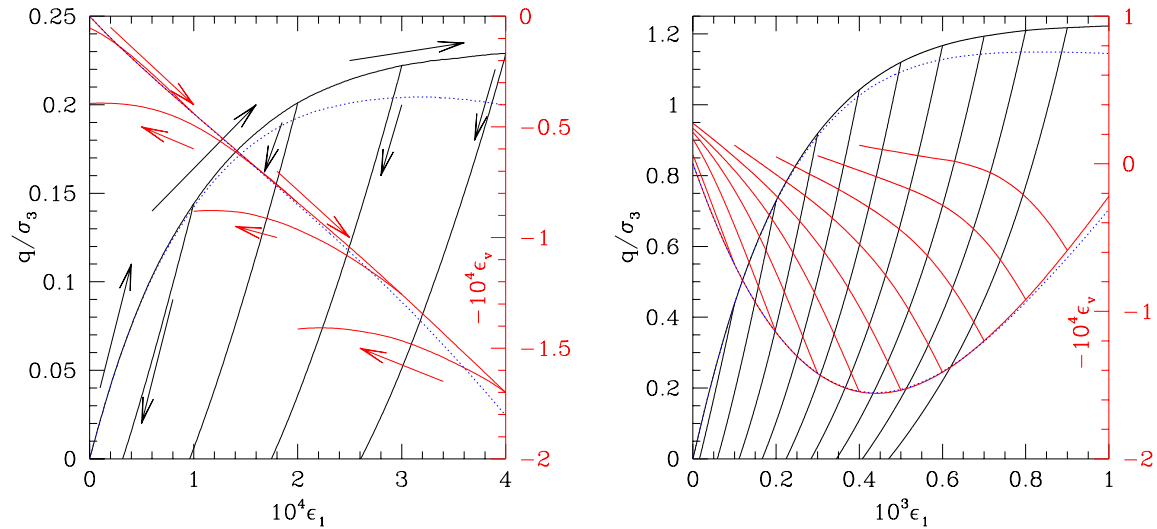


FIGURE 5 – Courbes  $q(\epsilon_1)/\sigma_3$  (axes de gauche) et  $\epsilon_v(\epsilon_1)$  (axes de droite), en compression triaxiale, simulée par une méthode de dynamique moléculaire classique, pour le système de la figure 4 à  $P = 100$  kPa (graphe de gauche), et pour un système similaire mais avec une coordination initiale beaucoup plus grande (graphe de droite). Noter les échelles de déformation. Dans les deux cas, on a simulé les effets d’une décharge à partir de différents états atteints au cours de l’essai. Les lignes en pointillés fins représentent les résultats de la même simulation dans laquelle on a ignoré la création de nouveaux contacts.

figure 6, cet équilibre s’accompagne d’un léger fluage. Si on reprend par la suite la compression à taux de déformation axial imposé, on observe une remontée plus raide de la courbe de déviateur, dont la pente initiale coïncide avec le module élastique calculé par la matrice de raideur dans l’état d’équilibre atteint après fluage. Cette observation s’explique par la formation, lors de l’équilibre, d’une structure plus stable avec les forces de contact strictement à l’intérieur du

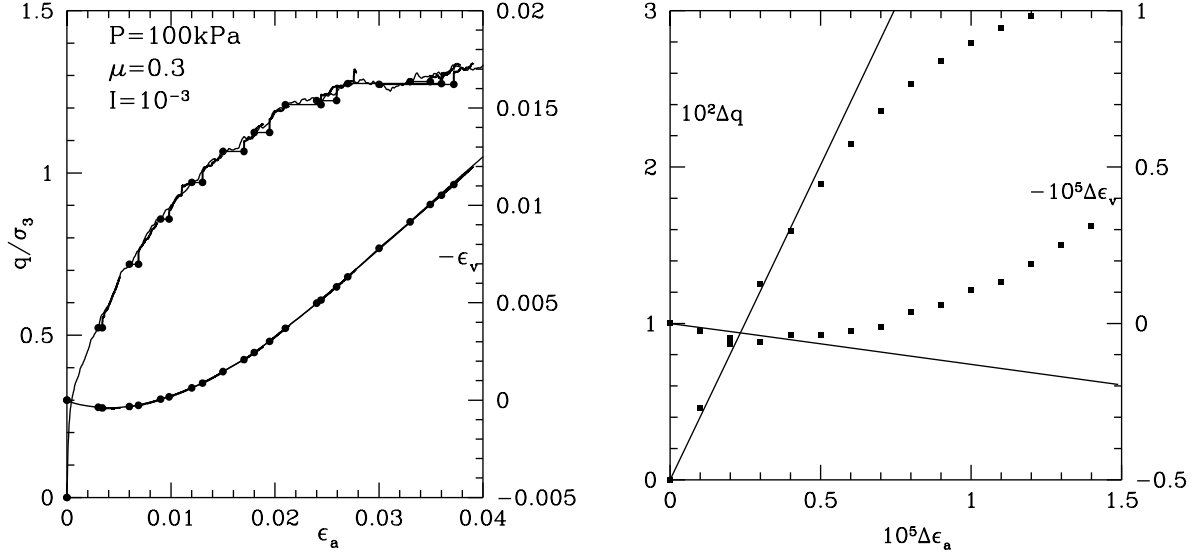


FIGURE 6 – Équilibrage sous contraintes constantes, puis reprise de la compression triaxiale à  $\epsilon_1$  imposé à partir de différents états intermédiaires. Les symboles circulaires pleins montrent le début et la fin de chacun des intervalles de fluage qui correspondent à ces équilibrages (graphe de gauche). La reprise de l’essai à  $\epsilon_1$  imposé se caractérise par une réponse initiale très raide (courbes en trait gras) dont le graphe de droite, analogue de la figure 4 pour un état d’équilibre après fluage le long de la trajectoire de l’essai triaxial, montre qu’elle est élastique.

cône de Coulomb, sous l’effet des vibrations du système autour de sa position finale, qui brouillent l’effet de polarisation des forces tangentielles du taux de déformation maintenue auparavant dans une direction constante. Une fois l’essai repris à  $\epsilon_1$  fixé, après une phase initiale, les courbes de  $q$  et  $\epsilon_v$  rejoignent celles de l’essai monotone et sans arrêt. Il est intéressant de noter que les modules élastiques se mesurent expérimentalement de manière similaire [33] : on applique de petits cycles de contraintes autour de la valeur à laquelle l’essai a été interrompu, ce qui provoque d’abord un certain fluage, puis les caractéristiques élastiques se déduisent de la forme finale stabilisée et peu dissipative du cycle de contraintes et déformations. En laboratoire c’est davantage la sollicitation appliquée qui est responsable du fluage que l’écart à l’équilibre<sup>4</sup>.

Pour conclure, nous retiendrons de ces rappels rapides de résultats et d’observations numériques des propriétés élastiques des assemblages granulaires modèles que leur étude est facilitée et systématisée lorsque l’on a recours à l’approche quasi-statique fondée sur la matrice de raideur. Les conditions dans lesquelles on observe une réponse approximativement élastique et linéaire sont très similaires dans la simulation et dans les expériences : dans un intervalle du même ordre en très faible déformation suite au processus d’assemblage ; en décharge lors d’un essai triaxial : ou bien, sur de très courts intervalles, lors de la reprise de la déformation monotone dans la même direction suite à un arrêt d’un essai à  $\epsilon$  imposé et à un petit fluage provoqué par l’approche de l’équilibre ou par de faibles sollicitations cycliques. En dehors du régime approximativement élastique, on note que les déformations restent de l’ordre de la prédiction de l’élasticité linéaire d’autant plus longtemps que le réseau des contacts initiaux est bien connecté (figure 5).

4. On observe aussi un certain fluage dans les expériences mais seulement sur des durées beaucoup plus longues. On l’attribue au bruit ambiant. Voir le chapitre 9 pour une comparaison des valeurs de  $\epsilon$  entre les expériences et les simulations numériques.

## 5 Applications à la déformation anélastique

### 5.1 Formulation du problème, propriétés générales

Au-delà de la matrice de raideur élastique initiale, qui ne fournit que la tangente à l'origine des courbes rhéologiques, voyons comment et dans quels cas l'approche quasi-statique peut prédire la déformation d'un échantillon granulaire soumis à un trajet de chargement donné. Pour fixer les idées nous traitons du cas simple de la compression biaxiale d'un échantillon bidimensionnel de disques, l'élasticité du contact faisant intervenir des raideurs  $K_N$  et  $K_T$  constantes. Nous présentons et commentons ici les résultats essentiels de nos propres travaux [1, 2, 3] sur ce problème particulier, sachant que des éclairages très utiles sont fournis par les études de McNamara *et al.* [5, 13]. On traite le système dans l'HPP, on néglige  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(2)}$ , pour des contraintes appliquées de la forme  $\sigma_1 = P + q$ ,  $\sigma_2 = P$ ,  $P$  étant la pression initiale isotrope. Le problème consiste donc à déterminer le vecteur déplacement  $\mathbf{U}$  et les forces de contact  $\mathbf{f}$ , tandis que le déviateur  $q$  augmente graduellement à partir de zéro. Le vecteur  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  ne contient que des valeurs nulles, sauf les coordonnées qui correspondent aux contraintes, qu'elles s'expriment par des forces sur les parois ( $\sigma_1 = F_1/L_2$ ,  $\sigma_2 = F_2/L_1$ , voir la figure 2) ou bien, dans le cas d'une cellule périodique, par  $(A\sigma_\alpha)_{\alpha=1,2}$  qui doit satisfaire (9). En supposant que la trajectoire quasi-statique a été trouvée depuis l'état de départ jusqu'à une certaine valeur de  $q$ , pour laquelle le vecteur déplacement est  $\mathbf{U}(q)$ , on cherche, pour un petit incrément de chargement  $\Delta\mathbf{F}^{\text{ext}}$  correspondant à  $\Delta q$  le surcroît de déplacement  $\Delta\mathbf{U}$ , solution de :

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{U}(q), \Delta\mathbf{U}) \cdot \Delta\mathbf{U} = \Delta\mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (33)$$

Dans (33), la matrice de raideur  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  dépend de  $\mathbf{U}$  et aussi de la *direction* de  $\Delta\mathbf{U}$  – on pourrait argumenter  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  par  $\frac{\Delta\mathbf{U}}{\|\Delta\mathbf{U}\|}$ . On peut également écrire (33) en faisant apparaître les dérivées par rapport à  $q$ , qui joue le rôle d'un « temps cinématique », c'est-à-dire d'un paramètre le long de la trajectoire dans l'espace des configurations :

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\mathbf{U}, \frac{d\Delta\mathbf{U}}{dq}) \cdot \frac{d\Delta\mathbf{U}}{dq} = \frac{d\mathbf{F}^{\text{ext}}}{dq}, \quad (34)$$

Comme on a une élasticité de contact unilatérale, la matrice de raideur est modifiée avant tout par la mobilisation du frottement, le bloc  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{ij}$  prenant alors l'une ou l'autre des deux formes (15). Elle est aussi affectée par l'ouverture des contacts – lorsque les grains  $i$  et  $j$  sont séparés, il faut bien sûr prendre  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{ij} = 0$ . Au cours de l'évolution quasi-statique des déplacements et des forces, un certain nombre  $\tilde{N}_c$  de contacts deviennent « critiques » c'est-à-dire que le frottement y est complètement mobilisé. À une étape donnée du calcul, pour résoudre (33) il faut déterminer le statut, glissant ou non glissant, de ces contacts critiques : a priori la matrice de raideur peut donc prendre  $2^{\tilde{N}_c}$  formes différentes, et l'existence et l'unicité de la solution posent problème. Une propriété essentielle a été établie dans [13] : tant que l'ensemble des  $2^{\tilde{N}_c}$  matrices de raideur satisfont le critère de stabilité, c'est-à-dire la positivité stricte de la forme quadratique (25), alors la solution existe et est unique. En pratique, plus la population de contacts glissants augmente, plus la stabilité est menacée. Lorsque certains statuts de contact pourraient donner  $\Delta^2W < 0$  avec certaines directions de  $\delta\mathbf{U}$ , on peut s'attendre à la manifestation d'une instabilité, un bruit arbitrairement faible pouvant solliciter le système dans la direction instable et déclencher une augmentation exponentielle de l'énergie cinétique. Il semble donc, grâce au résultat de [13], que l'approche quasi-statique fournisse une solution unique aussi longtemps qu'elle est physiquement fondée. Cette conclusion peut être nuancée quelque peu cependant, car la démonstration de [13] ignore l'ouverture des contacts. À noter que ce phénomène n'est pas analogue au changement de statut : en effet, alors qu'un contact glissant peut devenir non-glissant à tout instant si la force

qu'il transmet pénètre à l'intérieur du cône de frottement, un contact ouvert ne se referme que si un incrément de déplacement fini vient combler l'interstice qui est apparu. L'ouverture des contacts est responsable (dans le cas linéaire) de la dépendance en  $\mathbf{U}$  de  $\underline{\mathbf{K}}$  dans (33), alors que le changement de statut, de glissant à non glissant ou vice-versa, est la cause de sa dépendance dans la direction de l'incrément  $\Delta\mathbf{U}$ .

Tant que (34) peut déterminer une trajectoire comme une suite d'états d'équilibre, on a affaire à un réseau d'éléments rhéologiques (ressorts et patins frottants avec condition de Coulomb), la forme des grains n'intervient pas directement (pourvu que l'approximation HPP soit bonne, ce qui est effectivement le cas sauf pour des grains anormalement mous), sauf à conditionner initialement la géométrie du réseau de contacts. Il en résulte que les déformations, sous des contraintes données, seront pour une même géométrie inversement proportionnelles aux raideurs  $K_N$ ,  $K_T$ . Nous qualifions ce comportement de régime I ou régime strictement quasi-statique. Il arrive aussi que l'évolution d'une collection de grains, qui reste proche de l'équilibre, se fasse par une succession de petits réarrangements [28, 2, 3], qui sont déclenchés par des instabilités. Celles-ci ne donnent toutefois que des mouvements de faible amplitude, arrêtés par la fermeture de nouveaux contacts. Pour des systèmes de taille croissante, l'intervalle de contrainte (de  $q$  dans le cas de l'essai biaxial) est de plus en plus faible, ainsi que l'amplitude de la déformation qui accompagne le réarrangement du réseau [2], de sorte qu'à l'échelle macroscopique la déformation apparaîtra comme graduelle et continue. Nous qualifions ce comportement, dans la limite des évolutions macroscopiques lentes, où l'inertie n'est plus pertinente<sup>5</sup> de régime quasi-statique au sens large ou régime II – les déformations par réarrangement étant dites « de type II ». Nous donnons ci-dessous (§5.3) quelques exemples d'utilisation de la méthode quasi-statique, ainsi que quelques illustrations des propriétés des régimes I et II. Auparavant, voyons comment on mène les calculs pour la résolution de (34).

## 5.2 Un algorithme de calcul

Pour résoudre numériquement (34), on discrétise l'évolution du paramètre de chargement  $q$  en intervalle  $\Delta q$  et on utilise la forme incrémentale (33). Plaçons-nous pour une valeur donnée  $q$ , en supposant que le problème a été résolu pas à pas depuis  $q = 0$ , ce qui fournit les valeurs courantes de  $\mathbf{U}$  et de  $\mathbf{f}$  et cherchons à résoudre itérativement (33). La méthode de résolution que nous résumons ici se présente comme une recherche des incréments de forces de contact  $\Delta\mathbf{f}$ , tels que  $\mathbf{f} + \delta\mathbf{f}$  soit plastiquement et statiquement admissibles (voir le § 3.1), et de plus corresponde aux incréments de déplacement  $\Delta\mathbf{U}$ , qui doivent satisfaire la condition suivante. Définissant les déplacements relatifs élastiques par :

$$\Delta\vec{\mathcal{U}}^E = (\underline{\mathbf{K}}^E)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{f},$$

avec la forme élastique de la matrice des raideurs de contact, et les déplacements relatifs plastiques  $\Delta\vec{\mathcal{U}}^P$ , par

$$\Delta\vec{\mathcal{U}} = \underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{G}} \cdot \Delta\mathbf{U} = \Delta\vec{\mathcal{U}}^E + \Delta\vec{\mathcal{U}}^P,$$

on doit avoir  $\Delta\vec{\mathcal{U}}_{ij}^P = 0$  sauf pour les contacts glissants, où le déplacement relatif plastique est (avec nos conventions) positif<sup>6</sup>. Cette condition s'exprime aussi simplement en notant que l'on a  $\mathbf{f} + \underline{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathcal{U}} = \mathcal{P} \left[ \mathbf{f} + \underline{\mathbf{K}}^E \cdot \vec{\mathcal{U}} \right]$  pour tout  $\Delta\vec{\mathcal{U}}$ , où  $\mathcal{P}$  désigne le projecteur sur le cône de Coulomb, qui est défini sur la figure 7. En plasticité on dit qu'un tel projecteur définit la *règle d'écoulement*, c'est-à-dire le choix de la direction  $\Delta\vec{\mathcal{U}}^P$ . Un autre choix serait de projeter orthogonalement sur le cône, pour le produit scalaire qui correspond à la norme  $\|\mathbf{f}\|$  définie par

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \mathbf{f} \cdot (\underline{\mathbf{K}}^E)^{-1} \cdot \mathbf{f}. \quad (35)$$

5. Voir au chapitre 9 comment le rôle de l'inertie est évalué par un nombre sans dimension.

6. Le vecteur unitaire tangentiel est tel que  $T_{ij} > 0$ .

Ceci définit la règle d'écoulement dite *associée* (figure 7, graphe de droite), alors que la règle

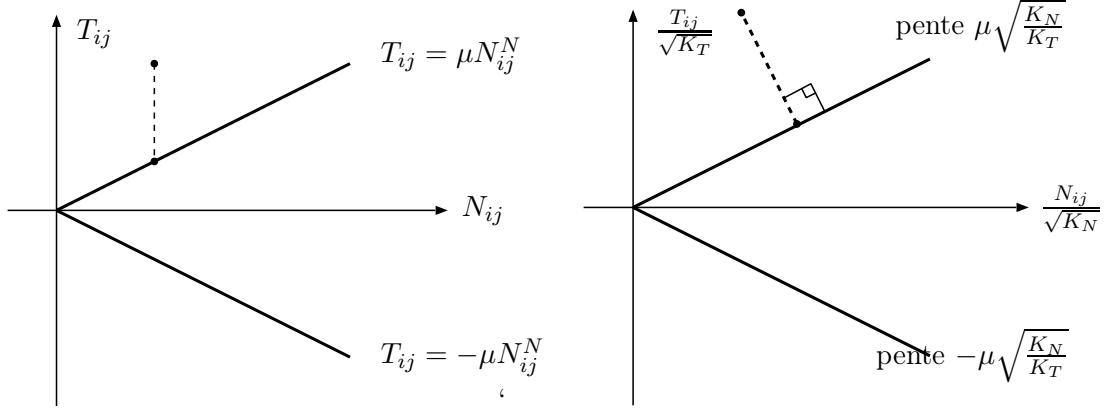


FIGURE 7 – Projection  $\mathcal{P}$  sur le cône de Coulomb suivant une règle d'écoulement non associée (graphe de gauche), ou associée (graphe de droite).

correspondant au frottement de Coulomb usuel (graphe de gauche de la figure 7) est *non associée*. Une loi d'écoulement associée entraîne cette propriété remarquable que le calcul à la rupture fournit non seulement une condition nécessaire, mais aussi suffisante de stabilité (à condition toutefois que l'on puisse négliger l'influence de l'ouverture des contacts). Le réseau de contact continuera de supporter le chargement aussi longtemps qu'il existe des forces de contact qui soient à la fois statiquement et plastiquement admissibles. Pour le voir, il suffit de vérifier que la solution  $\Delta \mathbf{f}$  de (33) minimise  $\|\Delta \mathbf{f}\|^2$ , avec la norme de (35), sous la contrainte  $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{f} \in \mathcal{S}$ .

Pour résoudre itérativement (33), on considère qu'on a affaire à un problème élastique corrigé par l'application de forces extérieures sur les grains concernés par les contacts glissants. Au début du calcul, lorsque l'indice d'itération  $j$  vaut zéro, on prend  $\Delta \mathbf{U}_0 = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}$ , c'est-à-dire la solution élastique pour les incréments de déplacements. On évalue alors les forces de contact comme :

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \Delta \mathbf{U}_j, \quad (36)$$

ce qui donne des forces statiquement admissibles. Ces forces peuvent toutefois sortir du cône de Coulomb, aussi leur applique-t-on la projection  $\mathcal{P}$  pour obtenir des forces plastiquement admissibles :

$$\mathbf{f}_j^{PA} = \mathcal{P}[\mathbf{f}_j]. \quad (37)$$

Le vecteur  $\mathbf{f}_j^{PA}$  n'est pas statiquement admissible, il n'équilibre pas  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  mais

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot (\mathbf{f}_j^{PA} - \mathbf{f}_j).$$

On va par conséquent corriger le vecteur déplacement pour équilibrer ces forces (en admettant le problème élastique). Cette correction vaut

$$\mathbf{V}_j = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot [\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_j^{PA}] = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot [\mathbf{F}^{\text{ext}} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{f}_j^{PA}], \quad (38)$$

et on incrémente  $\Delta \mathbf{U}$  :

$$\Delta \mathbf{U}_{j+1} = \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{V}_j. \quad (39)$$

On peut alors remplacer  $j$  par  $j + 1$ , passant ainsi à l'itération suivante qui reprend au calcul des forces par (36), et on poursuit jusqu'à ce que  $\mathbf{V}_j$  ou bien  $\mathbf{f}_j^{PA} - \mathbf{f}_j$  soit négligeable.

Cet algorithme, du point de vue des forces, revient à projeter alternativement sur le cône de Coulomb avec  $\mathcal{P}$ , et sur l'espace affine des forces statiquement admissibles avec  $\mathcal{Q}$  qui est une

projection orthogonale au sens de la norme (35). Les opérations (38) et (39) à l'étape  $j$ , suivies de (36) à l'étape  $j + 1$  se traduisent par :

$$\mathbf{f}_{j+1} = \mathcal{Q} [\mathbf{f}_j^{PA}] .$$

[Vérifions-le en définissant  $\mathcal{Q}[\mathbf{f}]$  pour un  $\mathbf{f}$  quelconque. L'espace sur lequel il s'agit de projeter est l'ensemble des  $\mathbf{g}$  tels que  $\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{F}^{\text{ext}}$ . Il s'agit de décomposer  $\mathbf{f}$  en  $\mathcal{Q}[\mathbf{f}] + \mathbf{f}'$ , avec  $\mathbf{f}'$  orthogonal au sens du produit scalaire associé à (35) au directeur de cet espace affine. En d'autres termes  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot \mathbf{f}'$  doit être orthogonal au sens du produit scalaire ordinaire entre déplacements relatifs et forces de contact, à tout  $\mathbf{g}$  tel que  $\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{g} = 0$ , soit au noyau de  $\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ . L'orthogonal du noyau de  $\mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  n'est autre que l'image de  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ , on a  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot \mathbf{f}' = -\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{V}$ , où  $\mathbf{V}$  est un certain vecteur de déplacements. Pour le déterminer, il suffit d'écrire que  $\mathcal{Q}[\mathbf{f}]$  est statiquement admissible. Appliquant l'opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  aux deux membres de l'égalité

$$\mathbf{f} = \mathcal{Q}[\mathbf{f}] - \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{V}, \quad (40)$$

on trouve

$$\mathbf{V} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{T}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \mathbf{f}),$$

et on en déduit  $\mathcal{Q}[\mathbf{f}]$  par (40). Ce sont là exactement les opérations qui conduisent de  $\mathbf{f}_j^{PA}$  à  $\mathbf{f}_{j+1}$ .]

Le même algorithme, dans le cas associé, pour lequel  $\mathcal{P}$  est un projecteur orthogonal au sens de la même norme (35) que  $\mathcal{Q}$ , permet de retrouver la propriété que si le chargement est supportable (c'est-à-dire si  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ ), alors on trouvera effectivement une solution au problème élastoplastique, quelle que soit l'histoire du chargement. En effet il s'agit alors de projeter orthogonalement alternativement sur deux parties convexes fermées d'un espace de dimension finie, et la suite obtenue doit converger vers un élément de leur intersection  $\mathcal{S}$  si elle n'est pas vide.

Il n'en est pas de même avec la loi de glissement non-associée, car le déviateur maximal que l'on atteint est strictement inférieur au résultat du calcul associé, comme le montre la figure 8 : le déviateur maximal atteint en régime I est voisin de  $0,8P$  dans le calcul non associé et supérieur à  $1,3P$  dans le calcul associé. Dans la mise en œuvre de la méthode quasi-statique, on doit prendre en compte l'ouverture des contacts. En fait on peut le faire dans le cadre itératif de l'algorithme décrit ci-dessus, en gardant la matrice de raideur initiale et en faisant intervenir des forces auxiliaires pour corriger l'effet de l'annulation de certains blocs  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}_{ij}$ .

### 5.3 Illustration : régimes I et II en compression biaxiale

La méthode quasi-statique permet de calculer l'évolution du système sous le trajet de chargement biaxial jusqu'à une certaine valeur  $q_1$  du déviateur, qui borne l'intervalle de déformation de type I et vaut environ  $0,815P$  dans l'étude de [1], qui porte sur la compression triaxiale de systèmes de disques polydispersés assemblés initialement dans une configuration très dense (en fixant  $\mu = 0$  pendant l'assemblage, cf. le chapitre 8 de cet ouvrage), avec une grande raideur de contact ( $K_N/P = 10^5$ ) et un coefficient de frottement  $\mu = 0,25$ .  $q_1$  ne diminue pas lorsque  $N$  augmente (à la différence de l'intervalle de stabilité des réseaux de contact entre grains rigides non frottants [28, 2]). Il semble, au contraire augmenter légèrement (les résultats sont compatibles avec un effet de taille finie en  $-(2,12)/\sqrt{N}$ ). Il est montré par ailleurs dans [1] que  $q_1$  est indépendant de la raideur (si elle est assez grande, d'ordre  $10^4$ ) et du rapport  $K_T/K_N$ . On observe par ailleurs qu'une proportion finie de contacts adopte le statut glissant (jusqu'à 20% dans [1]) et que 5 à 10% des contacts sont perdus. À noter que dans l'approche statique, aucune vibration « parasite » ne vient brouiller la distinction entre contacts glissants et non glissants.

$q_1$  reste nettement inférieure au maximum de déviateur,  $q_{\text{max}}$ , d'où un régime de déformation par réarrangements (type II) pour  $q_1 \leq q \leq q_{\text{max}}$ . La figure 9 illustre ces deux phases du

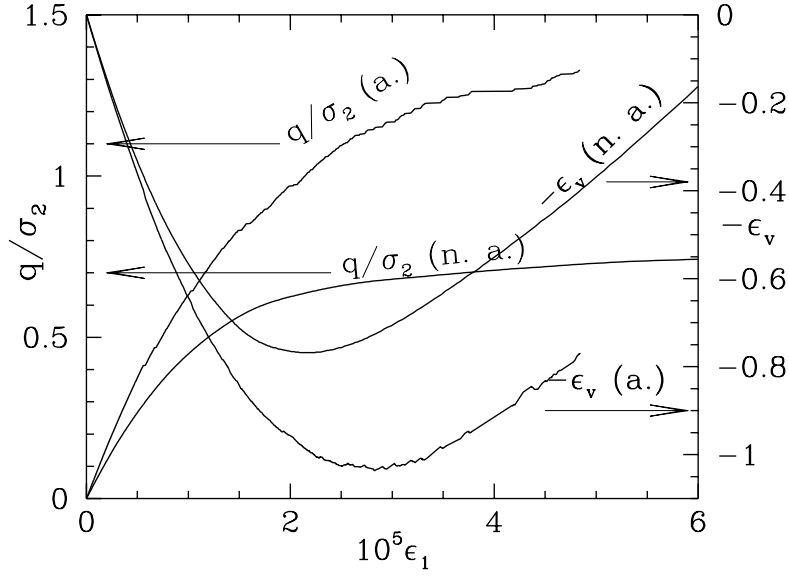


FIGURE 8 – Comparaison des régimes de chargement supporté en déformation strictement quasi-statique, pour la loi de contact habituelle, non associée (courbes marquées « n. a. ») et pour une loi de glissement associée (courbes marquées « a. »).

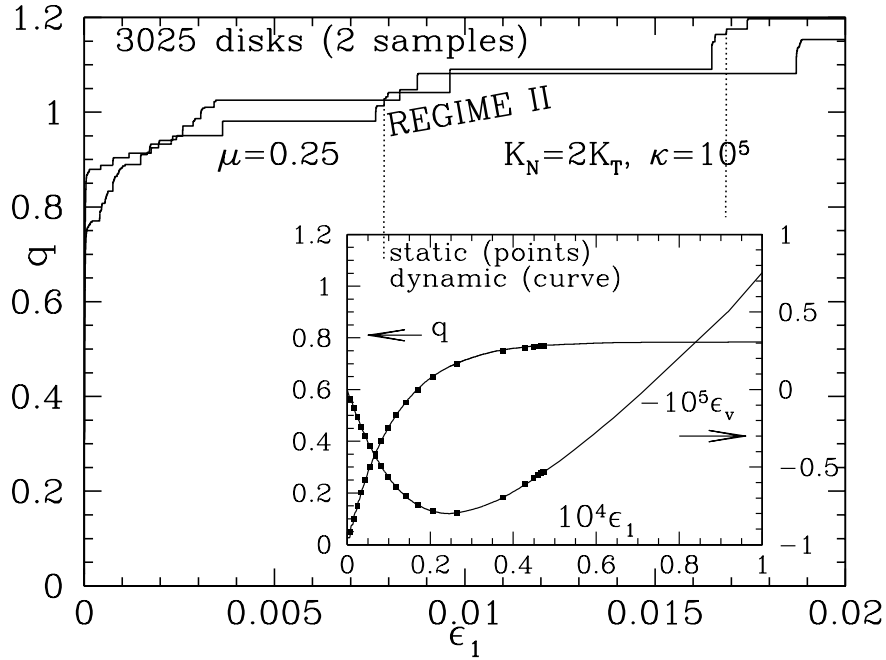


FIGURE 9 – Déviateur  $q$  en fonction de la déformation « axiale » dans un essai biaxial 2D simulé à contraintes contrôlées par petits paliers. En insert (noter la dilatation des échelles de déformation) on montre l'intervalle  $q \leq q_1$  en régime I, et on compare les calculs avec la méthode quasi-statique avec les résultats de simulation dynamique.

comportement dans une compression biaxiale monotone. Elle représente le résultat de calculs par dynamique moléculaire à contrainte contrôlée, en imposant des pas de déviateur  $\Delta q = 10^{-3}P$ , puis en attendant l'équilibre pour chaque valeur de  $q$  avant de l'incrémenter à nouveau. Lorsque le réseau initial des contacts reste stable, on a des déformations de type I d'ordre  $K_N^{-1}$ , comme

les déformations élastiques, et si faibles que la courbe se confond avec l'axe des ordonnées sur le graphe. En dilatant l'échelle des déformations (en insert sur la figure), on voit que dans ce régime les calculs en dynamique moléculaire et par la méthode quasi-statique sont en excellent accord. Au-delà de  $q_1$ , on observe une courbe  $q(\epsilon_1)$  en forme d'escalier. Dans les phases de stabilité (parties d'allure verticale) la déformation est à nouveau de type I et d'ordre  $K_N^{-1}$ . On a pu vérifier qu'un calcul par la méthode quasi-statique était possible. Dans les phases de réarrangement (parties horizontales), le système se déforme par rupture du réseau des contacts jusqu'à ce qu'un nouveau réseau apparaisse et soit capable de supporter le déviateur appliqué. À la différence des déformations de type I, l'amplitude de ces événements de rupture n'est pas liée à la raideur des contacts. Les déformations (de type II) qui en résultent sont analogues aux déformations que l'on observe avec des modèles de grains rigides, comme en dynamique des contacts (voir le chapitre 3 de ce traité). La sensibilité au niveau de raideur est d'ailleurs un moyen de détecter le type de déformation – voir à ce propos la discussion de l'influence du niveau de raideur sur le comportement quasi-statique au chapitre 9. Un autre moyen d'identifier, au moins approximativement, la nature (I ou II) des déformations est de tester jusqu'où il est possible, dans un calcul dynamique, de simuler, par exemple, un test biaxial ou triaxial, lorsque l'on ne crée aucun contact nouveau : on éprouve alors la stabilité du réseau initial. Le résultat de tels calculs est montré sur la figure 5 : l'intervalle de déviateur en régime I s'étend environ jusqu'à  $q = 0,2\sigma_3$  pour le système initialement le moins coordonné, et jusqu'à  $q \simeq 1,1\sigma_3$  pour l'assemblage de coordination plus élevée. Il est naturel qu'un réseau de contacts mieux connecté soit capable de supporter un intervalle de contraintes macroscopiques plus étendu.

À ce jour nous ne disposons pas d'analyse précise des mécanismes de rupture des réseaux de contact pour  $q = q_1$ . C'est une perspective prometteuse dans l'étude fine des mécanismes de déformation des assemblages granulaires (à rapprocher d'autres matériaux amorphes).

## 6 Conclusion

Quoique loin de concurrencer les méthodes dynamiques, polyvalentes et d'emploi plus facile, les approches quasi-statiques, fondées sur la construction de matrices de raideur, sont de précieux outils d'analyse des assemblages granulaires solides, à l'équilibre ou en déformation quasi-statique. D'un point de vue pratique, la construction de ces matrices fournit des moyens commodes pour juger de la stabilité des configurations d'équilibre et pour évaluer leurs propriétés élastiques. L'étude des matrices de rigidité et de raideur met en lumière les influences des différentes données géométriques et mécaniques et fournit d'utiles indications sur le nombre de coordination. Hors du petit domaine de réponse approximativement élastique, l'approche quasi-statique montre l'existence de deux régimes de comportement caractérisés par des origines physiques distinctes de la déformation macroscopique et des sensibilités différentes aux paramètres micromécaniques. Encore assez embryonnaire, l'usage de l'approche quasi-statique et des matrices de raideur devrait trouver des applications fructueuses dans les études précises des mécanismes de déformation des assemblages granulaires par instabilité, rupture et réarrangement à l'échelle microscopique. Comment se comporte la distinction entre régimes I et II dans la limite des grands systèmes et dans la limite des grains rigides ? Avec des grains frottants de forme non sphérique, existe-t-il des mécanismes stables, sources de « modes mous » dans le spectre de vibration ? Quelle est l'allure à grande échelle des champs de déplacements lors du déclenchement de la rupture ? Comment le processus de déformation par rupture dépend-il de la forme des grains ? Telles sont certaines des questions assez fondamentales que le développement des méthodes quasi-statiques devrait permettre de clarifier.



## Références

- [1] G. Combe. *Mécanique des matériaux granulaires et origines microscopiques de la déformation*, volume SI8 of *Études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2002.
- [2] J.-N. Roux and G. Combe. Quasistatic rheology and the origins of strain. *Comptes Rendus Physique*, 3 :131–140, 2002.
- [3] G. Combe and J.-N. Roux. Discrete numerical simulations, quasistatic deformation and the origins of strain in granular materials. In di Benedetto et al. [34], pages 1071–1078.
- [4] T Kaneko, K Terada, T. Kyoya, and Y. Kishino. Global-local analysis of granular media in quasistatic equilibrium. *Int. J. Solid Struct.*, 40(15) :4043–4069, 2003.
- [5] S. McNamara, R. García Rojo, and H. J. Herrmann. Indeterminacy and the onset of motion in a simple granular packing. *Phys. Rev. E*, 72 :021304, 2005.
- [6] M. F. Thorpe and P. M. Duxbury, editors. *Rigidity Theory and Applications*, Fundamental Materials Research. Kluwer Academic, 1998.
- [7] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. iii. elastic properties. *Phys. Rev. E*, 76(6) :061304, 2007.
- [8] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [9] D. Elata and J. G. Berryman. Contact force-displacement laws and the mechanical behavior of random packs of identical spheres. *Mechanics of Materials*, 24 :229–240, 1996.
- [10] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. I. Assembling process, geometry, and contact networks. *Phys. Rev. E*, 76(6) :061302, 2007.
- [11] M. R. Kuhn and C. S. Chang. Stability, Bifurcation and Softening in Discrete Systems : A Conceptual Approach for Granular Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6026–6051, 2006.
- [12] K. Bagi. On the Concept of Jammed Configurations from a Structural Mechanics Perspective. *Granular Matter*, 9 :109–134, 2007.
- [13] S. McNamara and H. J. Herrmann. Quasirigidity : some uniqueness issues. *Phys. Rev. E*, 74 :061303, 2006.
- [14] A. Donev, S. Torquato, and F. H. Stillinger. Pair correlation function characteristics of nearly jammed disordered and ordered hard-sphere solids. *PRE*, 71(1) :011105–1–011105–14, 2005.
- [15] E. Somfai, J.-N. Roux, J. H. Snoeijer, M. van Hecke, and W. van Saarloos. Elastic wave propagation in confined granular systems. *Phys. Rev. E*, 72 :021301, 2005.
- [16] Ellák Somfai, Martin van Hecke, Wouter G. Ellenbroek, Kostya Shundyak, and Wim van Saarloos. Critical and noncritical jamming of frictional grains. *Phys. Rev. E*, 75(2) :020301(R), 2007.
- [17] K. Iwashita and M. Oda. Rotational resistance at contacts in the simulation of shear band development by dem. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 124 :285–292, 1998.
- [18] N. Estrada, A. Taboada, and F. Radjaï. Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance. *Phys. Rev. E*, 78 :021301, 2008.
- [19] A. Tordesillas and D. C. Stuart. Incorporating rolling resistance and contact anisotropy in micromechanical models of granular media. *Powder Technology*, 124 :106–111, 2002.
- [20] F. A. Gilabert, J.-N. Roux, and A. Castellanos. Computer simulation of model cohesive powders : Influence of assembling procedure and contact laws on low consolidation states. *Phys. Rev. E*, 75(1) :011303, 2007.

- [21] C. Voivret. *Texture et comportement des matériaux granulaires à grande polydispersité*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2008.
- [22] C. S. O'Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, and S. R. Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Phys. Rev. E*, 68(1) :011306, 2003.
- [23] A. Donev, R. Connelly, F. H. Stillinger, and S. Torquato. Hypostatic Jammed Packings of Nonspherical Hard Particles : Ellipses and Ellipsoids. *Phys. Rev. E*, 75 :051304, 2007.
- [24] C. F. Moukarzel. Isostatic phase transition and instability in stiff granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1634, 1998.
- [25] A.V. Tkachenko and T. A Witten. Stress propagation through frictionless granular material. *Phys. Rev. E*, 60 :627, 1999.
- [26] J.-N. Roux. Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Phys. Rev. E*, 61 :6802–6836, 2000.
- [27] C. F. Moukarzel. Isostaticity in granular matter. *Granular Matter*, 3 :41–52, 2001.
- [28] G. Combe and J.-N. Roux. Strain versus stress in a model granular material : a devil's staircase. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3628–3631, 2000.
- [29] S. Emam, J. Canou, A. Corfdir, J.-C. Dupla, and J.-N. Roux. élaboration et comportement mécanique de matériaux granulaires solides modèles : expériences et simulations numériques. In B. Cazacliu and J.-N. Roux, editors, *Rhéologie des pâtes et des matériaux granulaires*, volume SI12 of *Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, pages 105–145, Paris, 2006. Presses du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées.
- [30] I. Vardoulakis and J. Sulem. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional, 1995.
- [31] M. Wyart. On the rigidity of amorphous solids. *Annales de Physique Fr.*, 30 :1–96, 2006.
- [32] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1993.
- [33] H. Geoffroy, H. di Benedetto, A. Duttine, and C. Sauzéat. Dynamic and cyclic loadings on sands : results and modelling for general stress-strain conditions. In di Benedetto et al. [34], pages 353–363.
- [34] H. di Benedetto, T. Doanh, H. Geoffroy, and C. Sauzéat, editors. *Deformation characteristics of geomaterials*, Lisse, 2003. Swets and Zeitlinger.