Degrés d'homogénéité de l'ensemble des intersections complètes singulières

Olivier BENOIST

Table des matières

1 Introduction

On travaille sur un corps de base K, qui sera souvent sous-entendu. Par exemple, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N_K$.

Une formule classique de Boole montre que, si K est de caractéristique 0, l'ensemble des hypersurfaces singulières de degré d dans $\mathbb{P}^N$ est un diviseur de degré $(N+1)(d-1)^N$ dans l'espace projectif de toutes les hypersurfaces. On obtient ici des formules analogues pour des intersections complètes de codimension et de degrés quelconques dans $\mathbb{P}^N$, en toute caractéristique.

1.1 Énoncé du théorème principal

On fixe $1 \leq c \leq N+1$ et $1 \leq d_1, \ldots, d_c$ des entiers. On notera $e_i = d_i - 1$. On va s'intéresser aux intersections complètes de codimension c dans $\mathbb{P}^N$, solutions d'équations homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_c$: on notera $n = N - c$ leur dimension.

Pour cela, on considère $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq c} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_i))$. Les éléments de V sont la donnée de c polynômes homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_c$ en $N+1$ variables $X_0, \ldots, X_N$. Soit D le fermé de V constitué des $(F_1, \ldots, F_c)$ tels que $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$ ne soit pas lisse de codimension c dans $\mathbb{P}^N$. On le munit de sa structure réduite. Par le lemme 3.2, la variété D est irréductible. Notons Δ une de ses équations (par convention, $\Delta = 1$ si $\mathrm{codim}_V(D) > 1$). On appellera D le lieu discriminant et Δ le discriminant.

Remarque 1.1. Les lemmes 4.4 et 4.6, au vu du corollaire 3.3, montreront que $\mathrm{codim}_V(D) > 1$ exactement quand $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$.

Le discriminant est visiblement homogène en les coefficients de chacune des équations F_i. Le but de ce texte est de calculer ces degrés d'homogénéité partiels. Soyons plus précis.

Plusieurs transformations de V laissent D invariant. C'est le cas des actions ρ et ρ_i de $\mathbb{G}_m$ et ρ' de GL_{N+1} décrites ci-dessous :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &: (F_1, \ldots, F_c) \mapsto (\lambda F_1, \ldots, \lambda F_c) \\ \rho_i(\lambda) &: (F_1, \ldots, F_c) \mapsto (F_1, \ldots, F_{i-1}, \lambda F_i, F_{i+1}, \ldots, F_c) \\ \rho'(M) &: (F_1, \ldots, F_c) \mapsto (F_1 \circ M^{-1}, \ldots, F_c \circ M^{-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Les actions duales induites sur $\mathrm{Sym}^\bullet V^*$ préservent la droite $\langle \Delta \rangle$. Ces actions sur $\langle \Delta \rangle$ se font via un caractère du groupe. Il existe donc des entiers deg, $\deg_i$ et $\deg_{var}$ tels que

$$\begin{aligned} \rho(\lambda).\Delta &= \lambda^{-\deg} \Delta \\ \rho_i(\lambda).\Delta &= \lambda^{-\deg_i} \Delta \\ \rho'(M).\Delta &= \det(M)^{\deg_{var}} \Delta. \end{aligned} \tag{2}$$

Par exemple, deg est le degré total du polynôme homogène Δ. Les autres nombres s'interprètent comme des degrés d'homogénéité partiels. Les identités

$\rho(\lambda) = \rho_1(\lambda) \circ \ldots \circ \rho_c(\lambda)$ et $\rho'(\lambda^{-1} \operatorname{Id}) = \rho_1(\lambda)^{\circ d_1} \circ \ldots \circ \rho_c(\lambda)^{\circ d_c}$ montrent qu'ils sont liés par les relations :

$$\deg = \sum_{i=1}^{c} \deg_i \tag{3}$$

$$(N+1) \deg_{var} = \sum_{i=1}^{c} d_i \deg_i \tag{4}$$

Le résultat principal de ce texte est le suivant :

Théorème 1.2. *On a les égalités suivantes :*

$$\deg_i = \frac{1}{\mu} d_1 \ldots \hat{d_i} \ldots d_c \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right) \tag{5}$$

$$\deg_{var} = \frac{1}{\mu} d_1 \ldots d_c \sum_{l=1}^{c} \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \tag{6}$$

où $\mu = 1$ si K n'est pas de caractéristique 2 ou si n est impair, et $\mu = 2$ si K est de caractéristique 2 et n est pair.

Remarque 1.3. Il faut interpréter cet énoncé, comme tous les énoncés similaires de ce texte, de la manière suivante : le terme de gauche est une fonction polynômiale en les d_l dont le polynôme est donné par le terme de droite. Que le terme de droite soit un polynôme en les d_l est conséquence du lemme 3.6 (i).

Remarque 1.4. Dans l'égalité (5), il faut interpréter $\frac{e_i^{N+1} - e_i^{N+1}}{e_i - e_i}$ comme une notation pour le polynôme $(N+1)e_i^N$.

Remarque 1.5. Par (3), on peut également calculer deg. Cependant, on ne peut simplifier avantageusement l'expression obtenue. Même pour $c = 2$, l'exemple 1.10 montre que la formule pour deg est nettement moins élégante que celles pour $\deg_{var}$, $\deg_1$ et $\deg_2$.

On déduira de ce théorème le résultat qui suit :

Théorème 1.6. *Soit $K = \mathbb{Q}$, de sorte qu'on peut considérer le discriminant Δ comme un polynôme irréductible à coefficients entiers. Soit p un nombre premier. Alors la réduction modulo p de Δ est irréductible si $p \neq 2$ ou si n est impair. C'est le carré d'un polynôme irréductible si $p = 2$ et n est pair.*

1.2 Quelques exemples

On commence par illustrer le théorème 1.2. On suppose pour simplifier que $\mu = 1$. Par exemple, on peut prendre K de caractéristique différente de 2.

Exemple 1.7. Quand $c = 1$, D est l'ensemble des équations d'hypersurfaces singulières de degré d_1 dans $\mathbb{P}^N$: Δ est donc le discriminant usuel. Les formules (5) et (6) montrent qu'on a alors :

$$\begin{aligned} \deg_1 &= (N+1)e_1^N \\ \deg_{var} &= e_1^N. \end{aligned}$$

On retrouve la formule classique de Boole, qu'on pourra par exemple trouver dans [3] Chap.1, 4.15 et Chap.9, 2.10a.

Exemple 1.8. Quand $c = N+1$, D est l'ensemble des $N+1$-uplets d'équations homogènes admettant une solution commune dans $\mathbb{P}^N$: Δ est donc le résultant usuel.

Pour évaluer la formule (5) dans ce cas, on peut remarquer que la quantité $\sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right)$ est un polynôme de degré 0 en les d_j, c'est-à-dire une constante. Pour la calculer, on peut faire par exemple $d_j = j$, de sorte que $\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'}) = (-1)^{N+1-l}(l-1)!(N+1-l)!$. L'expression obtenue s'évalue facilement à l'aide de la formule du binôme. Tous calculs faits, cette constante vaut 1, et on obtient :

$$\begin{aligned} \deg_i &= d_1 \dots \hat{d_i} \dots d_{N+1} \\ \deg_{var} &= d_1 \dots d_{N+1}. \end{aligned}$$

Là encore, ces formules sont classiques. On peut les trouver dans [3] Chap.13, 1.1.

Exemple 1.9. Quand $d_1 = \ldots = d_c = d$, D est l'ensemble des systèmes linéaires de degré d et de dimension $c-1$ dont le lieu de base est singulier.

Dans ce cas particulier également, les formules générales se simplifient nettement. Comme, par symétrie, tous les $\deg_i$ sont égaux, il suffit par (4) et (3) de calculer $\deg_{var}$. Dans l'expression (6), $\sum_{l=1}^{c} \frac{e_l^N}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})}$ est un polynôme homogène de degré $N-c+1$ en les e_j. Par conséquent, $\deg_{var} = \lambda d^c e^{N-c+1}$ où λ est une constante à calculer. On évalue cette constante en faisant $d_l = l\varepsilon$ dans le polynôme $\sum_{l=1}^{c} \frac{e_l^N}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})}$, en calculant cette quantité à l'aide de la formule du binôme, puis en faisant tendre ε vers 0. Tous calculs faits,

$$\begin{aligned} \deg_i &= \binom{N+1}{c} d^{c-1}(d-1)^{N-c+1} \\ \deg_{var} &= \binom{N}{c-1} d^c (d-1)^{N-c+1}. \end{aligned}$$

Ces formules auraient aussi pu être obtenues à l'aide de résultats de [3], par exemple de Chap.13, 2.5.

Supposons de plus $d = 1$ et $c < N+1$. Les degrés s'annulent : cela correspond aux cas où D est de codimension > 1 dans V (voir la remarque 1.1).

Supposons enfin $d = 1$ et $c = N+1$, le polynôme Δ est le déterminant usuel d'une matrice de taille $N+1$; on retrouve son degré total $\deg = N+1$.

Exemple 1.10. Spécialisons maintenant les formules (5) et (6) au cas d'intersections complètes de codimension 2, c'est-à-dire $c = 2$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\deg_1 &= d_2(e_2^{N+1} + 2e_1e_2^N + \ldots + Ne_1^{N-1}) \\
\deg_2 &= d_1(e_1^{N+1} + 2e_2e_1^N + \ldots + Ne_2^{N-1}) \\
\deg_{var} &= d_1d_2\frac{e_2^N - e_1^N}{e_2 - e_1}.
\end{aligned}$$

Illustrons enfin le théorème 1.6 en explicitant un cas particulier classique :

Exemple 1.11. Quand $N = 1$ et $c = 1$, Δ est le discriminant usuel d'un polynôme en une variable, vu comme un polynôme homogène en deux variables. Sa description classique en fonction des racines de ce polynôme (voir par exemple [7] 1.3.2) montre que ce polynôme est irréductible en caractéristique différente de 2, et le carré d'un polynôme irréductible en caractéristique 2. Comme $n = 0$ est pair, c'est ce que prédit le théorème 1.6.

Signalons le cas particulier bien connu où $d = 2$. Le discriminant du polynôme $aX^2 + bX + c$ est $b^2 - 4ac$. C'est toujours irréductible, sauf en caractéristique 2, b^2 étant visiblement un carré.

1.3 Stratégie de la démonstration

Dans la preuve du théorème 1.2, on peut, quitte à le remplacer par une clôture algébrique, choisir K algébriquement clos. On commence de plus par supposer K de caractéristique 0.

La proposition 3.1 permet d'interpréter D comme la variété duale d'une variété torique lisse convenable. Dans leur livre [3], Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont étudié ces variétés ; ils obtiennent notamment une formule combinatoire permettant de calculer le degré de la variété duale d'une variété torique lisse ([3] Chap.9, 2.8).

Dans la deuxième partie de ce texte, on généralise cet énoncé pour obtenir une formule analogue calculant des degrés d'homogénéité partiels : c'est l'objet du théorème 2.3. On utilise de manière cruciale les résultats de [3].

Dans la troisième partie de ce texte, on démontre le théorème 1.2 en caractéristique 0 en évaluant cette formule dans notre cas particulier. Les calculs sont menés dans les propositions 3.9 et 3.10.

Finalement, on explique dans la quatrième partie les modifications à apporter à la preuve du théorème 1.2 pour qu'elle fonctionne en toute caractéristique.

Le seul obstacle que l'on rencontre sont les spécificités de la théorie de la dualité projective en caractéristique finie, qui ont été étudiées tout d'abord par Wallace [8], et au sujet desquelles on pourra consulter le survey [4] de Kleiman. Elles ont pour conséquence que le résultat de [3] que nous utilisons a besoin d'être légèrement modifié pour valoir en caractéristique finie. Cette modification effectuée, la preuve est identique.

Il convient de remarquer que si ces arguments supplémentaires sont indispensables en toute caractéristique finie, le théorème 1.2 ne voit son énoncé modifié qu'en caractéristique 2.

Enfin, le théorème 1.6 se déduit aisément du théorème 1.2.

2 Duale d'une variété torique

Dans cette partie, K est supposé algébriquement clos de caractéristique 0.

L'objectif est de montrer le théorème 2.3. Étant donnée une variété torique projective lisse, on calcule combinatoirement l'action du tore sur l'équation de sa variété duale.

2.1 Notations

On commence par fixer des notations.

Soit $0 \to \mathbb{G}_m \to \tilde{T} \to T \to 0$ une suite exacte courte de tores, $\tilde{T}$ étant de dimension $k \geq 1$ et T de dimension $k-1$. Soit $0 \to \mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(\tilde{T}) \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \to 0$ la suite exacte courte de leurs groupes de caractères. On notera $\mathfrak{X}_1 = h^{-1}(1)$: c'est un espace principal homogène sous $\mathfrak{X}(T)$.

Soit $A = \{\chi_1, \ldots, \chi_{|A|}\} \subset \mathfrak{X}_1$ un sous-ensemble fini engendrant $\mathfrak{X}_1$ comme espace affine. On notera $\tilde{X}_A \subset (K^A)^*$ la variété torique affine de tore $\tilde{T}$ associée. C'est, par définition, l'adhérence des $(\chi_1(t), \ldots, \chi_{|A|}(t))$, $t \in \tilde{T}$. La variété $\tilde{X}_A$ est un cône ; on peut considérer son projectivisé $X_A \subset \mathbb{P}((K^A)^*)$ qui est une variété torique projective de tore T. Le polytope correspondant est l'enveloppe convexe Q de A dans $\mathfrak{X}_{1,\mathbb{R}} = \mathfrak{X}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Notons $X_A^\vee \subset \mathbb{P}(K^A)$ la variété duale de X_A munie de sa structure réduite et $\tilde{X}_A^\vee \subset K^A$ son cône affine. On note Δ_A une équation homogène de $X_A^\vee$ (par convention, $\Delta_A = 1$ si X_A est défective, c'est-à-dire si $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}(K^A)}(X_A^\vee) > 1$). Le tore $\tilde{T}$ agit sur $(K^A)^*$ en préservant $\tilde{X}_A$. Par conséquent, l'action duale $t \cdot \sum c_a \chi_a \mapsto \sum c_a \chi_a^{-1}(t) \chi_a$ de $\tilde{T}$ sur K^A préserve $\tilde{X}_A^\vee$. L'action induite de $\tilde{T}$ sur $\mathrm{Sym}^\bullet(K^A)^*$ préserve donc la droite $\langle \Delta_A \rangle$; cette action se fait via un caractère de $\tilde{T}$ que l'on notera Ξ_A : $t \cdot \Delta_A = \Xi_A(t) \Delta_A$. Ainsi, on a :

$$\Delta_A\left(\sum c_a \chi_a(t) \chi_a\right) = \Xi_A(t) \Delta_A\left(\sum c_a \chi_a\right). \tag{7}$$

En spécialisant cette identité à des sous-groupes à un paramètre convenables, on peut calculer les degrés d'homogénéité partiels de Δ_A. Par exemple, en spécialisant au sous-groupe à un paramètre correspondant au cocaractère h, il vient $\Delta_A(\lambda f) = \lambda^{h(\Xi_A)} \Delta_A(f)$ pour tout $f \in K^A$, soit

$$\deg(\Delta_A) = h(\Xi_A).$$

2.2 Équation de la duale

Le théorème [3] Chap. 9, 2.8 dû à Gelfand, Kapranov et Zelevinsky permet de calculer $\deg(\Delta_A) = h(\Xi_A)$ en fonction du polytope Q si X_A est lisse. Nous allons généraliser cet énoncé en obtenant une formule pour Ξ_A. La démonstration est très proche de celle de [3], et utilise à fond les résultats de ce livre. En particulier, elle repose sur une formule pour Δ_A que nous rappelons dans ce paragraphe.

Si Γ est une face de Q, on considèrera $\tilde{\Gamma}$ le cône sur Γ de sommet 0 dans $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{R}}$, Γ^0 et $\tilde{\Gamma}^0$ leurs intérieurs relatifs, $\Gamma_{\mathbb{R}}$ et $\Gamma_{\mathbb{C}}$ les sous-espaces affines réels et complexes de $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{C}}$ engendrés par Γ, ainsi que $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}}$ les sous-espaces vectoriels réels et complexes de $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{X}(\tilde{T})_{\mathbb{C}}$ engendrés par $\tilde{\Gamma}$. L'espace affine $\Gamma_{\mathbb{R}}$ est muni du réseau naturel $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{X}_1(T)$; on notera μ_Γ la mesure de Lebesgue sur $\Gamma_{\mathbb{R}}$ normalisée de sorte à ce que le simplexe unité soit de mesure 1.

On note S le semi-groupe de $\mathfrak{X}(\tilde{T})$ engendré par A. Si $u \in S$, on note $\tilde{\Gamma}(u)$ la plus petite face de $\tilde{Q}$ contenant u. Si $l \geq 0$, on notera S_l (resp. $\tilde{\Gamma}_l$) l'ensemble des $u \in S$ (resp. des $u \in \tilde{\Gamma}$) tels que $h(u) = l$. Gardons en mémoire que :

$$S_l = \tilde{Q}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T}) \text{ pour } l \gg 0. \tag{8}$$

En effet c'est la traduction combinatoire de la surjectivité de l'application de restriction $H^0(\mathbb{P}((K^A)^*), \mathcal{O}(l)) \to H^0(X_A, \mathcal{O}(l))$, elle-même conséquence du théorème d'annulation de Serre.

On pose :

$$C^i(A, l) = \bigoplus_{u \in S_{i+l}} \bigwedge^i (\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{C}}).$$

Si $f = \sum c_a \chi_a \in K^A$, on définit des applications liéaires

$$\begin{aligned} \partial_f : C^i(A,l) &\to C^{i+1}(A,l) \\ (u, \omega) &\mapsto -\sum c_a(u + \chi_a, \chi_a \wedge \omega), \end{aligned}$$

de sorte que $(C^\bullet(A,l), \partial_f)$ soit un complexe. Soit de plus $e = (e(i))$ la donnée de bases de chacun des $C^i(A,l)$.

Théorème 2.1 ([3] Chap.9, 2.7)**.** *On suppose X_A lisse. Alors, si $l \gg 0$, on a*

$$\Delta_A(f) = \det(C^\bullet(A,l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

où chacun des deux termes est bien défini à une constante multiplicative non nulle près.

Pour la définition du déterminant d'un complexe exact muni de bases, on renvoie à [3] App.A. On rappelle seulement ci-dessous la proposition facile [3] App.A 9, car nous en aurons besoin pour la suite, et que les signes sont malheureusement faux dans [3].

Proposition 2.2. *Soit $(W^\bullet, d)$ un complexe exact, et $e = (e(i))$, $e' = (e'(i))$ deux jeux de bases.*

Soient $M(i)$ les matrices de transition : $e(i)_p = \sum_{q=1}^{\dim W_i} M(i)_{p,q} e'(i)_q$. Alors,

$$\det(W^\bullet, d, e') = \det(W^\bullet, d, e) \prod_i \det(M(i))^{(-1)^i}.$$

2.3 Action du tore

Énonçons enfin la formule pour Ξ_A et démontrons-la.

Théorème 2.3.

$$\Xi_A = \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\mathrm{codim}(\Gamma)}(\dim(\Gamma)+1)\int_\Gamma u d\mu_\Gamma(u).$$

Preuve. Soit $t \in \tilde{T}$. On introduit les applications linéaires :

$$\begin{aligned} g_t^{i,l} : C^i(A,l) &\to C^i(A,l) \\ (u,\omega) &\mapsto u(t)(u,\omega). \end{aligned} \tag{9}$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C^i(A,l) \arrow[r, "\partial_f"] \arrow[d, "g_t^{i,l}"'] & C^{i+1}(A,l) \arrow[d, "g_t^{i+1,l}"'] \\ C^i(A,l) \arrow[r, "\partial_{t^{-1}\cdot f}"] & C^{i+1}(A,l) \end{tikzcd}$$

de sorte que $g_t^{\bullet,l} : (C^\bullet(A,l),\partial_f) \to (C^\bullet(A,l),\partial_{t^{-1}\cdot f})$ est un morphisme de complexes. Par la proposition 2.2, notant $(e'(i)) = (g_t^{i,l})^{-1}(e(i))$, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(C^\bullet(A,l),\partial_{t^{-1}\cdot f}, e) &= \det(C^\bullet(A,l),\partial_f, e') \\ &= \det(C^\bullet(A,l),\partial_f, e)\prod_i \det(g_t^{i,l})^{(-1)^i}. \end{aligned}$$

Par le théorème 2.1, ceci se réécrit :

$$\Delta_A(t^{-1}\cdot f)^{(-1)^k} = \Delta_A(f)^{(-1)^k}\prod_i \det(g_t^{i,l})^{(-1)^i} \text{ pour } l \gg 0.$$

La définition (7) de Ξ_A montre alors que :

$$\Xi_A(t) = \prod_{i\geq 0}\det(g_t^{i,l})^{(-1)^{i+k}} \text{ pour } l \gg 0.$$

Utilisant la définition (9) de $g_t^{i,l}$, on calcule alors :

$$\Xi_A(t) = \prod_{i\geq 0}\prod_{u\in S_{i+l}} u(t)^{(-1)^{i+k}\dim \bigwedge^i(\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{R}})} \text{ pour } l \gg 0,$$

ce qui se réécrit :

$$\Xi_A = \sum_{i\geq 0}\sum_{u\in S_{i+l}} (-1)^{i+k}\dim \bigwedge^i(\tilde{\Gamma}(u)_{\mathbb{R}})\cdot u \text{ pour } l \gg 0.$$

On change alors l'ordre de sommation en regroupant les u suivant la plus grande face de $\tilde{Q}$ à laquelle ils appartiennent. En prenant de plus (8) en compte, on obtient :

$$\Xi_A = \sum_{\Gamma \subset Q} \sum_{i \geq 0} (-1)^{i+k} \binom{\dim(\Gamma)+1}{i} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}^0_{i+l} \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u \text{ pour } l \gg 0.$$

Appliquant alors les lemmes 2.5 et 2.4, il vient :

$$\begin{aligned}\Xi_A &= \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\dim(\Gamma)+1+k} (\dim(\Gamma)+1) \int_\Gamma u d\mu_\Gamma(u) \\ &= \sum_{\Gamma \subset Q} (-1)^{\operatorname{codim}(\Gamma)} (\dim(\Gamma)+1) \int_\Gamma u d\mu_\Gamma(u).\end{aligned}$$

□

Le lemme ci-dessous est connu et est par exemple conséquence de [1] 4.5. Cependant, en l'absence de référence où il apparaît sous une forme directement utilisable, j'en donne une preuve rapide utilisant la polynômialité de la fonction d'Ehrhart (voir par exemple [5] 12.2).

Lemme 2.4. *Soit Γ une face de Q. Alors, pour $l \geq 0$, la fonction*

$$l \mapsto \sum_{u \in \tilde{\Gamma}^0_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u$$

est polynômiale de terme dominant $\frac{l^{\dim(\Gamma)+1}}{\dim(\Gamma)!} \int_\Gamma u d\mu_\Gamma(u)$.

Preuve. Montrons d'abord qu'il s'agit d'un polynôme de degré $\leq \dim(\Gamma)+1$ pour $l \geq 0$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de Γ et en appliquant une formule d'inclusion-exclusion pour les faces de Q incluses dans Γ, on voit qu'il suffit de montrer cette propriété pour la fonction $l \mapsto \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u$.

Il faut montrer que pour toute forme linéaire entière ψ sur $\mathfrak{X}(\tilde{T})$, l'application $P_\psi(l) = \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} \psi(u)$ est polynômiale pour $l \geq 0$. Si $\psi = h$, cette fonction est $P_h(l) = \sum_{u \in \tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} l = l \operatorname{Card}(\tilde{\Gamma}_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T}))$, soit l fois la fonction d'Erhart de Γ, et est donc polynômiale en l de degré $\leq \dim(\Gamma)+1$.

Autrement, quitte à ajouter à ψ un multiple de h, on peut supposer ψ positive sur Q. La fonction P_ψ est alors la fonction d'Ehrhart du polytope auxilliaire $\{(x,y) \in \mathbb{R} \oplus \mathfrak{X}_{1,\mathbb{R}} | y \in Q, 0 \leq x \leq \psi(y)\}$, et est donc polynômiale en l de degré $\leq \dim(\Gamma)+1$.

Il reste à calculer le coefficient dominant. C'est :

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l^{\dim(\Gamma)+1}} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}^0_l \cap \mathfrak{X}(\tilde{T})} u &= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l^{\dim(\Gamma)}} \sum_{u \in \tilde{\Gamma}^0_l \cap \frac{1}{l}\mathfrak{X}(\tilde{T})} u \\ &= \frac{1}{\dim(\Gamma)!} \int_\Gamma u d\mu_\Gamma(u),\end{aligned}$$

où l'on a identifié dans la dernière égalité une intégrale et une limite de sommes de Riemann en prenant en compte la normalisation que nous avons avons choisie : la mesure du cube unité est $\dim(\Gamma)!$. $\square$

Le lemme suivant est facile et classique :

Lemme 2.5. *Soit $N \geq 0$ et P un polynôme de degré N et de coefficient dominant a_N. Alors*

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}P(X+i) = (-1)^N N! a_N.$$

Preuve. Soit $\Phi : P(X) \mapsto P(X+1)$ l'endomorphisme de l'anneau des polynômes. Par la formule du binôme, $(\mathrm{Id}-\Phi)^N(P) = \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}P(X+i)$. C'est alors un calcul immédiat de vérifier que $(\mathrm{Id}-\Phi)$ fait baisser le degré d'un polynôme de 1 et multiplie son coefficient dominant par l'opposé de son degré. $\square$

3 Degrés d'homogénéité du discriminant

Dans toute cette partie, K est encore supposé algébriquement clos de caractéristique 0. On applique le théorème 2.3 pour démontrer le théorème principal 1.2 sous cette hypothèse.

3.1 Interprétation torique du lieu discriminant

On commence par expliquer pourquoi notre problème s'inscrit dans le cadre général décrit ci-dessus des variétés duales de variétés toriques.

Considérons le groupe abélien libre de rang $c+N+1$ engendré par $(Y_i)_{1\leq i\leq c}$ et $(X_j)_{0\leq j\leq N}$. On note α_i et β_j les applications coordonnées suivant Y_i et X_j. Soit $\mathfrak{X}(\tilde{T})$ le sous-réseau de rang $c+N$ défini par l'équation $\sum_i d_i\alpha_i = \sum_j \beta_j$. On note $h = \sum_i \alpha_i : \mathfrak{X}(\tilde{T}) \to \mathbb{Z}$, $\mathfrak{X}(T)$ son noyau qui est un groupe abélien libre de rang $k = c+N-1$, et $\mathfrak{X}_1 = h^{-1}(1)$. On a par dualité les morphismes de tores suivants :

$$(K^*)^{(c+N+1)} \to \tilde{T} \to T. \tag{10}$$

On introduit l'ensemble $A = \{Y_i X_0^{e_0}\dots X_N^{e_N}\}_{1\leq i\leq c, e_j\geq 0, \sum e_j = d_i}$ de $\mathfrak{X}_1$, qui l'engendre comme espace affine. L'espace vectoriel K^A s'identifie naturellement à $V = \bigoplus_{1\leq i\leq c} H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_i))$.

Proposition 3.1. *On a l'égalité suivante entre fermés de $V = K^A$:*

$$D = \tilde{X}_A^{\vee}.$$

Preuve. Soit H l'hyperplan de $(K^A)^*$ d'équation $f = \sum_i Y_i F_i = 0$.

$$
\begin{aligned}
&H \text{ est tangent à } \tilde{X}_A \text{ en un point de } \tilde{T} && (11)\\
&\quad \Leftrightarrow \{f = 0\} \text{ n'est pas un diviseur lisse de } \tilde{T}\\
&\quad \Leftrightarrow \{f = 0\} \text{ n'est pas un diviseur lisse de } (K^*)^{(c+N+1)}\\
&\quad \Leftrightarrow \exists (y_1, \ldots, y_c, x_0, \ldots, x_N) \in (K^*)^{(c+N+1)} \text{ tels que}\\
&\qquad F_i(x_0, \ldots, x_N) = 0 \text{ et } \sum_i y_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0, \ldots, x_N) = 0\\
&\quad \Leftrightarrow \text{ les } F_i \text{ ont un zéro commun à coordonnées non nulles en lequel leurs}\\
&\qquad \text{dérivées partielles vérifient une relation linéaire à coefficients non nuls.} && (12)
\end{aligned}
$$

Notons U le sous-ensemble de K^A constitué de ces hyperplans. Par (11) et la définition de la variété duale, son adhérence est $\tilde{X}_A^\vee$. Par (12) et le critère jacobien, $U \subset D$. Mieux : (12) et le lemme 3.2 (i) et (ii) montrent que U est dense dans D.

Par conséquent, $D = \tilde{X}_A^\vee$. □

Lemme 3.2. *La variété D est irréductible. De plus, si $(F_1, \ldots, F_c)$ est un point général de D, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *(i) La variété $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$ possède un point singulier à coordonnées toutes non nulles.*
- *(ii) Si $I \subsetneq \{1, \ldots, c\}$, la variété $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$ est lisse de codimension $|I|$.*

Preuve. Soit $Z \subset V \times \mathbb{P}^N$ le fermé constitué des $(F_1, \ldots, F_c, P)$ tels que la variété $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$ ait un espace tangent de dimension $> c$ en P. On notera $p_1 : Z \to V$ et $p_2 : Z \to \mathbb{P}^N$ les deux projections. Comme $D = p_1(Z)$, pour montrer que D est irréductible, il suffit de montrer que Z l'est. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $P \in \mathbb{P}^N$, $p_2^{-1}(P)$ est irréductible. Utilisant l'homogénéité sous PGL_{N+1}, il suffit de montrer que $p_2^{-1}([1 : 0 : \ldots : 0])$ est irréductible. En écrivant le critère jacobien en coordonnées, on voit que c'est conséquence du fait classique que l'ensemble des matrices $(N + 1) \times c$ de rang $< c$ est irréductible.

Montrons (i). L'ouvert $W \subset \mathbb{P}^N$ des points à coordonnées toutes non nulles est dense. Son image réciproque par le morphisme dominant p_2 est donc dense dans Z, et $p_1(p_2^{-1}(W))$ est dense dans $D = p_1(Z)$, ce qu'on voulait.

Montrons (ii). Par Bertini, on choisit des $(F_i)_{i \in I}$ tels que $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$ soit lisse de codimension $|I|$ dans $\mathbb{P}^N$, et on pose $F_i = 0$ si $i \notin I$. Ceci montre qu'il existe $(F_1, \ldots, F_c) \in D$ tel que $\{(F_i = 0)_{i \in I}\}$ soit lisse de codimension $|I|$. Comme D est irréductible, un point général de D vérifie cette propriété.

□

On déduit immédiatement de la proposition 3.1 le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *On a* $\operatorname{codim}_V(D) > 1$ *si et seulement si* X_A *est défective.*

On peut de plus relier les degrés d'homogénéité qu'on cherche à calculer au caractère Ξ_A.

Corollaire 3.4. *On a les relations suivantes :*

(i) $\deg = h(\Xi_A)$.

(ii) $\deg_i = \alpha_i(\Xi_A)$.

(iii) $\deg_{var} = \beta_j(\Xi_A)$.

Preuve. Montrons (ii), qui est la seule relation que nous utiliserons. Les autres se prouvent de manière analogue. On écrit, pour $f = \sum c_a \chi_a \in K^A = V$:

$$\begin{aligned}
\lambda^{\deg_i} \Delta_A(f) &= (\rho_i(\lambda^{-1}) \cdot \Delta_A)(f) && \text{par (2)} \\
&= \Delta_A(\rho_i(\lambda) \cdot f) \\
&= \Delta_A(\sum \lambda^{\alpha_i(\chi_a)} c_a \chi_a) && \text{par (1) et la définition de } \alpha_i \\
&= \lambda^{\alpha_i(\Xi_A)} \Delta_A(f) && \text{par (7).}
\end{aligned}$$

Finalement, il vient $\deg_i = \alpha_i(\Xi_A)$, ce qu'on voulait.

□

3.2 Le polytope $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$

Dans ce paragraphe, et dans ce paragraphe seulement, on prend temporairement des conventions légèrement plus générales : on autorise les d_i à être des nombres réels strictement positifs. On définit toujours $\mathfrak{X}_{1,\mathbb{R}}$ comme l'espace affine d'équations $\sum_i d_i \alpha_i = \sum_j \beta_j$ et $\sum_i \alpha_i = 1$ dans $\mathbb{R}^{c+N+1}$. On pose $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ le polytope d'inéquations $\{\alpha_i \geq 0\}_{1 \leq i \leq c}$ et $\{\beta_j \geq 0\}_{0 \leq j \leq N}$ dans $\mathfrak{X}_{1,\mathbb{R}}$. Il est de dimension $c + N - 1$.

Si $I \subset \{1, \ldots, c\}$ et $J \subset \{0, \ldots N\}$ sont des parties non vides, le sous-ensemble $\Gamma_{I,J}$ de Q défini par les équations $\{\alpha_i = 0\}_{i \notin I}$ et $\{\beta_j = 0\}_{j \notin J}$ est une face de Q isomorphe à $Q(|I|, |J| - 1, (d_i)_{i \in I})$. De plus, toutes les faces de Q sont de cette forme.

En particulier, quand les d_i sont entiers, les sommets de $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$ sont des éléments de A. Comme de plus $A \subset Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$, on voit que $Q = Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.5. *La variété torique X_A est lisse.*

Preuve. La description explicite des faces de Q obtenue ci-dessus permet de vérifier facilement le critère de lissité [6] 2.22 (iv). □

Nous allons effectuer quelques calculs d'intégrales qui seront utiles par la suite. Pour les mener, nous aurons plusieurs fois besoin de la seconde partie du lemme ci-dessous :

Lemme 3.6. *Soit $P \in \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_c][X]$. On introduit :*

$$R = \sum_{l=1}^{c} \frac{P(d_l)}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})}.$$

(i) $R \in \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_c]$.

(ii) *Si* P *est de degré* $\leq c-2$ *en* X, $R = 0$.

Preuve. On introduit $R' = \sum_{l=1}^{c} \frac{P(X_l)}{\prod_{l' \neq l}(X_l - X_{l'})} \in \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_c](X_1, \ldots, X_c)$. Multipliant par $X_{l_1} - X_{l_2}$, puis spécialisant en $X_{l_1} = X_{l_2}$, on obtient 0. Par conséquent, $R' \in \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_c][X_1, \ldots, X_c]$.

En faisant $X_l = d_l$, on montre que $R \in \mathbb{Z}[d_1, \ldots, d_c]$.

Si de plus P est de degré $\leq c-2$ en X, R' est un polynôme de degré < 0 en les X_i, et est donc nul. En faisant $X_l = d_l$, cela implique $R = 0$. $\square$

Calculons tout d'abord le volume du polytope $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})$. On rappelle notre convention d'attribuer une mesure 1 au simplexe unité.

Proposition 3.7.

$$\mu(Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})) = \sum_{l=1}^{c} \frac{d_l^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})}.$$

Preuve. On procède par récurrence sur c. Pour $c = 1$, c'est la formule du volume du simplexe de côté d_1. Si $c \geq 2$, on applique Fubini en remarquant que l'image de $Q(c-1, N, (sd_i + (1-s)d_c)_{1 \leq i \leq c-1})$ par l'application

$$(y_1, \ldots, y_c, x_0, \ldots, x_N) \mapsto ((1-s)y_1, \ldots, (1-s)y_c, x_0, \ldots, x_N)$$

est $Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c}) \cap \{\alpha_c = s\}$. Entre les espaces affines qui nous intéressent cette application est de déterminant $(1-s)^{c-2}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence. Il vient :

$$\begin{aligned}
&\mu(Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})) \\
&= (c+N-1) \int_0^1 (1-s)^{c-2} \mu(Q(c-1, N, (sd_i + (1-s)d_c)_{1 \leq i \leq c-1})) ds \\
&= \sum_{l=1}^{c-1} \int_0^1 \frac{((1-s)d_c + sd_l)^{c+N-2}}{\prod_{l' \neq l, c}(d_l - d_{l'})} ds \\
&= \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} (d_l^{c+N-1} - d_c^{c+N-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{c} \frac{d_l^{c+N-1}}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \text{ par le lemme 3.6 } (ii).
\end{aligned}$$

$\square$

Enfin, nous utiliserons dans le paragraphe suivant le calcul de l'intégrale ci-dessous :

Proposition 3.8.

$$\int_{Q(c, N, (d_i)_{1 \leq i \leq c})} \alpha_c(u) d\mu(u) = \frac{1}{(c+N)} \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{d_c^{c+N} - d_l^{c+N}}{d_c - d_l} \right).$$

Preuve. On applique Fubini comme dans le calcul précédent.

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q(c,N,(d_i)_{1\leq i\leq c})}\alpha_c(u)d\mu(u)\\
&\quad=(c+N-1)\int_0^1 s(1-s)^{c-2}\mu(Q(c-1,N,(sd_i+(1-s)d_c)_{1\leq i\leq c-1}))ds\\
&\quad=(c+N-1)\sum_{l=1}^{c-1}\int_0^1 s\frac{((1-s)d_c+sd_l)^{c+N-2}}{\prod_{l'\neq l,c}(d_l-d_{l'})}ds\\
&\quad=\sum_{l=1}^{c-1}\left[\int_0^1\frac{((1-s)d_c+sd_l)^{c+N-1}}{\prod_{l'\neq l}(d_l-d_{l'})}ds-\frac{d_c^{c+N-1}}{\prod_{l'\neq l}(d_l-d_{l'})}\right],
\end{aligned}
$$

où l'on a intégré par parties. Calculant l'intégrale du terme de gauche, et appliquant le lemme 3.6 (ii) pour sommer le terme de droite, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q(c,N,(d_i)_{1\leq i\leq c})}\alpha_c(u)d\mu(u)\\
&\quad=\frac{1}{(c+N)}\left[\sum_{l=1}^{c-1}\frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l-d_{l'})}\left(\frac{d_c^{c+N}-d_l^{c+N}}{d_c-d_l}\right)+\frac{(c+N)d_c^{c+N-1}}{\prod_{l'\neq c}(d_c-d_{l'})}\right]\\
&\quad=\frac{1}{(c+N)}\sum_{l=1}^{c}\frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l-d_{l'})}\left(\frac{d_c^{c+N}-d_l^{c+N}}{d_c-d_l}\right).
\end{aligned}
$$

□

3.3 Homogénéité en les équations

Montrons la première partie du théorème 1.2. Par symétrie, on peut supposer $i=c$.

Proposition 3.9.

$$\deg_c=d_1\dots d_{c-1}\sum_{l=1}^{c}\frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l-d_{l'})}\left(\frac{e_c^{N+1}-e_l^{N+1}}{e_c-e_l}\right).$$

Preuve. On utilise la relation 3.4 (ii), et la formule 2.3 pour Ξ_A qui s'applique car X_A est lisse par la proposition 3.5 :

$$\deg_c=\sum_{\Gamma\subset Q(c,N,(d_i)_{1\leq i\leq c})}(-1)^{\mathrm{codim}(\Gamma)}(\dim(\Gamma)+1)\int_\Gamma\alpha_c(u)d\mu_\Gamma(u).$$

Les faces de $Q(c,N,(d_i)_{1\leq i\leq c})$ sont les $\Gamma_{I,J}$. L'intégrale qui intervient est nulle si $c\notin I$ car α_c s'annule alors identiquement sur $\Gamma_{I,J}$. Si $c\in I$, on reconnaît l'intégrale calculée en 3.8. Il vient :

$$\deg_c=\sum_{\substack{I\subset\{1,\dots,c-1\}\\ \varnothing\neq J\subset\{0,\dots,N\}}}\sum_{l\in I\cup\{c\}}\frac{(-1)^{c+N-|I|-|J|}}{\prod\limits_{\substack{l'\in I\cup\{c\}\\ l'\neq l}}(d_l-d_{l'})}\left(\frac{d_c^{|I|+|J|}-d_l^{|I|+|J|}}{d_c-d_l}\right).$$

En paramétrant J par $j = |J|$, et en remarquant que le terme $j = 0$ dans la somme ci-dessous est nul par le lemme 3.6 (ii), on obtient :

$$\deg_c = \sum_{j=0}^{N+1} \binom{N+1}{j} \sum_{I \subset \{1,\ldots,c-1\}} \sum_{l \in I \cup \{c\}} \frac{(-1)^{c+N-|I|-j}}{\prod\limits_{\substack{l' \in I \cup \{c\} \\ l' \neq l}} (d_l - d_{l'})} \left(\frac{d_c^{|I|+j} - d_l^{|I|+j}}{d_c - d_l} \right).$$

Appliquons la formule du binôme.

$$\deg_c = \sum_{I \subset \{1,\ldots,c-1\}} \sum_{l \in I \cup \{c\}} \frac{(-1)^{c-|I|-1}}{\prod\limits_{\substack{l' \in I \cup \{c\} \\ l' \neq l}} (d_l - d_{l'})} \left(\frac{d_c^{|I|} e_c^{N+1} - d_l^{|I|} e_l^{N+1}}{d_c - d_l} \right).$$

Échangeons alors les sommations sur I et sur l. On note $\bar{I}$ le complémentaire de I dans $\{1, \ldots, c-1\}$, et on remarque que dans la somme ci-dessous la contribution des termes pour lesquels $l \in \bar{I}$ est nulle.

$$\deg_c = \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l} (d_l - d_{l'})} \frac{1}{d_c - d_l} M_l, \text{ où}$$

$$M_l = \sum_{\bar{I} \subset \{1,\ldots,c-1\}} (-1)^{|\bar{I}|} (d_c^{c-1-|\bar{I}|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-|\bar{I}|} e_l^{N+1}) \prod_{l' \in \bar{I}} (d_l - d_{l'}).$$

Calculons M_l. On commence par développer le produit pour obtenir :

$$M_l = \sum_{\substack{\bar{I} \subset \{1,\ldots,c-1\} \\ H \subset \bar{I}}} (d_c^{c-1-|\bar{I}|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-|\bar{I}|} e_l^{N+1}) (-1)^{|H|+|\bar{I}|} d_l^{|\bar{I}|-|H|} \prod_{l' \in H} d_{l'}.$$

En sommant d'abord sur H, puis sur le cardinal $i = |\bar{I}| - |H|$, on obtient pour M_l l'expression suivante :

$$\sum_{H \subset \{1,\ldots,c-1\}} \prod_{l' \in H} d_{l'} \sum_{i=0}^{c-|H|-1} \binom{c-|H|-1}{i} (-d_l)^i (d_c^{c-1-i-|H|} e_c^{N+1} - d_l^{c-1-i-|H|} e_l^{N+1}).$$

Appliquons à nouveau la formule du binôme.

$$M_l = \sum_{H \subset \{1,\ldots,c-1\}} \prod_{l' \in H} d_{l'} \left((d_c - d_l)^{c-1-|H|} e_c^{N+1} - (d_l - d_l)^{c-1-|H|} e_l^{N+1} \right).$$

Le terme de droite se calcule en remarquant que $(d_l - d_l)^{c-1-|H|}$ est non nul seulement si $|H| = c-1$, c'est-à-dire si $H = \{1, \ldots, c-1\}$. Quant au terme de gauche, on peut le factoriser aisément. Il reste :

$$M_l = e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} (d_{l'} + d_c - d_l) - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}.$$

Reprenant le calcul de $\deg_c$, on voit que :

$$\deg_c = \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1}(d_{l'} + d_c - d_l) - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l} \right).$$

Par le lemme 3.6 (ii), comme $\frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1}(d_{l'}+d_c-d_l) - e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l}$ est un polynôme de degré $c-2$ en d_l, on calcule pour conclure :

$$\begin{aligned}\deg_c &= \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_c^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'} - e_l^{N+1} \prod_{l'=1}^{c-1} d_{l'}}{d_c - d_l} \right) \\ &= d_1 \dots d_{c-1} \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_c^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_c - e_l} \right).\end{aligned}$$

□

3.4 Homogénéité en les variables

Montrons la seconde partie du théorème 1.2.

Proposition 3.10.

$$\deg_{var} = d_1 \dots d_c \sum_{l=1}^{c} \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})}.$$

Preuve. On pourrait procéder par calcul direct comme en 3.9. On va plutôt profiter du calcul déjà effectué en 3.9 et de la relation (4). Il vient :

$$\begin{aligned}\deg_{var} &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{c} d_i \deg_i \\ &= \frac{d_1 \dots d_c}{N+1} \sum_{i=1}^{c} \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right).\end{aligned}$$

Utilisant alors le calcul reporté dans le lemme 3.11, et vu la remarque 1.4, on obtient :

$$\begin{aligned}\deg_{var} &= \frac{d_1 \dots d_c}{N+1} \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_l^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_l - e_l} \right) \\ &= d_1 \dots d_c \sum_{l=1}^{c} \frac{e_l^N}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})}.\end{aligned}$$

□

Lemme 3.11.

$$\sum_{l=1}^{c} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{c} \frac{1}{\prod_{l' \neq l}(d_l - d_{l'})} \left(\frac{e_i^{N+1} - e_l^{N+1}}{e_i - e_l} \right) = 0.$$

Preuve. Fixons l et introduisons $\Phi_l = \sum_{i\neq l} \frac{1}{\prod_{i'\neq i}(d_i-d_{i'})} \prod_{l'\neq i,l}(d_l-d_{l'})$, qu'on considère comme une fraction rationnelle en d_l à coefficients dans $\mathbb{Q}((d_i)_{i\neq l})$. Écrivons sa décomposition en éléments simples $\Phi_l = \sum_{i\neq l} \frac{f_i}{d_l-d_i}$. En multipliant Φ_l par $(d_l - d_i)$, et en substituant $d_l = d_i$ dans l'expression obtenue, on calcule $f_i = -1$. On a montré :

$$\sum_{i\neq l} \frac{1}{\prod_{i'\neq i}(d_i - d_{i'})} \frac{1}{d_l - d_i} = -\frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})} \sum_{i\neq l} \frac{1}{d_l - d_i}.$$

Multiplions cette identité par e_l^{N+1}, sommons sur l, puis échangeons dans le terme de gauche le rôle des variables muettes i et l pour obtenir :

$$\sum_{l=1}^{c} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{c} \frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})} \frac{e_i^{N+1}}{d_i - d_l} = -\sum_{l=1}^{c} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{c} \frac{1}{\prod_{l'\neq l}(d_l - d_{l'})} \frac{e_l^{N+1}}{d_l - d_i}.$$

Faisons tout passer dans le terme de gauche et remarquons que $d_i - d_l = e_i - e_l$: le lemme est démontré. $\square$

4 Caractéristique finie

On explique dans cette partie comment modifier la preuve proposée ci-dessus pour démontrer le théorème 1.2 quand K est de caractéristique finie. On en déduit alors une preuve du théorème 1.6.

4.1 Équation de la duale

On conserve les notations de la partie 2.

Le théorème [3] Chap.9, 2.7, que nous que nous avons énoncé en 2.1 décrivait l'équation de la variété duale d'une variété torique lisse $X_A \subset \mathbb{P}((K^A)^*)$. Il ne vaut tel quel qu'en caractéristique 0, et son énoncé doit être modifié en général. À cet effet, on introduit les notations suivantes.

Soit $W_{X_A} \subset \mathbb{P}((K^A)^*) \times \mathbb{P}(K^A)$ la variété d'incidence de X_A, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des couples $(x, H) \in \mathbb{P}((K^A)^*) \times \mathbb{P}(K^A)$ tels que H soit tangent en le point lisse x de X_A. Notons p_1 et p_2 les projections de W_{X_A} sur X_A et $X_A^\vee = p_2(W_{X_A})$ respectivement. On munit W_{X_A} et $X_A^\vee$ de leur structure réduite.

Si X_A n'est pas défective, c'est-à-dire si $X_A^\vee$ est une hypersurface de $\mathbb{P}(K^A)$, on note μ le degré de l'application génériquement finie $p_2 : W_{X_A} \to X_A^\vee$. Le théorème 2.1 admet alors la généralisation suivante :

Théorème 4.1. *On suppose X_A lisse, et $l \gg 0$.*

(i) Si X_A n'est pas défective,

$$\Delta_A(f)^\mu = \det(C^\bullet(A, l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

où chacun des deux termes est bien défini à une constante multiplicative non nulle près.

(ii) *Si X_A est défective,*

$$\Delta_A(f) = \det(C^\bullet(A,l), \partial_f, e)^{(-1)^k},$$

où chacun des deux termes est bien défini à une constante multiplicative non nulle près. Les deux membres de cette égalité sont en fait des polynômes constants non nuls.

Preuve. La preuve de [3] Chap.9, 2.7 ne nécessite qu'une modification mineure, qu'on va décrire. Cette preuve fait appel au théorème [3] Chap.2, 2.5. Au cours de la preuve de cet autre théorème, on utilise (page 59) le fait que si X_A n'est pas défective, $p_2 : W_{X_A} \to X_A^\vee$ est birationnelle. En caractéristique 0, c'est une conséquence du théorème de réflexivité. Cependant, en caractéristique finie, $p_2 : W_{X_A} \to X_A^\vee$ est seulement génériquement finie, de degré μ.

En prenant cette modification en compte, et en adaptant les arguments de manière évidente, on prouve le théorème. □

Tous les autres arguments que nous avons utilisés sont encore valables. Nous utiliserons librement les résultats déjà obtenus, notamment l'identification de D à la variété duale d'une variété torique explicite (proposition 3.1).

4.2 Calcul du degré μ

Pour appliquer le théorème 4.1, il faut calculer la quantité μ dans les cas où X_A n'est pas défective : c'est le but de la proposition 4.2. On conserve les notations du paragraphe 3.1.

Proposition 4.2. *Supposons qu'on n'ait pas $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$.*

Alors X_A n'est pas défective. Si K n'est pas de caractéristique 2 ou si n est impair, $\mu = 1$. Sinon, $\mu = 2$.

On commence par montrer plusieurs lemmes. Les arguments qui suivent sont légèrement alourdis par le fait qu'il faut manipuler avec précaution les points doubles ordinaires en caractéristique 2.

Lemme 4.3. *(i) Supposons que $c = N+1$. Alors pour $(F_1, \ldots, F_c) \in D$ général, $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$ est un unique point réduit.*

(ii) *Supposons que $c < N+1$ et qu'il existe i tel que $d_i \geq 2$. Alors pour $(F_1, \ldots, F_c) \in D$ général, $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$ est de codimension c et a un unique point singulier, qui est un point double ordinaire.*

(iii) *Supposons qu'on n'ait pas $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$. Alors pour $(F_1, \ldots, F_c) \in D$ général, les différentielles des F_i sont liées en un unique point de $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$, et ce par une unique relation.*

Preuve. (i) Cette propriété est ouverte dans D qui est irréductible par le lemme 3.2 : il suffit donc d'exhiber un jeu d'équations vérifiant cette propriété. Par Bertini, on choisit $F_1, \ldots, F_{c-1}$ généraux de sorte que le schéma $\{F_1 = \ldots = F_{c-1} = 0\}$ soit réunion de points réduits. On choisit alors F_c de sorte à ce qu'il passe par un de ces points et évite les autres.

(ii) Par description de la déformation verselle d'un point double ordinaire (voir [2] Exp. XV Prop. 1.3.1), cette propriété est ouverte dans D. Comme D est irréductible par le lemme 3.2, il suffit donc d'exhiber un jeu d'équations vérifiant cette propriété. On considère le système linéaire constitué des F_i passant par $P = [0 : \ldots : 0 : 1]$, y étant singuliers et dont les termes d'ordre 2 sont un multiple d'une forme quadratique ordinaire fixée. Le théorème de Bertini assure que le membre général de ce système linéaire a pour unique point singulier P ; c'est un point double ordinaire. On prend alors $F_1, \ldots, \hat{F_i}, \ldots, F_c$ générales passant par P. Le théorème de Bertini assure que $(F_1, \ldots, F_c)$ convient.

(iii) Les deux premiers points permettent de décrire, pour $(F_1, \ldots, F_c) \in D$ général, les dimensions des espaces tangents de $\{F_1 = \ldots = F_c = 0\}$. On en déduit le résultat.

□

Lemme 4.4. *Supposons qu'on n'ait pas $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$. Alors :*

(i) La variété X_A n'est pas défective.

(ii) De plus, si H est un élément général de $D = \tilde{X}_A^\vee$ vu comme un hyperplan de $\mathbb{P}((K^A)^*)$, H est tangent à X_A en un unique point.

Preuve. (i) Choisissons $H \in D$ général comme dans les lemmes 4.3 (*iii*) et 3.2 (*i*) et (*ii*). L'équivalence entre (11) et (12) dans la preuve de 3.1 montre alors qu'il existe un unique point t de T en lequel H est tangent à X_A. En particulier, t est isolé dans $p_2^{-1}(H)$. Comme W_{X_A} est irréductible, cela implique que p_2 est génériquement finie. Ainsi, X_A n'est pas défective.

(ii) Soit $H \in D$ général comme au point précédent. Choisissons-le de plus hors de $X_A^\vee \setminus p_2(p_1^{-1}(X_A \setminus T))$, qui est un fermé strict car p_2 est génériquement finie. L'hyperplan H n'est tangent à X_A qu'en des points de T, et est tangent à T en un unique point. Cela conclut.

□

Lemme 4.5. *Supposons qu'on n'ait pas $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$. Alors si H est un élément général de $D = \tilde{X}_A^\vee$ vu comme un hyperplan de $\mathbb{P}((K^A)^*)$, $X_A \cap H$ a un unique point singulier qui est un point double ordinaire.*

Preuve. On choisit $H = (F_1, \ldots, F_c)$ général comme dans le lemme précédent, et comme dans le lemme 4.3 (*i*) (resp. (*ii*)). On notera $Z = \{F_1 = \ldots = F_c = 0\} \subset \mathbb{P}^N$ et $\tilde{Z} \subset \mathbb{A}^{N+1}$ le cône affine sur Z.

Les choix faits montrent que H est tangent à X_A en un unique point $t \in T$. La preuve de la proposition 3.1 montre que si $t' = (y_1, \ldots, y_c, x_0, \ldots, x_N) \in (K^*)^{c+N+1}$ est un antécédent de t par l'application (10), $x = [x_0, \ldots, x_N]$ est l'unique point de Z (resp. l'unique point singulier de Z), que c'est un point réduit (resp. un point double ordinaire), et que l'unique relation entre les différentielles des F_i en $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_N)$ est donnée par $\sum_i y_i \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\tilde{x}) = 0$, $0 \leq j \leq N$.

Soit q la forme quadratique induite par H sur T_tT. On raisonne par l'absurde en la supposant non ordinaire : il existe $w \in T_tT$ non nul tel que $w \in \mathrm{rad}(q)$ et $q(w) = 0$. On note q' la forme quadratique que q induit sur $T_{t'}(K^*)^{c+N+1}$ via l'application (10). Le noyau de la surjection $T_{t'}(K^*)^{c+N+1} \to T_tT$ est engendré par $w'_1 = (y_1, \ldots, y_c, 0, \ldots, 0)$ et $w'_2 = (-d_1y_1, \ldots, -d_cy_c, x_0, \ldots, x_N)$. Notons $w' = (u_1, \ldots, u_c, v_0, \ldots, v_N)$ un antécédent de w, de sorte que $w' \in \mathrm{rad}(q')$, $q'(w') = 0$ et $w' \notin \langle w'_1, w'_2 \rangle$.

La condition $w' \in \mathrm{rad}(q')$ signifie que w' appartient au noyau de la matrice de la forme bilinéaire associée à q', c'est-à-dire au noyau de la Hessienne de H en t'. C'est un système d'équations qui s'écrit :

$$\sum_j v_j \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\tilde{x}) = 0, \qquad\qquad 1 \leq i \leq c. \tag{13}$$

$$\sum_j v_j \frac{\partial^2 \sum_i y_i F_i}{\partial X_j \partial X_k}(\tilde{x}) = \sum_i u_i \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(\tilde{x}),\ \ 0 \leq k \leq N. \tag{14}$$

Considérons $\tilde{v} = (v_0, \ldots, v_N)$ comme un vecteur tangent à $\mathbb{A}^{N+1}$ en $\tilde{x}$. L'équation (13) montre que le vecteur $\tilde{v}$ appartient à $T_{\tilde{x}}\tilde{Z}$. Montrons qu'il est non radial. Si c'était le cas, on pourrait, quitte à retrancher à w' un multiple de w'_2, le supposer nul. L'équation (14) fournit alors la relation $\sum_i u_i \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(\tilde{x}) = 0$, $0 \leq k \leq N$ entre les différentielles des F_i en $\tilde{x}$. Ce n'est possible par hypothèse que si w' est proportionnel à w'_1, ce qui contredit $w' \notin \langle w'_1, w'_2 \rangle$. Ainsi $\tilde{v}$ n'est pas radial.

On distingue alors deux cas.

(i) Supposons que $c = N + 1$. Un vecteur $v \in T_xZ$ se relevant en $\tilde{v}$ est alors un élément non nul de T_xZ, et Z n'est donc pas un point réduit. C'est la contradiction recherchée.

(ii) Supposons que $c < N + 1$ et qu'il existe i tel que $d_i \geq 2$.

Vu l'unique relation liant les différentielles en $\tilde{x}$ des F_i, la forme quadratique qui est l'équation dans $T_{\tilde{x}}\tilde{Z}$ du cône tangent à $\tilde{Z}$ en $\tilde{x}$ est la restriction à $T_{\tilde{x}}\tilde{Z}$ de la forme quadratique induite par les termes d'ordre deux de $\sum y_i F_i$. On note $\tilde{Q}$ cette forme quadratique.

Montrons que $\tilde{v} \in \mathrm{rad}(\tilde{Q})$. L'équation (14) signifie que si un vecteur est orthogonal à $(\frac{\partial}{\partial X_k}(\sum_i u_i F_i)(\tilde{x}))_{0 \leq k \leq N}$ pour le produit scalaire usuel, il est automatiquement orthogonal à $\tilde{v}$ pour la forme bilinéaire associée à $\tilde{Q}$. Or tous les vecteurs de $T_{\tilde{x}}\tilde{Z}$ sont orthogonaux à $(\frac{\partial}{\partial X_k}(\sum_i u_i F_i)(\tilde{x}))_{0 \leq k \leq N}$, vu comme un gradient. On a bien montré $\tilde{v} \in \mathrm{rad}(\tilde{Q})$.

On vérifie ensuite que l'équation $q'(w') = 0$ est la même équation que $\tilde{Q}(\tilde{v}) = 0$. Soit alors $v \in T_xZ$ se relevant en $\tilde{v}$, et Q la forme quadratique sur T_xZ, équation du cône tangent à Z en x, induisant $\tilde{Q}$ sur $T_{\tilde{x}}\tilde{Z}$. On a montré que v est un élément non nul de $\mathrm{rad}(Q)$ sur lequel Q s'annule. La forme quadratique Q n'est donc pas ordinaire et x ne peut être un point double ordinaire de Z. C'est absurde.

$\square$

On peut alors prouver la proposition 4.2 :

Preuve de la proposition *4.2.* La variété X_A n'est pas défective par 4.4 (i), de sorte que μ est bien défini.

Soit H un point général de $X_A^\vee$. Soit $p_2^{-1}(H) \subset X_A$ le lieu schématique le long duquel H est tangent à X_A ; par définition de μ, on a $\mu = \mathrm{long}(p_2^{-1}(H))$. Par [4] I (8) et (9), $p_2^{-1}(H) = \mathrm{Sing}(X_A \cap H)$ où le lieu singulier de $X_A \cap H$ est muni de la structure schématique donnée par le $(k-1)$-ième idéal de Fitting du faisceau des différentielles de Kähler.

Comme H est choisi général, par le lemme 4.5, $X_A \cap H$ a un unique point singulier qui est un point double ordinaire. Pour calculer $\mathrm{Sing}(X_A \cap H)$, on peut travailler dans le complété de $X_A \cap H$ en ce point. Par [2] Exp. XV Th. 1.2.6, celui-ci est isomorphe au le lieu des zéros dans $K[[x_1, \dots, x_k]]$ de la forme quadratique ordinaire canonique $x_1x_2 + \ldots + x_{k-1}x_k$ si k est pair ou $x_1x_2 + \ldots + x_{k-2}x_{k-1} + x_k^2$ si k est impair.

Sur ces équations, il est facile de calculer le $(k-1)$-ième idéal de Fitting du faisceau des différentielles : c'est $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ sauf si k est impair et K est de caractéristique 2 auquel cas c'est $\langle x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^2 \rangle$. Dans le premier cas, le sous-schéma qu'il définit est un point réduit et $\mu = \mathrm{long}(p_2^{-1}(H)) = 1$. Dans le second cas, il définit un sous-schéma de longueur 2 et $\mu = \mathrm{long}(p_2^{-1}(H)) = 2$. Comme $n = N - c$ est de parité opposée à $k = c + N - 1$, la proposition est démontrée. $\square$

4.3 Preuve du théorème principal

On commence par montrer que dans les cas non traités par le lemme 4.4, X_A est défective.

Lemme 4.6. *Supposons $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$. Alors X_A est défective.*

Preuve. Les F_i sont des formes linéaires. La sous-variété D de V correspond au lieu où elles ne sont pas indépendantes, et est donc décrit par l'annulation d'un certain nombre de mineurs. On en déduit aisément que ce lieu est de codimension ≥ 2 dans V. Par le corollaire 3.3, X_A est alors défective. $\square$

On obtient alors une preuve du théorème 1.2.

Preuve du théorème *1.2.* On distingue deux cas.

(i) Supposons qu'on n'ait pas $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N + 1$. Alors, par le lemme 4.4, X_A n'est pas défective, et la preuve du théorème 1.2 en caractéristique nulle fonctionne encore. Il faut seulement remplacer le théorème 2.1 par le théorème 4.1 (i), et évaluer μ à l'aide de la proposition 4.2.

(ii) Si $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$, X_A est défective par le lemme 4.6. Par le corollaire 3.3, D est de codimension ≥ 2 dans V, de sorte que $\Delta = 1$, et que tous les degrés qu'on cherche à calculer sont nuls. D'autre part, la preuve fournie en caractéristique nulle fonctionne sans modifications en caractéristique quelconque, en faisant intervenir le théorème 4.1 (*ii*) à la place du théorème 2.1. Les termes de droite dans l'énoncé du théorème 1.2 sont donc également nuls. Le facteur $\frac{1}{\mu}$ ne joue alors aucun rôle, et le théorème est démontré.

□

4.4 Réduction modulo p du discriminant

On montre dans ce paragraphe le théorème 1.6.

Preuve du théorème *1.6.* La situation décrite dans le paragraphe 1.1 se met en famille sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$: on dispose d'un fibré vectoriel géométrique $V_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, et d'un sous-schéma fermé réduit $D_{\mathbb{Z}}$ de celui-ci. On note $\Delta_{\mathbb{Q}}$ et $\Delta_{\mathbb{F}_p}$ les polynômes discriminant sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}_p$.

Si $d_1 = \ldots = d_c = 1$ et $c < N+1$, $\Delta_{\mathbb{Q}} = 1$ par le lemme 4.6 et le corollaire 3.3, et le théorème est évident. Dans le cas contraire, toutes les fibres sont des hypersurfaces par le lemme 4.4 et le corollaire 3.3. Elles coïncident ensemblistement avec le lieu discriminant, et sont donc irréductibles par le lemme 3.2. Par conséquent, la réduction modulo p de $\Delta_{\mathbb{Q}}$ s'annule précisément sur le lieu discriminant, et est donc une puissance de $\Delta_{\mathbb{F}_p}$. Comparant les degrés à l'aide du théorème 1.2, on voit que cette puissance est 1 sauf si $p = 2$ et n est pair, auquel cas cette puissance vaut 2. Comme $\Delta_{\mathbb{F}_p}$ est irréductible par définition, cela conclut. □

Références

[1] M. Brion, M. Vergne, An equivariant Riemann-Roch theorem for complete, simplicial toric varieties, *J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), 67 − 92.

[2] P. Deligne (ed.), N. M. Katz (ed.), *Groupes de monodromie en géométrie algébrique II (SGA 7 II)*, Springer (1973).

[3] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser (1994).

[4] S. L. Kleiman, Tangency and duality, In : *Proceedings of the* 1984 *Vancouver conference in algebraic geometry, CMS Conf. Proc.* **6** (1986), 163 − 225.

[5] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Springer-Verlag (2005).

[6] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1988).

[7] V. V. Prasolov, *Polynomials*, Springer (2004).

[8] A. H. Wallace, Tangency and duality over arbitrary fields, *Proc. Lond. Math. Soc.* **6** (1956), $321 - 342$.