Простое доказательство изопериметрической теоремы для плоскости Лобачевского

под ред. А. Скопенкова [1]

В этой методической заметке приводятся четкая формулировка и короткое доказательство основного результата работы [A] (см. ниже), а также проясняется его связь с изопериметрической теоремой для плоскости Лобачевского. Доказательство по сути не отличается от приведенного в [A]. Однако ввиду красоты и важности результата короткое доказательство, освобожденное от ненужных деталей, может быть интересно читателю.

Теорема 1. [A] *Среди треугольников ABC на плоскости Лобачевского с заданными длинами двух сторон AB и AC максимальную площадь имеет тот, у которого угол A равен сумме углов B и C.*

Изопериметрическая теорема для плоскости Лобачевского утверждает, что среди фигур данной площади, ограниченных спрямляемыми кривыми, наибольший периметр имеет круг. Эта теорема и ее многомерные аналоги давно и хорошо известны [S]. Ясно, что классическому рассуждению Я. Штейнера об изопериметрах (см., например, [K, стр. 21] или [P]) недостает именно теоремы 1, чтобы оно стало доказательством изопериметрической теоремы для плоскости Лобачевского. Поэтому мы не исключаем, что теорема 1 была известна специалистам или любителям элементарной математики, хотя никаких ссылок обнаружено не было.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через α, β, γ углы треугольника ABC. Воспользуемся моделью Пуанкаре в круге. Вершину A поместим в центр модели. Рассмотрим евклидову окружность ω и евклидову прямую, содержащие гиперболические прямые BC и AB соответственно. Они пересекаются в двух точках B и B' (рис. 1).

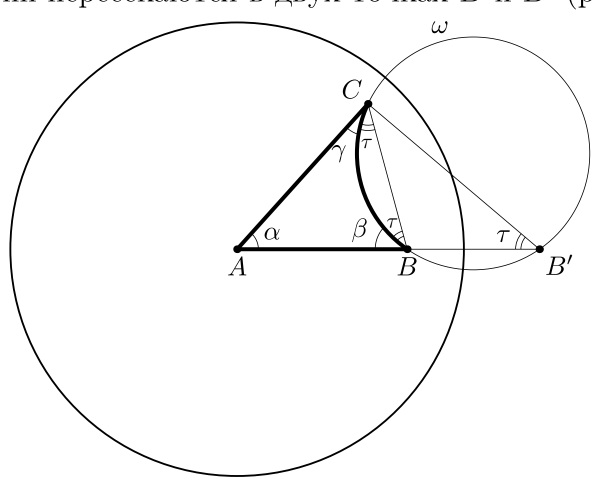

Рисунок 1

Докажем, что *площадь гиперболического треугольника ABC равна удвоенной величине евклидова угла $AB'C$,* который мы обозначим через τ. Действительно, угол между хордой BC и окружностью ω также равен τ, так как угол между хордой и касательной равен вписанному углу. Так как сумма углов евклидова треугольника ABC равна $\alpha+\beta+\gamma+2\tau = \pi$, то $S(ABC) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma) = 2\tau$.

Таким образом, треугольник ABC имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда угол $AB'C$ максимален. Поскольку длины сторон AB и AC фиксированы, а меняется лишь угол между ними, можно считать фиксированными точки A и B; тогда точка C

[1] Эта заметка составлена из отзывов В.О. Бугаенко и О.В. Шварцмана на работу [A], которые были переданы Е.И. Алексеевой в декабре 2009 с предложением использовать их для улучшения своей работы. (Отзывы были составлены для ММКШ, см. www.mccme.ru/mmks, где рецензирование анонимное. Рецензенты любезно согласились на публикацию настоящей заметки с их именами.)

может перемещаться по окружности ψ с центром A. Очевидно, что угол $AB'C$ максимален, если евклидова прямая $B'C$ касается окружности ψ (рис. 2).

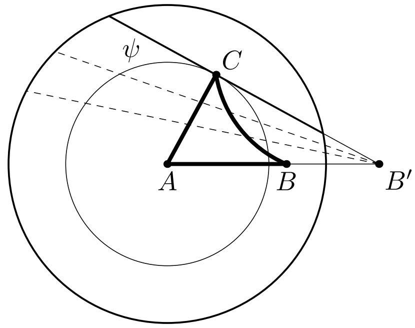

Рисунок 2

Это, в свою очередь означает, что евклидов угол ACB' — прямой. Последнее условие равносильно тому, что $\pi/2 = \angle CAB' + \angle CB'A = \alpha + \tau$. Сопоставив это с выведенной ранее формулой $S(ABC) = 2\tau$ и формулой $S(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ для площади треугольника, получаем требуемое $\alpha = \beta + \gamma$. QED

[A] Е. Алексеева, Гиперболические треугольники максимальной площади с двумя заданными сторонами, Мат. Просвещение, 14 (2010), 175-183. См. также J. I. Alekseeva, Hyperbolic triangles of the maximum area with two fixed sides, http://arxiv.org/abs/0911.5319.

[K] А.А.Крыжановский, Изопериметры. М.: Физматгиз, 1959.

[P] Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2005.

[S] Schmidt E., Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kügel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl, Math. Zeitschrift, 49 (1943), 1-109.