

## TRANSPORTO PRIEMONIŲ PAVARŲ SU NETIESINIAIS ELEMENTAIS DINAMINIŲ PROCESŲ MATEMATINIS MODELIAVIMAS

**M. Bogdevičius**

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas*

### 1. Įvadas

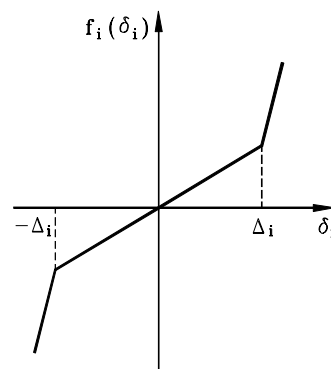
Transporto priemonių pavaros susideda iš įvairių elementų, tokių kaip: velenai, kardaniniai velenai, movos, krumpliaračiai, kurie nuo transporto priemonės variklio perduoda sukimo momentą važiuoklei. Daugelis tokių pavaros elementų turi netiesines charakteristikas, t. y. sukimo momento priklausomybė nuo sukimosi kampo yra netiesinė funkcija. Sukimosi virpesių atsiradimo priežastis yra netolygus sukimo momento perdavimas dėl kintamųjų pasipriešinimo ir varomųjų jėgų. Dėl to pavarų elementų kampiniai greičiai yra kintamieji ir kiekvienas pavaros elementas turi skirtingą kampinį pagreitį. Kadangi velenas yra tam tikro standumo ir prie jo yra prijungti tam tikros masės pavaros elementai, todėl kiekviename veleno skerspjūvyje bus skirtingas sukimosi netolygumas.

Transporto mašinų pavarose pagrindinis triukšmo šaltinis yra smūgis krumpliaračių poroje, kuris atsiranda dėl tarpelių tarp krumplių. Sukamieji virpesiai sukelia ciklinius kampinius krumpliaračių pagreičius. Kai varančiojo krumpliaračio sukimo inercijos momentas yra didesnis už apkrovos sukimo momentą, tuomet sukabinti krumpliai vienas nuo kito atitolsta ir įvyksta smūgis. Be krumpliaračių porų, tarpeliai tarp sukabinamų elementų gali būti movose, išdrožose ir kituose pavarų elementuose. Kuo daugiau pavaroje yra tarpelių tarp elementų, tuo didesnis būna triukšmo lygis tokiose pavarose, didesnės dinaminės apkrovos ir tuo netolygiai juda pavaros elementai.

Nuolatiniai smūgiai, vadinami vibraciniais, pavarose sukelia triukšmą ir dideles dinamines apkrovas. Todėl transporto priemonių pavarose sukamųjų virpesių nagrinėjimas yra labai aktuali problema. Ją išsprendus, padidėtų transporto priemonių pavarų ilgaamžiškumas, patikimesnis būtų jų darbas. Pavarų netiesinius reiškinius nagrinėjo įvairių šalių mokslininkai [1, 2].

### 2. Transporto priemonių pavarų elementų matematiniai modeliai

Transporto priemonės pavaros sukamieji virpesiai nagrinėjami koncentruotų parametrų modeliais. Bendru atveju modelyje egzistuoja trys netiesiniai standumo elementai: daugiapakopis movos standumas, tarpelis tarp išdrožų ir tarpelis tarp krumplių krumpliaračių poroje. Bendras pavaros netiesinis elementas pateiktas 1 pav.



**1 pav.** Jėgos  $f_i(\delta_i)$  priklausomybė nuo poslinkio  $\delta_i$

**Fig 1.** The dependence of force  $f_i(\delta_i)$  by displacement  $\delta_i$

Atskirai nagrinėjami pagrindiniai pavaros elementai. Sankabos mova pateikta 2 pav. a. Jos judėjimo lygčių sistema:

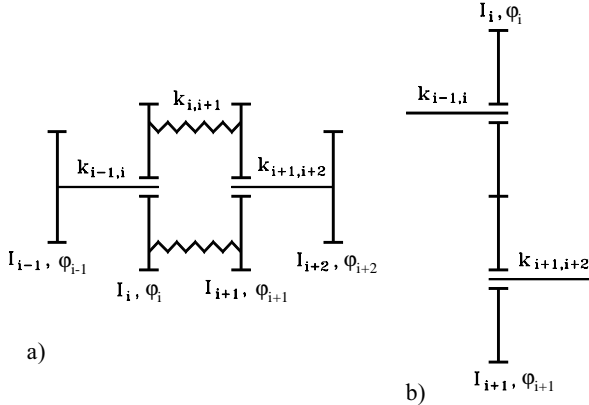
$$I_i \ddot{\varphi}_i = k_{i-1,i} f_{i-1}(\delta_{i-1}) R_{i,1} - k_{i,i+1} f_i(\delta_i) R_{i,2} - h_{i-1,i} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) - h_{i,i+1} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i+1}), \quad (1)$$

$$I_{i+1} \ddot{\varphi}_{i+1} = k_{i,i+1} f_i(\delta_i) R_{i+1,2} - k_{i+1,i+2} f_{i+1}(\delta_{i+1}) R_{i+1,1} - h_{i,i+1} (\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_i) - h_{i+1,i+2} (\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_{i+2}), \quad (2)$$

$$\delta_{i-1} = \varphi_{i-1} R_{i-1,1} - \varphi_i R_{i,1}, \quad \delta_i = \varphi_i R_{i,2} - \varphi_{i+1} R_{i+1,1},$$

$$\delta_{i+1} = \varphi_{i+1}R_{i+1,1} - \varphi_{i+2}R_{i+2,1}, \quad (3)$$

$I_i, I_{i+1}$  – pusmovių inercijos momentai;  $k_{i-1,i}, k_{i+1,i+2}$  – velenų standumo koeficientai;  $h_{i-1,i}, h_{i,i+1}, h_{i+1,i+2}$  – slopinimo koeficientai;  $\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i$  – sukimosi kampas, greitis ir pagreitis;  $\delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$  – poslinkiai;  $R_{i,1}, R_{i+1,1}$  – movos išdrožų dalijimo spinduliai;  $R_{i,2}, R_{i+1,2}$  – atstumai nuo sukimosi ašies iki movos spyruoklių.



2 pav. Pavaros netiesiniai elementai: a – sankabos mova; b – krumpliaračių pora

Fig 2. Nonlinear elements of a driver: a – clutch; b – gear-type pair

Netiesinė movos funkcija nustatoma:

$$f_i(\delta_i) = \begin{cases} \alpha_i \delta_i + \beta_i (\delta_i - \Delta_i)^i, & \delta_i > \Delta_i, \\ \alpha_i \delta_i, & -\Delta_i \leq \delta_i \leq \Delta_i, \\ -\alpha_i \delta_i + \beta_i (\delta_i + \Delta_i)^i, & \delta_i < -\Delta_i, \end{cases} \quad (4)$$

$\Delta_i$  – charakteringas tarpelio dydis;  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  – žinomi parametrai. Krumpliaračių poros judėjimo lygtys:

$$I_i \ddot{\varphi}_i = k_{i-1,i} f_{i-1}(\delta_{i-1}) R_{i,1} - k_{i,i+1} f_i(\delta_i) R_{i,1} - k_{i,i+1} f_i(\delta_i) R_{i,2} - h_{i-1,i} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) \quad (5)$$

$$I_{i+1} \ddot{\varphi}_{i+1} = k_{i,i+1} f_i(\delta_i) R_{i+1,2} - k_{i+1,i+2} f_{i+1}(\delta_{i+1}) R_{i+1,1} - h_{i+1,i+2} (\dot{\varphi}_{i+1} - \dot{\varphi}_{i+2}) \quad (6)$$

$I_i, I_{i+1}$  – krumpliaračių inercijos momentai;  $k_{i,i+1}$  – sukabinimo standumas;  $h_{i-1,i}, h_{i,i+1}, h_{i+1,i+2}$  – velenų slopinimo koeficientai;  $R_{i,2}, R_{i+1,2}$  – krumpliaračių dalijimo spinduliai.

Krumpliaračių poros netiesinė funkcija  $f_i(\delta_i)$  lygi:

$$f_i(\delta_i) = \begin{cases} \alpha_i \delta_i + \beta_i (\delta_i - \Delta_i)^i, & \delta_i > \Delta_i, \\ 0, & -\Delta_i \leq \delta_i \leq \Delta_i, \\ -\alpha_i \delta_i + \beta_i (\delta_i + \Delta_i)^i, & \delta_i < -\Delta_i. \end{cases} \quad (7)$$

Nagrinėjama transporto įrenginių pavara, susidedanti iš asinchroninio variklio ir mechaninės pavaros. Variklio įtaka bendrajam pavaros dinaminiam procesui gali būti reikšminga, todėl nagrinėjant pavaras būtina įvertinti variklio įtaką jam. Nagrinėjant asinchroninius variklius taikomi dviejų fazių matematiniai modeliai, kuriais įvertinami elektromagnetiniai procesai šiuose varikliuose.

Bendras asinchroninio variklio matematinis modelis [3, 4]:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = [A] \{x\} + \{F(\psi, t)\}, \quad (8)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(M_v - M_1) p}{I_n}, \quad (9)$$

$$M_v = 1,5 p L_\mu a (\psi_{\alpha s} \psi_{\beta r} - \psi_{\alpha r} \psi_{\beta s}), \quad (10)$$

čia:

$$[A] = \begin{bmatrix} -a r_s L_r & 0 & a r_s L_\mu & 0 \\ 0 & -a r_s L_r & 0 & a r_s L_\mu \\ a r_r L_\mu & 0 & -a r_r L_s & 0 \\ 0 & a r_r L_\mu & 0 & -a r_r L_s \end{bmatrix},$$

$$\{x\} = \begin{bmatrix} \psi_{\alpha s} \\ \psi_{\beta s} \\ \psi_{\alpha r} \\ \psi_{\beta r} \end{bmatrix}, \quad \{F(\psi, t)\} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} U_n \cos \omega_s t \\ -\sqrt{2} U_n \sin \omega_s t \\ \omega \psi_{\beta r} \\ -\omega \psi_{\alpha r} \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{L_s L_r - L_\mu^2}, \quad L_\mu = 1,5 L_0,$$

$$L_s = L_{s\sigma} + 1,5 L_0, \quad L_r = L_{r\sigma} + 1,5 L_0,$$

$L_{s\sigma}, L_{r\sigma}$  – statoriaus ir rotorius apvijų sklaidos induktyvumas;  $L_0$  – įmagnetinimo kontūro induktyvumas;  $r_s, r_r$  – statoriaus ir rotorius aktyviosios varžos;  $U_n$  – nominalioji įtampa;  $\omega_s$  – maitinimo įtampos kampinis dažnis;  $M_v$  – variklio momentas;  $p$  – polių porų skaičius;  $\omega$  – rotorius kampinis greitis;  $I_n$  – rotorius inercijos momentas. Bendru atveju pavarą veikiantis pasipriešinimo momentas lygus:

$$M_p = (M_{p0} + M_{p1} \sin(\omega_p t)) e^{bt}, \quad (11)$$

$M_{p0}, M_{p1}$  – pasipriešinimo momento pastovioji ir kintamoji dalis;  $\omega_p$  – sužadavimo dažnis;  $b$  – žinomas koeficientas.

Parametrai  $M_{p0}$ ,  $M_{p1}$ ,  $\omega_p$ ,  $b$  gali būti pastovieji ir atsitiktiniai dydžiai. Modeliuojamas atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, reikšmes galima skaičiuoti pagal formulę [3, 5]:

$$y = \mu + \sigma \left( \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \right), \quad (12)$$

$\mu$  – vidutinė reikšmė;  $\sigma^2$  – dispersija;  $R$  – atsitiktinis dydis, tolygiai pasiskirtęs intervalu  $[0, 1]$ .

Bendra pavaros matematinio modelio lygčių sistema:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= [A]\{x\} + \{F(t, x)\}, \\ [M]\{\ddot{\varphi}\} &= \{G(t, \varphi, \dot{\varphi}, x)\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$[M]$  – pavaros masių matrica;  $\{G(t, \varphi, \dot{\varphi}, x)\}$  – netiesinių funkcijų vektorius.

Nagrinėjama transporto priemonės pavana, kurios schema parodyta 3 pav. Pavara sudaryta iš asinchroninio variklio 4A100/4SY3, movos ir dviejų krumpliaračių porų.

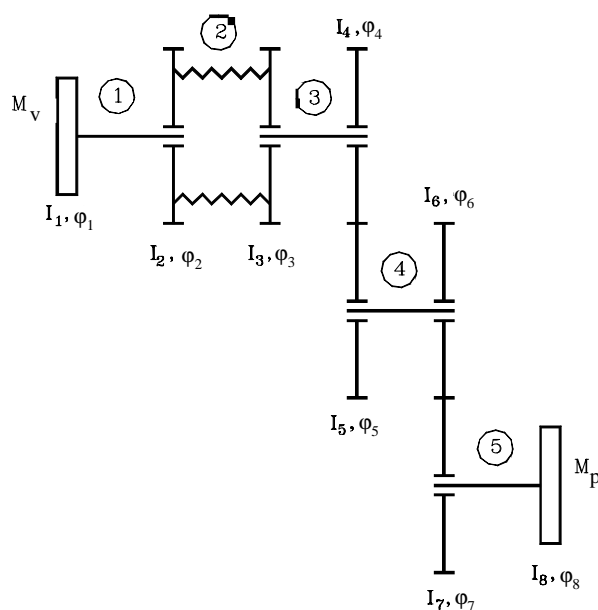
Pavaros standumo koeficientai:  $k_1 = 188,0$  MN/m,

$k_2 = 1,0$  MN/m,  $k_3 = 110$  MN/m,  $k_4 = 84$  MN/m,

$k_5 = 320$  MN/m,  $k_6 = 146$  MN/m,  $k_7 = 8,3$  MN/m.

Pavaros slopinimo koeficientai:  $h_i = 10^{-5}$  Ns/m,  $i = 1, \dots, 7$ . Tarpeliai:  $\Delta_{6-7} = 10^{-4}$  m,  $\Delta_8 = 2 \cdot 10^{-4}$  m.

Pavarą veikia atsitiktinis pasipriešinimo momentas, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį:



3 pav. Nagrinėjamos pavaros schema

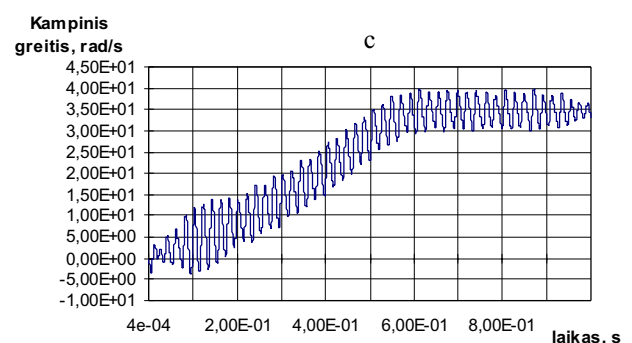
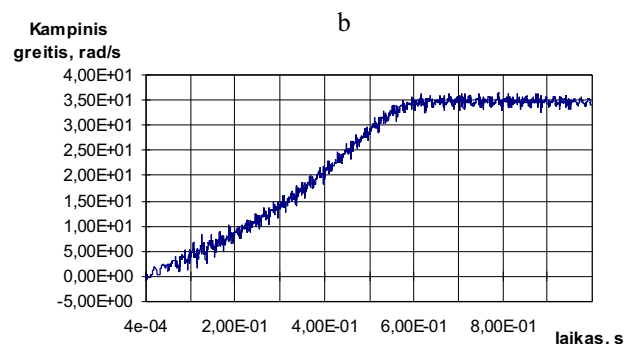
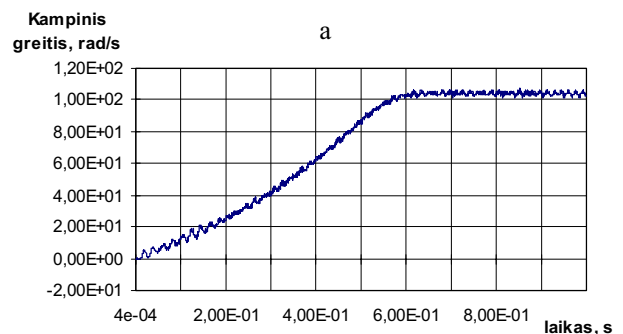
Fig 3. The scheme of the investigated driver

momentas  $M_{p0}$ : vidutinė reikšmė 20 Nm, kvadratinė nuokrypa – 1 Nm;

momentas  $M_{p1}$ : vidutinė reikšmė 5 Nm, kvadratinė nuokrypa – 1 Nm;

dažnis  $\omega_p$ : vidutinė reikšmė  $62,8$  s<sup>-1</sup>, kvadratinė nuokrypa – 1 s<sup>-1</sup>.

Pavarų sudarančių kūnų 6–8 kampinių greičių priklausomybės nuo laiko parodytos 4 pav.



4 pav. Kampinio greičio kitimo priklausomybė nuo laiko: a – 6 kūnas; b – 7 kūnas; c – 8 kūnas

Fig 4. Dependency of angular velocity by time: a – body number 6; b – body number 7; c – body number 8

#### 4. Išvados

1. Sukurti transporto priemonių pavarų elementų matematiniai modeliai, kurie įvertina tarpelius pavaros sujungimo elementuose.

2. Taikant šių pavarų elementų matematinis modelius kartu su asinchroninio variklio matematinio modeliu, galima nagrinėti įvairių transporto priemonių pavarų dinaminis procesus ir nustatyti dinamines apkrovas tam tikruose pavaros elementuose.

### Literatūra

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Под ред. совет: В. Н. Челомей. Москва: Машиностроение, 1979.
2. В. И. Бабицкий. Теория виброударных систем. Москва: Машиностроение, 1983. 352 с.
3. В. З. Аладьев, М. А. Богдвичюс. Решение физико-технических и математических задач с пакетом Maple V. Вильнюс: Техника, 1999. 686 с.
4. А. В. Башарин, Ю. В. Постников. Примеры расчета автоматизированного электропривода на ЭВМ. Ленинград: Энергоиздат, 1990. 512 с.
5. Х. Таха. Введение в исследование операций: В 2-х книгах. Москва: Мир, 1985.

Įteikta 2000 09 18

### MATHEMATICAL MODELLING OF DYNAMIC PROCESSES OF TRANSMISSIONS WITH NON-LINEAR UNITS OF VEHICLES

**M. Bogdevičius**

S u m m a r y

In vehicles and technology equipment mechanical transmissions will be used to transfer the torque. There are gaps between the units of transmission at variable loads. Therefore the dynamic loads are augmented in transmission and there is noise. In the article the mathematical models of some transmission units (clutch, gear-type pair and spline connection) where gaps can occur are considered. The dynamic processes in transmission are investigated together with an asynchronous motor. Two phase model with drive will be used for the simulation of the asynchronous motor. The dynamic processes in the transmission of technology equipment are investigated with the stochastic moment of external load impacts when the transmission is arranged according to the regular law. The relation between the angular rate and the time of three units of the transmission is shown.

### MARIJONAS BOGDEVIČIUS

Doctor, Associate Professor and Head (1995) of the Department of Transport Technology Equipment of Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Plytinės g. 27, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: marius@ti.vtu.lt

Doctor of Technical sciences, Moscow Highway Institute, 1988. First degree in Mechanical Engineering (building and road machines and equipment), Vilnius Civil Engineering Institute (VISI), now VGTU), 1981. Probation: Stuttgart University (Germany), 1990-1991. Academician of International Academy of Noosphere (Sustainable Development) (1998). Publications: author of 22 inventions, more than 80 scientific works. Research interests: dynamics of mechanical, hydraulic and pneumatic systems.