

## BIRIOSIOS MEDŽIAGOS JUDĖJIMO UŽDARAME TŪRYJE MATEMATINIS MODELIAVIMAS

M. Bogdevičius, R. Vitkūnas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

### 1. Įvadas

Kelių dangoms tiesti dažniausiai naudojami asfaltbetonio mišiniai. Jie sudaryti iš kietųjų mineralinių medžiagų ir rišamosios medžiagos – bitumo. Kietąsias mineralines medžiagas sudaro tam tikro dydžio grūdėliai (frakcijos), kurių santykis mišinyje atsižvelgiant į asfaltbetonio mišinio paskirtį parenkamas pagal reikalavimus [1] siekiant maksimalaus dangos vienalytiškumo, stiprumo ir ilgaamžiškumo.

Dažniausiai asfaltbetonio mišiniai gaminami periodinio veikimo maišytuvuose. Taip gaminamo asfaltbetonio mišinio sudėtis priklauso nuo trijų svarbiausių veiksnių: dozuojamų mineralinių komponentų granulometrinės sudėties, šių komponentų ir bitumo dozių santykio, taip pat nuo visų komponentų sumaišymo kokybės. Jei gaminamo asfaltbetonio mišiniai pakankamai ilgai maišomi tvarkingoje maišyklėje ir jį sudarantys komponentai tiksliai dozuojami (dozatorius valdant kompiuteriu), tai mišinio homogeniškumas pagal jo sudėtis stabilumą labiausiai priklauso nuo dozuojamų karštųjų frakcijų sudėtis stabilumo. Šių frakcijų granulometrinės sudėtis stabilumui daugiausia įtakos turi jų segregacijos bunkerio sekcijose laipsnis (dėsningas ar atsitiktinis skirtingo dydžio grūdelių pasiskirstymas technologinio proceso įrenginiuose) [2, 3].

Nagrinėjant segregacijos priežastis svarbiausi veiksniai yra: medžiagos granulometrinė sudėtis, grūdelių forma ir tankis, paviršiaus būklė, trintis tarp grūdelių, birumas (geba byrėti), polinkis agreguoti (sulipti į grūdelių visumą), bunkerio forma ir konstrukcinės savybės, bunkerio sienelių paviršiaus būklė medžiagos (mišinio) pakrovimo ir iškrovimo būdai ir kt. Detaliam nagrinėjant segregacijos laipsnio ir pobūdžio priežastis turėtume atlikti daug eksperimentų, o tam reikia daug lėšų ir laiko.

Siūlomas problemos sprendimas – kūnų judėjimo uždareme tūryje matematinio modelio sudarymas ir šio proceso tyrimas.

### 2. Kūnų judėjimo uždareme tūryje matematinis modelis

Biriųjų mineralinių medžiagų judėjimą bunkeryje nagrinėjame kaip atskirų kūnų, iš kurių sudaryta medžiaga, judėjimą uždareme tūryje. Kiekvienas kūnas yra laikomas kietu ir jo forma ar tūris nekinta. Kūno forma galėtų būti įvairi, tačiau tuomet turėtume įvertinti kiekvieno kūno formos ypatumus. Uždaviniui supaprastinti laikome, kad nagrinėjamas kūnas yra rutulio formos, tuomet jo formą galima aprašyti spinduliu arba skersmeniu.

Tūrio forma gali būti įvairi, sudaryta iš sienelių, kurios statmenos plokštumai  $X - Y$ .

Nagrinėjant kūnų judėjimą uždareme tūryje įvertinama:

- pasipriešinimo jėga,
- sąveikos jėgos tarp kūnų,
- sąveikos jėgos tarp kūnų ir sienelės,
- trinties jėgos tarp kūnų,
- trinties jėgos tarp sienelės ir kūnų.

$i$  kūno judėjimas plokštumoje  $X - Y$  aprašomas koordinatėmis  $x_i$  bei  $y_i$  ir posūkio kampų  $\varphi_i$ . Tada kūnų judėjimo lygtys [4]:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum F_{xi}, \quad m_i \ddot{y}_i = \sum F_{yi}, \quad I_i \ddot{\varphi}_i = \sum M_i, \quad (1)$$

$m_i$  – kūno masė;  $I_i$  – inercijos momentas;  $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i$  – pagreičiai  $X - Y$  ašių atžvilgiu;  $\ddot{\varphi}_i$  – kampinis pagreitis;  $M_i$  – sukimo momentas;  $F_{xi}, F_{yi}$  – jėgos ašių  $X - Y$  atžvilgiu.

Pasipriešinimo jėgos, veikiančios kūną, nustatomos pagal lygtį:

$$F_{oi} = \frac{1}{2} \rho_i c s_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (2)$$

$\rho_i$  – terpės tankis, kurioje juda kūnas;  $c$  – medžiagos formos koeficientas rutulio formai  $c = 0,5$ ;  $s_i$  – kūno

pasipriešinimo plotas,  $s_i = \pi r_i^2$ ;  $r_i$  – rutuliuko spindulys.

Laikome, kad tarp grūdelių ir sienelės ryšiai yra tamprūs ir klampūs.

Standumo jėgos tarp dviejų sferinių kūnų  $i$  ir  $j$  nustatomos:

$$P_{ij}^t = E_{ekv1} \sqrt{\frac{2r_i r_j}{a^3 (r_i + r_j)}} \delta^{1,5}, \quad (3)$$

$$E_{ekv1} = \frac{2E_i E_j}{E_i + E_j}, \quad (4)$$

$E_{ekv1}$  – ekvivalentinis tamprumo modulis;  $E_i$  ir  $E_j$  –  $i$  ir  $j$  kūnų tamprumo moduliai;  $r_i$  ir  $r_j$  –  $i$  ir  $j$  kūnų spinduliai;  $a$  – konstanta,  $a = 1,55$ ;  $\delta$  – dviejų kūnų centrų suartėjimas:

$$\delta = r_i + r_j - l_{ij}, \quad (5)$$

$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (6)$$

$l_{ij}$  – atstumas tarp dviejų kūnų centrų;  $x_i, x_j, y_i, y_j$  –  $i$  ir  $j$  kūnų masės centro koordinatės.

Kontaktinės jėgos tarp kūno ir sienelės:

$$P_{is}^t = E_{ekv2} \sqrt{\frac{2r_i}{a^3}} \delta^{1,5}, \quad (7)$$

$$E_{ekv2} = \frac{2E_i E_s}{E_i + E_s}, \quad (8)$$

$E_{ekv2}$  – ekvivalentinis tamprumo modulis;  $E_s$  – sienelės tamprumo modulis;  $\delta$  – atstumas tarp rutuliuko centro ir sienelės, kur:

$$\delta = r_i - l_{ik}, \quad (9)$$

$$l_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}, \quad (10)$$

$l_{ik}$  – atstumas tarp rutuliuko centro ir sienelės kontakto taško;  $x_i, y_i$  – kūno masės centro koordinatės;  $x_k, y_k$  – kūno kontakto su sienele koordinatės.

Slopinimo jėga tarp dviejų  $i$  ir  $j$  kūnų lygi:

$$P_{ij}^p = h_{ij} \frac{d\delta}{dt}, \quad (11)$$

$$h_{ij} = \frac{h_i h_j}{h_i + h_j}, \quad (12)$$

$h_{ij}$  – ekvivalentinis slopinimo koeficientas;  $h_i, h_j$  –  $i$  ir  $j$  kūnų slopinimo koeficientas;  $\frac{d\delta}{dt}$  – dviejų kūnų suartėjimo greitis. Jis lygus:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{(x_j - x_i)(\dot{x}_j - \dot{x}_i) + (y_j - y_i)(\dot{y}_j - \dot{y}_i)}{l_{ij}}, \quad (13)$$

$\dot{x}_i, \dot{x}_j, \dot{y}_i, \dot{y}_j$  –  $i$  ir  $j$  kūno greičiai  $X$  ir  $Y$  ašių kryptimis  $\left(\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}; \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}\right)$

Slopinimo jėga tarp rutuliuko formos kūno ir sienelės:

$$P_{is}^p = h_{is} \frac{d\delta}{dt}, \quad (14)$$

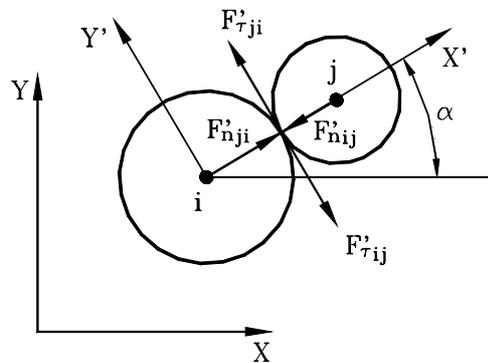
$$h_{is} = \frac{h_i h_s}{h_i + h_s}, \quad (15)$$

$h_{is}$  – ekvivalentinis slopinimo koeficientas;  $h_s$  – sienelės slopinimo koeficientas;  $\frac{d\delta}{dt}$  – kūno suartėjimo su sienele greitis. Jis randamas:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{(x_k - x_i)\dot{x}_i + (y_k - y_i)\dot{y}_i}{l_{ik}}. \quad (16)$$

Koordinatinių sistemoje  $X - Y$  nustatant kontaktinių jėgų projekcijas tarp dviejų vienas kitą veikiančių  $i$  ir  $j$  kūnų viename iš kūnų centrų, pavyzdžiui,  $i$  naudojama lokaliųjų koordinatinių sistema  $X' - Y'$ .  $X'$  ašį brėžiame per  $i$  ir  $j$  kūnų masių centrus (1 pav.).

Kontakto metu tarp dviejų  $i$  ir  $j$  kūnų  $i$  kūną veikia normalinė  $F'_{nij}$  ir tangentinė  $F'_{\tau ij}$  jėgos, kurios lokaliuojoje koordinatinių sistemoje nustatomos:



1 pav. Du vienas kitą veikiantys kūnai lokaliuojoje koordinatinių sistemoje

Fig 1. Two bodies interacting in local coordinate system

$$F'_{nij} = -(P'_{ij} + P'_{ij}{}^p), \quad (17)$$

$$F'_{\tau ij} = -|F'_{nij}|f_{ij}\text{sign}(v'_{ij}), \quad (18)$$

$f_{ij}$  – trinties koeficientas tarp dviejų kūnų;  $v'_{ij}$  – santykinis greitis. Jis skaičiuojamas taip:

$$v'_{ij} = (\dot{x}_j - \dot{x}_i)\sin\alpha - (\dot{y}_j - \dot{y}_i)\cos\alpha + r_i\dot{\phi}_i + r_j\dot{\phi}_j, \quad (19)$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}. \quad (20)$$

Momentai ir jėgų projekcijos tarp  $i$  ir  $j$  kūnų  $X-Y$  koordinačių sistemoje lygūs:

$$F_{Xi} = F'_{nij} \cos\alpha - F'_{\tau ij} \sin\alpha, \quad (21)$$

$$F_{Yi} = F'_{nij} \sin\alpha + F'_{\tau ij} \cos\alpha, \quad (22)$$

$$F_{Xj} = F'_{nji} \cos\alpha - F'_{\tau ji} \sin\alpha, \quad (22)$$

$$F_{Yj} = F'_{nji} \sin\alpha + F'_{\tau ji} \cos\alpha, \quad (24)$$

$$M_i = F'_{\tau ij}r_i, \quad (25)$$

$$M_j = -F'_{\tau ji}r_j, \quad (26)$$

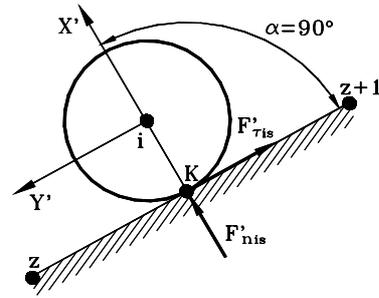
$$F'_{nji} = -F'_{nij}, \quad (27)$$

$$F'_{\tau ji} = -F'_{\tau ij}. \quad (28)$$

Kiekviena sienelė plokštumoje  $X-Y$  yra aprašoma dviejų galinių taškų koordinatėmis  $(x_i, y_i)$  ir  $(x_j, y_j)$ . Pirmasis taškas  $z$  parenkamas toks, kad sukant sienelę apie šį tašką prieš laikrodžio rodyklę posūkio kampas iki kūno būtų mažiausias. Kitas sienelės galas pažymimas vienetu didesniu skaičiumi –  $z+1$  (2 pav.). Taip numeruoti reikia tam, kad gautume ribojamą šiomis sienelėmis tūrį.

Nustatant kontaktinių jėgų projekcijas tarp rutulio formos kūno ir sienelės, naudojama lokaloji koordinačių  $X'-Y'$  sistema. Šios sistemos  $X'$  ašis nukreipta statmenai nagrinėjamai sienelei.  $Y'$  ašis nukreipta sienelės galo su mažesniu numeru kryptimi. Lokaliosios koordinačių sistemos pradžia – rutulio masės centre.

Normalinės ir tangentinės jėgos, veikiančios tarp kūno ir sienelės lokalojoje koordinačių sistemoje, aprašomos:



2 pav. Kūno ir sienelės sąveika lokalojoje koordinačių sistemoje

Fig 2. The interaction of a body with a wall in local coordinate system

$$F'_{nis} = P'_{is} + P'_{is}{}^p, \quad (29)$$

$$F'_{\tau is} = |F'_{nis}|f_{is}\text{sign}(v'_{is}), \quad (30)$$

$f_{is}$  – trinties koeficientas tarp sienelės ir kūno;  $v'_{is}$  – santykinis kūno greitis jo kontakto su senele taške  $K$  lokalojoje koordinačių sistemoje:

$$v'_{is} = -\dot{x}_i \sin\alpha + \dot{y}_i \cos\alpha - r_i\dot{\phi}_i, \quad (31)$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}. \quad (32)$$

Lygčių sistema sprendžiama Rungės ir Kuto metodu. Integravimo žingsnis turi būti pakankamai mažas, kas labai prailgina sprendimo laiką. Sprendimo laikui sumažinti kiekvienam kūnui nustatomas slopinimo sluoksnis:

$$dr = v_0\tau, \quad (33)$$

$v_0$  – būdingas kūno judėjimo greitis;  $\tau$  – integravimo žingsnis.

Kiekvieno kūno spindulys tada bus:

$$r_i = r_{0i} + dr_i, \quad (34)$$

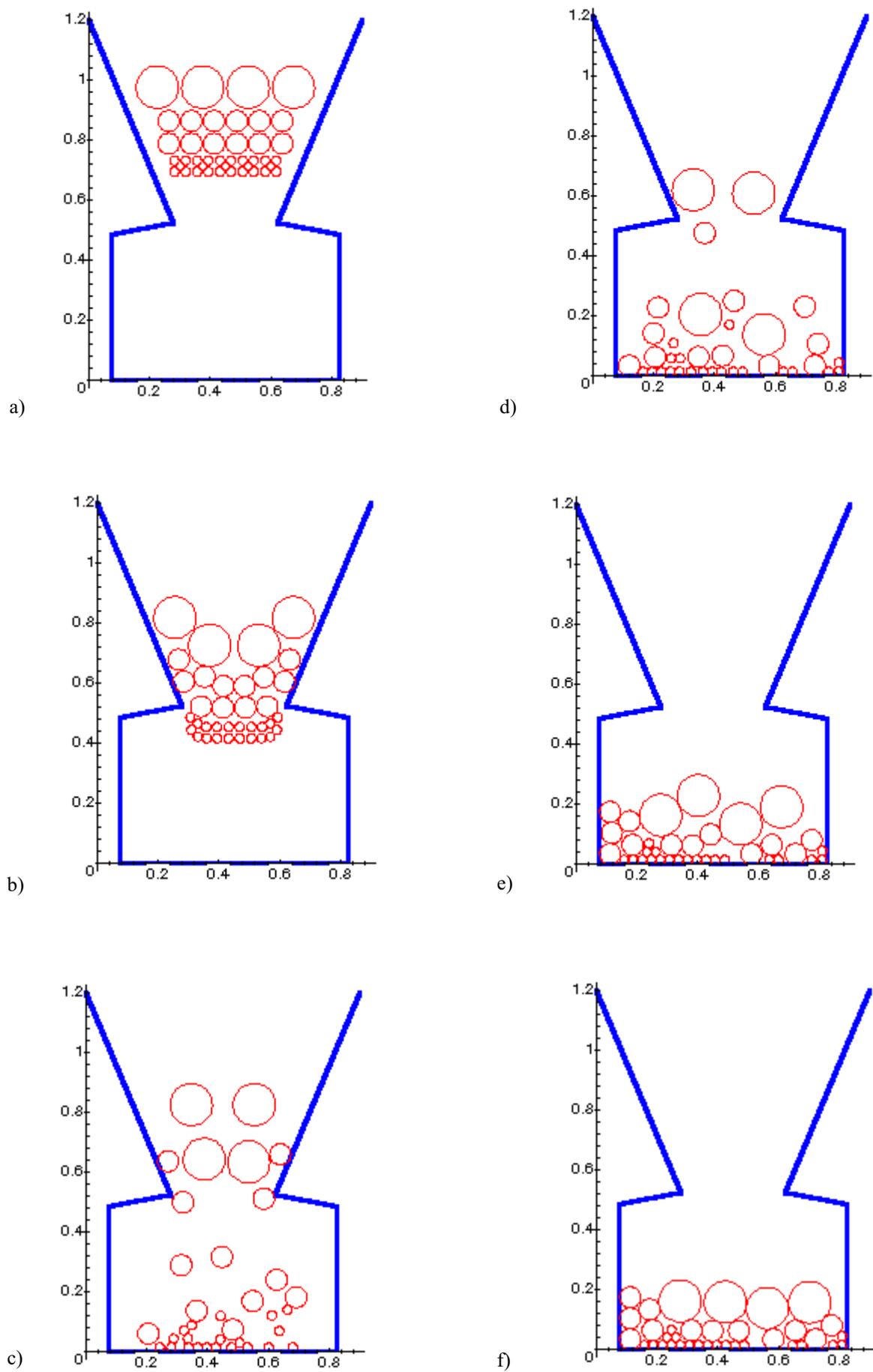
kur  $r_{0i}$  – pradinis  $i$  kūno spindulys.

Esant kontakto taškui slopinimo zonoje, kontakte veikia slopinimo jėga:

$$P_{sl} = h_{ekv} \frac{d\delta}{dt}, \quad (35)$$

$$h_{ekv} = -\frac{m_i}{\tau} \ln\left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right), \quad (36)$$

$h_{ekv}$  – ekvivalentinis slopinimo koeficientas;  $\varepsilon$  –



3 pav. Biriujų mineralinių medžiagų judėjimo bunkeryje fragmentai  
 Fig 3. Fragments of motion of bulk mineral material in a bunker

parametras, rodantis, kiek kartų sumažėja kūnų suartėjimo greitis, kol kontakto taškas yra slopinimo sluoksnio zonoje,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

### 3. Kūnų judėjimo uždarame tūryje pavyzdys

Pagal kūnų judėjimo uždarame tūryje sudarytą metodiką parengta programa kūno judėjimo greičiams ir koordinatėms nustatyti. Duomenis, gautus naudojant kompiuterinę programą „Maple V“, pateikiame kaip grafinį vaizdą [5].

Norint padidinti integravimo žingsnį, o kartu sumažinti skaičiavimo laiką, imamas minimalus kūno spindulys – 15 mm, o integravimo žingsnis –  $10^{-6}$  s. Kūno posūkio kampas  $\varphi_i$  neįvertinamas, kadangi kūnas rutulio formos ir jo posūkio kampas šiuo atveju yra nesvarbus.

(3 pav.) pateikto pavyzdžio skaičiavimui panaudoti tokie duomenys: slopinimo sluoksnio storis lygus integravimo žingsniui; kūnų skaičius – 36 vnt.; pradiniai kūnų judėjimo greičiai  $X$  ašimi  $v_X = 0$  m/s,  $Y$  ašimi  $v_Y = -2,5$  m/s; kūnų medžiagos tankis –  $1900$  kg/m<sup>3</sup>; trinties koeficientas tarp kūnų  $f_{ij} = 0,3$ ; trinties koeficientas tarp kūnų ir sienelės  $f_{is} = 0,4$ ; trijų dydžių kūnų (rutuliukų) spinduliai atitinkamai: 15, 35, 70 mm; kūnų tamprumo koeficientas –  $21 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>; visų sienelių tamprumo koeficientas –  $20 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>.

### 4. Išvados

1. Sukurtas matematinis modelis leidžia nagrinėti biringią medžiagą kaip atskirų kūnų sąveiką nustatant jų judėjimo greičius ir koordinates.

2. Matematinis modelis leidžia keisti kūnų ir sienelių, ribojančių tūrį, kiekį, dydį ir fizikines savybes.

3. Gauti biriosios medžiagos nagrinėjimo uždarame tūryje rezultatai yra adekvatūs fizikiniams procesams.

### Literatūra

1. Automobilių kelių tiesimo ir darbų priėmimo taisyklės. Asfaltbetonio dangos. DAT.AD-96. Vilnius: VĮ „Problematika“, 1997. 76 p.
2. R. Vitkūnas, H. Sivilevičius. Biriųjų medžiagų segregacijos rūšys ir modeliai // Tarptautinės konferencijos „Transbaltica-98“, įvykusios Vilniuje 1998 m. balandžio 2–4 d., mokslinių pranešimų rinkinys. V.: Technika, 1998, p. 124–129.
3. V. Doroševas. Medžiagų birumo atstatymo dinaminio procesų tyrimas ir optimizavimas: Daktaro disertacija. Kaunas: Technologija, 1996. 167 p.

4. А. И. Лурье. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961. 825 с.
5. В. Аладьев, М. Богдьявичюс. Применение пакета Maple V для решения физико-технических задач // Tarptautinės konferencijos „Transbaltica-99“, įvykusios 1999 m. balandžio 8–9 d., mokslinių pranešimų rinkinys. V.: Technika, 1999, p. 313–328.

Įteikta 2000 02 21

### MATHEMATICAL SIMULATION OF BULK MATERIAL MOTION IN CLOSED VOLUMES

M. Bogdevičius, R. Vitkūnas

S u m m a r y

Asphalt concrete mixture is used for road pavements most often. The asphalt concrete mixture should be homogeneous for seeking maximum duration of exploitation. The achievement of this purpose depends on grain composition of mineral components, ratio of these components with bitumen and also on the quality of mixing of these components. The grain composition of mineral components depends on different distribution of value of grains in the technological installations. The principles of coefficient distribution of grains are analyzed in detail, (they depend on: the grain structure, density of a body, coefficient of friction between bodies or between bodies and walls, shape of bodies and walls of a bunker). There is a version of consideration of the problem – the creation of a mathematical simulation and the solution of problems by it.

The motion of bulk materials in a bunker is considered as the motion of separate bodies in a closed volume. We assume that rigid bodies are spheres. Such shape enables to describe value of a body by one value - radius or diameter. Studying motion of bodies in closed volumes we take into account the resistance force; the force of interaction between bodies, between a body and a wall, friction forces between bodies and between a body and a wall.

Body element number  $i$  motion in coordinate system  $X - Y$ , is circumscribed in coordinates  $x_i$ ,  $y_i$  turning angle  $\varphi_i$  (1). and resistance forces (2). Forces of interaction between two spherical bodies are elastic and plastic. We circumscribe elastic contact forces of interaction between bodies (3), between the body and a wall (7). Viscid contact forces of interaction between bodies is circumscribed (11) and between a body and a wall (14).

Establishing projections of contact forces between two bodies we use local coordinate system  $X' - Y'$  (Fig 1). Between bodies normal  $F'_{nij}$  (17) and tangent  $F'_{vij}$  (18) forces act during a contact. These forces are transferable in coordinate system  $X - Y$  (21–28).

There is local coordinate system at the interaction of a body with a wall (Fig 2). At the interaction of a body with a wall normal  $F'_{nis}$  (29) and tangent  $F'_{vis}$  (30) forces act.

Described equations are solved by the method of Runge-Kutt. To reduce the time of the solution of a problem a layer of damping (33) for every body is set and step of integration is increased.

The shape of a body is a sphere. Turning angles of the bodies  $\varphi_i$  are invaluable. In an example (Fig 3) the moments of motion of 36 bodies in capacity restricted by 7 walls are rotund. Initial velocity of motion of bodies  $v_Y = -2.5m/s$ , density of bodies  $\rho = 1900kg/m^3$ , radii accordingly 15, 35, 70 mm, coefficient of friction between bodies  $f_{ij} = 0.3$ , coefficient of friction between a body and a wall  $f_{is} = 0.4$ . Conclusions on activity:

- the mathematical simulation enables to learn the motion of bulk material as the motion of interacting separate bodies;

- the model enables to change the number, value and physical properties of bodies and walls;

- the obtained outcomes of the analysis by mathematical simulation are adequate to physical properties.

### **MARIJONAS BOGDEVICHIUS**

Doctor, Associate Professor and Head (1995) of Department of Transport Technology Equipment of Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Plytinės g. 27, LT-2040 Vilnius, Lithuania. E-mail: marius@ti.vtu.lt

Doctor of Technical science, Moscow Highway Institute, 1988. First degree in Mechanical Engineering (building and road machines and equipment), Vilnius Civil Engineering Institute (VISI), now VGTU), 1981. Probation: Stuttgart University (Germany), 1990-1991. Academician of International Academy of Noosphere (Sustainable Development) (1998). Publications: author of 22 inventions, more than 80 scientific works. Research interests: dynamics of mechanical, hydraulic and pneumatic systems, computations mechanics, transport traffic safety.

### **ROLANDAS VITKŪNAS**

Master of Science (Transport Engineering) (1995), doctoral student (Transport Engineering), Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Plytinės g. 27, LT-2040, Vilnius, Lithuania. E-mail: rolas@ti.vtu.lt

First degree in Mechanical Engineering (building and road machines and equipment), Vilnius Technical University (VTU, now VGTU), 1993. Publications: author of 5 scientific works. Research interests: transport technology equipment.