О сходимости аппроксимаций Чебышёва–Паде для вещественных алгебраических функций

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

27 сентября 2010 г.

Аннотация

В работе анонсируются новые результаты о сходимости аппроксимаций Чебышёва–Паде для вещественных алгебраических функций, заданных на отрезке $[-1,1]$. Скорость сходимости аппроксимаций на отрезке и в соответствующей "максимальной" области мероморфности заданной функции характеризуется в терминах некоторой теоретико-потенциальной задачи равновесия.

Библиография: 25 названий.

1

Аппроксимации Паде рядов Чебышёва привлекают в последнее время особое внимание. Такие рациональные аппроксимации нашли самые разнообразные применения в различных задачах прикладной математики, теоретической физики, механики, геофизики (см. [1], [2], [3], [5], [6], [7], [8]). Фактически аппроксимации Чебышёва–Паде (далее – АПЧ) уже стали неотъемлемой частью научных и технических расчетов, отражением чего стало исследование оптимальных методов их вычисления (см. обзор [6]) и создание специальной программы для их нахождения в системе Maple.

В отличие от классического случая степенного ряда два стандартных способа – Фробениуса и Бейкера – определения АПЧ приводят к существенно различным результатам (см. [1], [9], [10], а также п. 2 ниже). В [9] и [10] для общих ортогональных разложений были рассмотрены оба способа построения диагональных аппроксимаций Паде и доказаны теоремы о сходимости таких рациональных аппроксимаций для произвольной марковской функции (см. (6)). Настоящая работа является естественным развитием работ [9] и [10]: вместо марковской функции мы рассматриваем здесь произвольную вещественную алгебраическую функцию f, заданную на единичном отрезке $[-1,1]$ своим разложением в ряд Фурье–Чебышёва, и исследуем сходимость соответствующих нелинейных и линейных аппроксимаций. Основной результат работы – теорема 3 о сходимости по емкости диагональных АПЧ для функций из указанного класса. Эта теорема является аналогом известной теоремы Шталя [11] о сходимости по емкости диагональных аппроксимаций Паде для алгебраических функций. Скорость

[0]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317 и № 09-01-12160-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8033.2010.1).

сходимости АПЧ на самом отрезке $[-1,1]$ и в дополнении к соответствующему функции f "стационарному" компакту охарактеризована в терминах смешанной (гриново-логарифмической) теоретико-потенциальной задачи равновесия. Отметим, что нелинейным и линейным АПЧ соответствуют различные теоретико-потенциальные задачи и, вообще говоря, различные стационарные компакты. Эти компакты совпадают только в исключительных случаях, например, для марковской функции $f=\widehat{\sigma}$, носитель меры которой – отрезок вещественной прямой (см. ниже теорему A).

2

Приведем основные определения и обозначения. Пусть $E=[-1,1]$, $T_n(x)$ – полиномы Чебышёва, ортонормированные на E с весом $(1-x^2)^{-1/2}$, f – произвольная суммируемая на E вещественная функция, заданная своим разложением в ряд Фурье–Чебышёва:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad c_k=c_k(f)=\int_{-1}^{1} f(x)T_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k=0,1,\dots \tag{1}$$

(другими словами заданы коэффициенты Фурье функции $f\in L_1$ по системе $\{T_k(x)\}$). Если f – голоморфная на E функция, то ряд (1) сходится локально равномерно внутри максимального канонического (относительно E) эллипса голоморфности f.

Фиксируем произвольную пару целых чисел $L,M\geqslant 0$. Через $\mathscr{R}(L,M)$ обозначим класс всех рациональных функций вида $r=p/q$, где p,q – многочлены с вещественными коэффициентами, $\deg p\leqslant L$, $\deg q\leqslant M$, $q\not\equiv 0$. Отметим, что число свободных параметров, определяющих функции класса $\mathscr{R}(L,M)$, равно $L+M+1$.

Напомним два стандартных способа определения аппроксимаций Чебышёва–Паде функции f (или аппроксимаций Паде ряда (1); см. [1, часть 2, § 1.6]). Первый способ основан на нелинейной (относительно коэффициентов искомой рациональной функции) схеме Бейкера, второй – на линейной схеме Фробениуса.

Голоморфная на E рациональная функция $F_{L,M}$ класса $\mathscr{R}(L,M)$, разложение которой в ряд Фурье–Чебышёва имеет вид

$$F_{L,M}(x)=c_0+c_1T_1(x)+\dots+c_{L+M}T_{L+M}+\cdots,$$

где $c_k=c_k(f)$, $k=0,1,\dots,L+M$, называется *нелинейной аппроксимацией Паде* типа (L,M) ряда (1) (нелинейной АПЧ функции f). Другими словами, рациональная функция $F_{L,M}=p/q$ определяется из системы (нелинейных) уравнений

$$c_k(F_{L,M})=c_k(f), \qquad k=0,1,\dots,L+M; \tag{2}$$

подлежат определению из этой системы коэффициенты многочленов p и q. Система (2) не всегда имеет решение и, тем самым, нелинейная аппроксимация Чебышёва–Паде может не существовать. Так как полиномы Чебышёва являются полиномами Фабера для отрезка E, то существование нелинейной аппроксимации Чебышёва–Паде тесно связано с существованием аппроксимации Паде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k=c_k(f)$, обладающей определенными свойствами (см. [12], [13], [14]).

Линейной аппроксимацией Паде типа (L, M) ряда (1) (линейной АПЧ функции f) называется рациональная функция $\Phi_{L,M}$ класса $\mathscr{R}(L, M)$, представимая в виде P/Q, где P и Q – произвольные многочлены ($\deg P \leqslant L$, $\deg Q \leqslant M$, $Q \not\equiv 0$), удовлетворяющие соотношениям

$$c_k(Qf - P) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, L + M. \tag{3}$$

Определяющая функцию $\Phi_{L,M} = P/Q$ система (3) – это система линейных однородных уравнений относительно коэффициентов многочленов P и Q. Число уравнений системы равно $L + M + 1$, число неизвестных равно $L + M + 2$. Поэтому система (3) всегда имеет нетривиальное решение; легко видеть, что этому решению соответствует $Q \not\equiv 0$. Единственность такой аппроксимации гарантировать нельзя (см., например, [15]).

Настоящая работа посвящена диагональным АПЧ; для простоты рассуждений мы ограничимся аппроксимациями типа $(n - 1, n)$.

Через $M(E)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат E. Пусть K – произвольный компакт со связным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap E = \varnothing$ и область $D_K = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ регулярна относительно решения задачи Дирихле, $g_K(z, t)$ – соответствующая области D_K функция Грина с особенностью в точке $z = t \in D_K$. Для меры $\mu \in M(E)$ определены логарифмический и гринов (по отношению к компакту K) потенциалы:

$$V^\mu(z) = \int_{-1}^{1} \log \frac{1}{|z - x|}\, d\mu(x), \qquad G_K^\mu(z) = \int_{-1}^{1} g_K(z, x)\, d\mu(x), \qquad z \notin E$$

(полагаем $g_K(z, x) \equiv 0$ при $z \in K$, $x \in E$). Пусть $\theta \geqslant 0$ – произвольное фиксированное число. Для фиксированного компакта K существует *единственная* мера $\lambda(\theta) = \lambda_K(\theta) \in M(E)$, минимизирующая функционал энергии

$$J_\theta(\mu; K) = \iint \left(\theta \log \frac{1}{|x - t|} + g_K(x, t) \right) d\mu(x)\, d\mu(t) = \int \bigl(\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x) \bigr)\, d\mu(x) \tag{4}$$

в классе всех мер $\mu \in M(E)$. Мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M(E)$) является *равновесной мерой* для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M(E)$, для которой имеет место соотношение равновесия

$$\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \text{const}, \qquad x \in E, \tag{5}$$

$w(\theta) = w_K(\theta)$ – соответствующая *постоянная равновесия*; при этом $J_\theta(\lambda; K) = w(\theta)$.

3

В [9] и [10] была изучена сходимость нелинейных аппроксимаций $F_n = F_{n-1,n}$ и аппроксимаций Фробениуса $\Phi_n = \Phi_{n-1,n}$ типа $(n - 1, n)$ для общих ортогональных разложений *марковских* функций

$$\widehat{\sigma}(z) = \int_F \frac{d\sigma(x)}{z - x}, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \tag{6}$$

где $F = [c, d] \subset \mathbb{R} \setminus E$, σ – положительная борелевская мера на F, $\sigma' = d\sigma/dx > 0$ почти всюду (п.в.) на F. Скорость сходимости последовательностей F_n и Φ_n к функции $f = \widehat{\sigma}$ в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [c, d]$ полностью характеризуется в терминах равновесной меры $\lambda(\theta) \in M(E)$ соответственно для $\theta = 1$ и $\theta = 3$ следующим образом.

Теорема A ((см. [9], [10])). *Если $\sigma' > 0$ п.в. на $F = [c, d] \subset \mathbb{R} \setminus E$, то локально равномерно в области $D \setminus E$*

$$\lim_{n\to\infty} \left|(\widehat{\sigma} - f_n)(z)\right|^{1/2n} = \exp\left(-G_F^{\lambda(\theta)}(z)\right) < 1, \tag{7}$$

где $\theta = 1$ для $f_n = F_n$ и $\theta = 3$ для $f_n = \Phi_n$.

Напомним (см. [16]), что для наилучших в равномерной метрике на отрезке E рациональных аппроксимаций $R_n = R_{n-1,n}$ функции $\widehat{\sigma}$ соотношение (7) справедливо с $\theta = 0$.

Обозначим через $\mu(Q)$ меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q: $\mu(Q) = \sum\limits_{\zeta:Q(\zeta)=0} \delta_\zeta$, где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ. Пусть $\widetilde{\mu}$ – выметание меры μ из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на F. Тогда в условиях теоремы A для знаменателей $Q_n(z;\theta)$, $\theta = 1, 3, 0$, соответствующих рациональных функций F_n, Φ_n, R_n имеем:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n(\cdot;\theta)) \to \widetilde{\lambda}(\theta), \qquad n \to \infty,$$

где сходимость мер понимается в слабой топологии.

Отметим, что развитые в [9], [10] методы позволяют легко доказать аналог теоремы A (с заменой равномерной сходимости (7) на сходимость по емкости) и для случая, когда F состоит из нескольких отрезков, а $f = \widehat{\sigma} + r$, где $\widehat{\sigma}$ – марковская функция (6), r – вещественная рациональная функция, голоморфная на E.

4

Введем определения и обозначения, связанные с классом аналитических функций, рассматриваемых в настоящей работе.

Компакт K со связным дополнением D_K в $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *допустимым* для заданной вещественной алгебраической функции f, голоморфной на отрезке E, если $K \cap E = \varnothing$ и f продолжается с отрезка E в область D_K как однозначная мероморфная функция. Множество всех допустимых компактов для функции f обозначим через $\mathscr{K}_f$.

Через $\mathscr{F}(E)$ обозначим класс вещественных алгебраических функций f, голоморфных на E и удовлетворяющих следующим двум условиям:

(1) существует конечное множество различных точек $\Sigma_f = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, $m = m(f) \geqslant 2$, такое, что: Σ_f симметрично относительно вещественной прямой; функция f продолжается (с отрезка E) как многозначная аналитическая функция в область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_f$; каждая точка $b_j \in \Sigma_f$ является точкой ветвления функции f;

(2) существует по-крайней мере один допустимый компакт $K \in \mathscr{K}_f$ такой, что K симметричен относительно вещественной прямой, состоит из конечного числа кусочно аналитических дуг и на любой открытой дуге, принадлежащей K, скачок функции f отличен от тождественного нуля.

Отметим, что классу $\mathscr{F}(E)$ принадлежат, например, следующие функции, не являющиеся марковскими:

$$\sqrt{(z-b)(z-\overline{b})}, \quad \sqrt[3]{(z-b)(z-\overline{b})(z-a)},$$

где $\operatorname{Im} b > 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus E$ и выбрана надлежащая ветвь алгебраической функции.

В дальнейшем функция $f \in \mathscr{F}(E)$ предполагается фиксированной.

5

Хорошо известно (см. [11], [19]), что при доказательстве сходимости диагональных аппроксимаций Паде для алгебраических функций ключевую роль играет существование допустимого (для заданной функции) компакта, обладающего так называемым свойством *стационарности* (или S-*свойством*). Это понятие оказывается тесно связанным с соответствующей теоретико-потенциальной задачей равновесия. Приведем определение S-свойства допустимого компакта, соответствующего рассматриваемой задаче равновесия (5).

Определение 1. Пусть параметр $\theta \geqslant 0$. Будем говорить, что (не разбивающий плоскость и состоящий из конечного числа кусочно-аналитических дуг) допустимый компакт $F = F(\theta) \in \mathscr{K}_f$ обладает свойством *симметрии* (или S-*свойством*), если:

$$\frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \qquad \zeta \in F^0, \tag{8}$$

где $\lambda = \lambda_F(\theta)$ – соответствующая равновесная мера, F^0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту F, $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон F^0.

Пусть параметр $\theta = 1$, $\lambda = \lambda_K(1) \in M(E)$ – равновесная мера, соответствующая произвольному компакту $K \in \mathscr{K}_f$, $w = w_K(1)$ – соответствующая постоянная равновесия (см. (5)): $V^\lambda(x) + G_K^\lambda(x) \equiv w$, $x \in E$; при этом $J(\lambda; 1) = \min\limits_{\mu \in M(E)} J(\mu; 1) = w$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если функция $f \in \mathscr{F}(E)$, то существует единственный компакт $F = F(1) \in \mathscr{K}_f$ такой, что*

$$J(\lambda_F; 1) = \max_{K \in \mathscr{K}_f} J(\lambda_K; 1). \tag{9}$$

Стационарный компакт F состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает S-свойством (8)*, где $\lambda = \lambda(1)$ – соответствующая равновесная мера.*

Теорема 1 доказывается в два этапа в соответствии со следующей схемой. Сначала с помощью геометрических соображений, основанных на замене при $\theta = 1$ функционала энергии (4) меры $\lambda \in M(E)$ на обобщенный (по отношению к допустимому компакту $K \in \mathscr{K}_f$) трансфинитный диаметр E доказывается, что максимум в правой части (9) достаточно искать среди тех допустимых компактов, которые лежат вне максимального канонического эллипса голоморфности f. Такое семейство компактно в хаусдорфовой метрике, поэтому существует допустимый компакт F, удовлетворяющий соотношению (9). Затем с помощью вариационного метода аналогично [18] устанавливается, что этот экстремальный компакт F является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S-свойство (8).

Пусть теперь параметр $\theta = 3$, $\lambda = \lambda_K(3) \in M(E)$ – равновесная мера, соответствующая произвольному компакту $K \in \mathscr{K}_f$, $w = w_K(3)$ – соответствующая постоянная равновесия: $3V^\lambda(x) + G_K^\lambda(x) \equiv w$, $x \in E$; при этом $J(\lambda; 3) = \min\limits_{\mu \in M(E)} J(\mu; 3) = w$. Пусть $\rho(f)$ – индекс максимального канонического эллипса, в который функция f продолжается с отрезка E как голоморфная функция. Справедлива следующая

Теорема 2. *Если функция $f \in \mathscr{F}(E)$ и $\rho(f) > \sqrt{2}$, то существует единственный компакт $F = F(3) \in \mathscr{K}_f$ такой, что*
$$J(\lambda_F; 3) = \max_{K \in \mathscr{K}_f} J(\lambda_K; 3). \tag{10}$$
Стационарный компакт F состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает S-свойством (8), где $\lambda = \lambda(3)$ – соответствующая равновесная мера.

Отметим, что параметрам $\theta = 1$ и $\theta = 3$ соответствуют существенно разные векторные теоретико-потенциальные задачи равновесия (см. ниже п. 8); ограничение $\rho(f) > \sqrt{2}$ связано именно с этим различием.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathscr{F}(E)$. Тогда для любого компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$*
$$\bigl|(f - f_n)(z)\bigr|^{1/2n} \xrightarrow{\text{cap}} \exp\bigl(-G_F^{\lambda(\theta)}(z)\bigr) < 1, \qquad z \in K, \tag{11}$$
где $\theta = 1$, $F = F(1)$ для $f_n = F_n$ и $\theta = 3$, $F = F(3)$ для $f_n = \Phi_n$.

Отметим, что для $\theta = 1$ утверждение теоремы 3 имеет место, вообще говоря, по некоторой подпоследовательности, для которой существуют нелинейные диагональные АПЧ (см. [12], [14], [20], [21]).

Таким образом в условиях теоремы 3 $f_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ на компактных подмножествах области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ и
$$\frac{1}{n}\mu(Q_n(\cdot, \theta) \to \widetilde{\lambda}(\theta), \qquad n \to \infty,$$
где $\widetilde{\lambda}(\theta)$ – выметание меры $\lambda = \lambda(\theta) \in M(E)$ из области D на $\partial D = F$.

Теорема 3 доказывается по общей схеме, предложенной в [11], [19] и основанной на S-свойстве (8) соответствующего стационарного компакта. Отметим, что из (11) вытекает, что каждый полюс f в D притягивает по-крайней мере столько полюсов f_n, какова его кратность.

Таким образом, для функции f класса $\mathscr{F}(E)$ компакты $F(1)$ и $F(3)$ в случае соответственно нелинейных и линейных аппроксимаций Чебышёва–Паде играют роль отрезка $[c, d]$, соответствующего марковской функции $\widehat{\sigma}$, $\operatorname{supp} \sigma = [c, d]$ (см. (6)).

Отметим, что при $\theta = 1$ стационарный компакт $F(1)$ является образом компакта Шталя для степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, при отображении, задаваемом функцией Жуковского $z = (w + w^{-1})/2$.

6

Пусть параметр $\theta = 1$. Если соответствующий стационарный компакт $F = F(1)$ состоит из $s = s(1)$ непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих точки ветвления $b'_1, \dots, b'_{2s} \in \Sigma_f$ функции f, то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с *четырехлистной* римановой поверхностью рода $g = s - 1$.

Построим сначала двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ следующим образом. Возьмем два экземпляра римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку $E = [-1, 1]$, и переклеим по разрезу. Полученная двулистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ эквивалентна римановой сфере. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом: $u(z^{(1)}) = G_F^{\lambda_F}(z)$, $u(z^{(2)}) = w_F - V^{\lambda_F}(z)$. Непосредственно из условия равновесия (5) вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \setminus \{\infty^{(2)}\})$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $F^{(1)}$ и $u(z^{(2)}) = \log|z| + w_F + o(1)$ при $z^{(2)} \to \infty^{(2)}$. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанных по компакту $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим четырехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_1$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с переменой знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_3$ всюду кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$, где она имеет логарифмические особенности: $\log|z|$ при $\mathbf{z} \to \infty^{(2)}$ и $-\log|z|$ при $\mathbf{z} \to \infty^{(3)}$. Следовательно, $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$, $\Omega(\mathbf{z}) = \displaystyle\int_{b_1'}^{\mathbf{z}} d\Omega$, где $d\Omega(\mathbf{z})$ – (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_1$ с чисто мнимыми периодами и особенностью вида $1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ и вида $-1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(3)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$: $F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z}) = 0\} \setminus E$.

Отметим, что $u(\mathbf{z}) = g_{F^{(1)}}(\mathbf{z}, \infty^{(2)})$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus F^{(1)}$ с особенностью в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$, а $w_F = \gamma^{(2)}$ – постоянная Робена для этой функции Грина. Тем самым задача о максимуме постоянной w_F соответствует задаче о минимуме $e^{-\gamma}$, т.е. минимуме логарифмической емкости.

7

Если для параметра $\theta = 3$ стационарный компакт $F = F(3)$ состоит из $s = s(3)$ непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих точки ветвления $b_1'', \dots, b_{2s}'' \in \Sigma_f$ функции f, то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с *шестилистной* римановой поверхностью рода $g = s - 1$.

Построим сначала трехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)} \cup \mathfrak{R}^{(3)}$ следующим образом. Возьмем три экземпляра римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$. На первом проведем разрез по отрезку $E = [-1, 1]$, на втором – по E и дугам ℓ_j, $j = 1, \dots, s$, составляющим F, на третьем – только по дугам ℓ_j. Три полученных экземпляра римановой сферы переклеиваются друг с другом следующим образом. Второй подклеивается к первому по разрезу, соответствующему отрезку E, третий – ко второму по разрезам, соответствующим дугам ℓ_j. Полученная трехлистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)} \cup \mathfrak{R}^{(3)}$ эквивалентна римановой сфере с $g = s - 1$ ручками. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом: $u(z^{(1)}) = 2G_F^{\lambda_F}(z)$, $u(z^{(2)}) = G_F^{\lambda_F}(z) + w_F - 3V^{\lambda_F}(z)$, $u(z^{(3)}) = -G_F^{\lambda_F}(z) + w_F - 3V^{\lambda_F}(z)$. Непосредственно из условия равновесия (5) и S-свойства (8) компакта F вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \cup E^{(3)}) \setminus \{\infty^{(2)}, \infty^{(3)}\}$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $K = F^{(1)} \cup E^{(3)}$ и $u(z^{(2)}) = 3\log|z| + c_2 + o(1)$ при $z^{(2)} \to \infty^{(2)}$, $u(z^{(3)}) = 3\log|z| + c_3 + o(1)$ при $z^{(3)} \to \infty^{(3)}$. Отсюда вытекает, что $u(\mathbf{z}) \equiv 3W(\mathbf{z})$, где $W(\mathbf{z}) = g_K(\mathbf{z}, \infty^{(2)}) + g_K(\mathbf{z}, \infty^{(3)})$, $g_K(\mathbf{z}, \cdot)$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus K$ с особенностью в соответствующей точке. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанных по отрезку $E^{(3)}$ и компакту $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим шестилистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_3$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)} \cup E^{(3)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с заменой знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_1$ всюду кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}, \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$, где она имеет логарифмические особенности: $3\log|z|$ при

$\mathbf{z} \to \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$ и $-3\log|z|$ при $\mathbf{z} \to \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$. Следовательно, $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$, $\Omega(\mathbf{z}) = \displaystyle\int_{b_1''}^{\mathbf{z}} d\Omega$, где $d\Omega(\mathbf{z})$ – (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_1$ с чисто мнимыми периодами и особенностями вида $1/z$ в точках $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$ и вида $-1/z$ в точках $\mathbf{z} = \infty^{(4)}, \infty^{(5)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$: $F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z}) = 0\} \setminus E$.

Отметим, что для параметра $\theta = 3$ постоянная $w_F = \gamma(\infty^{(2)}) + \gamma(\infty^{(3)}) + 2g_D(\infty^{(2)}, \infty^{(3)})$, где $\gamma(\infty^{(2)})$, $\gamma(\infty^{(3)})$ – постоянные Робена в точках $\infty^{(2)}$ и $\infty^{(3)}$ для функции Грина области $D = \mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \cup E^{(3)})$.

Для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$ величина $\gamma(a_1) + \gamma(a_2) + 2g_D(a_1, a_2)$ равна *приведенному модулю* области D относительно двух точек a_1, a_2. Это понятие (для произвольного набора точек) было введено В. Н. Дубининым в [22], [23] геометрическим образом через модуль плоского конденсатора. Тем самым экстремальная константа $w(F)$ (т.е. максимум минимума энергии) соответствует максимальному *приведенному модулю* (относительно двух точек).

8

Непосредственно из результатов работ [11] и [19] вытекает, что для *наилучших* в равномерной метрике на отрезке $[-1, 1]$ рациональных аппроксимаций $f_n = R_n$ функции $f \in \mathscr{F}(E)$ также справедливо соотношение (11), где $\theta = 0$, $F = F(0)$ – стационарный компакт, соответствующий задаче равновесия (5) с $\theta = 0$ и обладающий S-свойством (8), $\lambda = \lambda_F(0)$ – соответствующая равновесная мера. В этом случае функция $u(z^{(1)}) = w_F - G^{\lambda}(z)$ продолжается через разрез, проведенный по отрезку E, на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ с переменой знака. Отсюда уже легко вытекает, что задача о максимуме постоянной w_F эквивалентна задаче о минимуме емкости конденсатора $(F^{(1)}, F^{(2)})$.

Таким образом, все три стационарных (в заданном классе $\mathscr{K}_f$) компакта $F(1), F(3), F(0)$ обладают S-свойством (8). Это свойство, тем самым, носит вполне универсальный характер.

Отметим в заключение, что параметрам $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$ соответствуют существенно разные векторные (размера 2×2) теоретико-потенциальные задачи равновесия. При $\theta = 0$ матрица взаимодействия имеет вид $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, при $\theta = 1$ матрица $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, при $\theta = 3$ матрица $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательствам теорем 1, 2, 3 предполагается посвятить работы [24] и [25].

Список литературы

[1] G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, Pade approximants. Part I. Basic theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol 13, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981; Pade approximants. Part II. Extensions and applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol 14, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981

[2] I. V. Andrianov, Application of Padé-approximants in perturbation methods Advances in Mechanics, 1991, vol 14, no. 2, pages 3–25

[3] Л. А. Книжнерман, Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье–Чебышёва, Изв. АН СССР, сер. физика Земли, 1984, no. 11, pages 119–123

[4] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, The Caratheodory–Fejer method for real rational approximation, SIAM J. Numer. Anal., vol 20, 1983, no. 2, pages 420–436

[5] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, Padé, stable Padé, and Chebyshev–Padé approximation, Algorithms for Approximation, Shrivenham, 1985, vol 10, Oxford Univ. Press, New York, 1987, pages 227–264

[6] G. L. Litvinov, Error autocorrection in rational approximation and interval estimates. A survey of results, Cent. Eur. J. Math., vol 1, 2003, no. 1, pages 36–60

[7] J. P. Boyd, Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev–Hermite–Pade method, J. Comput. Appl. Math., vol 223, 2009, no. 2, pages 693–702

[8] К. М. Ермохин, Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей, Геоинформатика, 2010, no. 2, pages 51–60

[9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений, Труды МИАН, 1991, vol 200, pages 136–146

[10] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions, American–Russian Advances in Approximation Theory, Springer-Verlag, New York, 1992, pages 169–190

[11] H. Stahl, Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, Constr. approx., 1986, vol 2, pages 225–240; Orthogonal polynomials with complex valued weight function. II, pages 241–251

[12] С. П. Суетин, О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера, ДАН СССР, 1980, vol 253, no. 6, pages 1322–1325

[13] K. O. Geddes, Block structure in the Chebyshev–Padé table, SIAM J. Numer. Anal., vol 18, 1981, no. 5, pages 844–861

[14] С. П. Суетин, О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций, Матем. заметки, 2009, vol 86, no. 2, pages 290–303

[15] О. Л. Ибряева, Достаточное условие единственности линейной аппроксимации Паде–Чебышёва, Известия Челябинского научного центра, 2002, no. 4, pages 1–5

[16] А. А. Гончар, О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций, Матем. сб., 1978, vol 105(147), no. 2, pages 147–163

[17] H. Stahl, Extremal domains associated with an analytic function. I; II, Complex Variables Theory Appl., 1985, vol 4, pages 311–324; 325–338

[18] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, Вариация равновесной энергии и S-свойство компактов минимальной емкости. Препринт, 1994, М.

[19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитической функции, Матем. сб., 1987, vol 134(176), no. 3, pages 306–352

[20] H. Stahl, Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). Spec. Iss., 1996, pages 121–193

[21] С. П. Суетин, О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций, Матем. сб., 2000, vol 191, no. 9, pages 81–114

[22] В. Н. Дубинин, Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного, УМН, 1994, vol 49, no. 1(295), pages 3–76

[23] В. Н. Дубинин, Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля, Сиб. матем. журн., 1994, vol 35, no. 4, pages 774–792

[24] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, О сходимости нелинейных аппроксимаций Чебышёва–Паде, 2011, to appear

[25] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, О сходимости линейных аппроксимаций Чебышёва–Паде, 2011, to appear