

矩方法在多失效模式下可靠性 全局灵敏度分析中的应用

吕媛波 吕震宙 李贵杰

(西北工业大学 710072 西安)

摘要: 针对工程实际中经常出现的多失效模式可靠性模型, 建立了多失效模式下可靠性全局灵敏度分析的矩方法。在所选模型中, 将四阶矩方法和 Edgeworth 级数展开式结合起来, 有效地近似了多失效模式下响应功能函数的分布函数, 为基本随机变量全局灵敏度分析中响应功能函数的条件概率密度和无条件概率密度函数的计算提供了一种简便高效的方法。算例结果显示了所选方法的合理性和可行性。

关键词: 多失效模式; 基本随机变量; 全局灵敏度; 响应功能函数; 矩方法

中图分类号: TB114.3

文献标识码: A

1 引 言

在工程结构设计及可靠性安全评估中, 需要确定各个不确定性输入变量对系统响应模型不确定的影响程度。在实际工程应用中, 结构系统的失效模式往往不止一个, 而且多失效模式下的可靠性模型比单失效模式情况更加复杂, 计算难度更大。因此, 研究一种能反映不确定性输入变量对多失效模式下输出模型影响的全局重要性灵敏度指标在可靠性设计分析中具有重要的意义^[1-2]。

19 世纪 60 年代以来, 人们在基本变量的参数灵敏度即局部灵敏度度量方面做了大量的研究工作^[3]。在此基础上, 一种满足全局性、定量性、无模型性和矩独立性的重要性灵敏度指标, 即基本随机变量全局灵敏度^[4]被提出。这种反映模型中输入

变量的不确定性对输出响应量不确定性贡献程度的度量指标从响应量概率密度函数的角度全面地衡量了基本变量的重要性程度, 使得所建指标能更加全面地为工程人员提供相关信息^[5-6]。但当前这方面的研究主要集中在一维响应模型下不确定性随机变量对系统响应量的全局灵敏度指标的分析 and 计算上。鉴于多失效模式下全局灵敏度分析的重要性, 本文将这种全局灵敏度度量指标应用于多失效模式中。在计算多失效模式下基本随机变量全局灵敏度时, 关键是如何准确得到多维响应功能函数的无条件概率密度函数和条件概率密度函数。

本文将矩估计方法^[7-8]应用于 Edgeworth 级数展开式^[9]中, 用以近似多失效模式下响应功能函数的分布函数, 进而可以高效地求解基本随机变量的全局灵敏度。三点估计矩方法是由 Gorman 和 Seo 提出来的, 该方法的基本思想是由基本变量的统计特

征值来求解响应量的统计特征值, 并且利用在特征点处离散求和来近似响应量统计特征值的积分计算, 从而提高了响应量统计特征值计算的效率。本文通过数值算例和工程算例对所提方法的精度和效率进行了对照分析, 同时对其局限性进行了说明。

2 全局灵敏度

设可靠性模型有 m 个失效模式, 其响应功能函数分别为

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n) = g_1(\mathbf{X}) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n) = g_2(\mathbf{X}) \\ \mathbf{M} \\ Y_m = g_m(X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n) = g_m(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (1)$$

记: $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_m\}$ 为多维响应功能函数; $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n\}$ 为模型的不确定性输入变量。全局灵敏度反映的是不确定性随机变量对输出响应量分布的平均影响程度, 由式(2)的 d_i 来表示^[4]。

$$d_i = \frac{1}{2} E_{X_i} [s(X_i)] \quad (2)$$

其中 $s(X_i)$ 为基本随机变量 X_i 取其某个实现值时对响应量分布密度的累积影响, 且满足

$$s(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{L} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) - f_{\mathbf{Y}|X_i}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \quad (3)$$

其中: $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_m}(y_1, y_2, \mathbf{L}, y_m)$ 为 $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \mathbf{L}, Y_m\}$ 的联合概率密度函数; $f_{\mathbf{Y}|X_i}(\mathbf{y})$ 为 X_i 取其实现值下 \mathbf{Y} 的条件概率密度函数, 且 $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 \mathbf{L} dy_m$ 。

$E_{X_i} [s(X_i)]$ 为 $s(X_i)$ 的数学期望, 它可以反映当基本随机变量 X_i 按照其概率密度函数 $f_{X_i}(x_i)$ 取值时, 对响应量分布密度累积影响的平均值, 其计算式为

$$E_{X_i} [s(X_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x_i) s(X_i) dx_i \quad (4)$$

考虑到基本随机变量对响应量分布影响的全局灵敏度在 0 到 1 之间, 因此本文的系数因子取 1/2 (如式 (2) 所示)。

多维响应功能函数下全局灵敏度的性质可由文献[3]给出的单维响应功能函数下全局灵敏度进行推广而得到, 并且多维响应功能函数多个变量的全局灵敏度也可由文献[3]中单个响应功能函数的情况进行推广。

在多失效模式的可靠性全局灵敏度分析中, 直接求解 $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ 和 $f_{\mathbf{Y}|X_i}(\mathbf{y})$ 有较大的困难, 而且在 $s(X_i)$ 中包含多重积分也难以计算。本文将采用矩方法来求解多失效模式中不确定性随机变量对系统响应量概率分布的全局灵敏度。

3 全局灵敏度求解方法

基于以上所提到的在求解 d_i 方面的困难, 本节建立矩方法基础上的基本随机变量对多维响应量全局灵敏度的求解方法。这种方法首先将对多响应量下全局灵敏度的求解转化为系统极限状态变量 Z 的全局灵敏度的求解, 对于串联系统 $Z = \min\{g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), \mathbf{L}, g_m(\mathbf{X})\}$, 而对于并联系统 $Z = \max\{g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), \mathbf{L}, g_m(\mathbf{X})\}$ (其中 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \mathbf{L}, X_n\}$)。利用 Edgeworth 级数方法可以把服从任意分布的、标准化了的随机参数的概率分布函数近似地展开为标准正态分布函数, 利用此原理将 Edgeworth 级数展开并与四阶矩方法结合, 来求解多失效模式下系统极限状态变量 Z 的无条件分布函数和条件分布函数, 进而在此基础上求解基本随机变量对系统多响应分布变量的全局灵敏度。

3.1 无条件条件和条件概率密度函数的求解

为得到多响应功能函数情况下(以串联系统为例来进行说明)系统极限状态变量 Z 的无条件分布函数, 首先需得到其前四阶矩, 本文采用文献[10-11]中的矩方法来求解。与单失效模式不同的是, 计算多模式系统极限状态变量 Z 的各阶矩需要对各个功能函数的大小进行比较而得到取值最小的功能函数值, 即 $Z = \min\{g_1, g_2, \mathbf{L}, g_m\}$ 。在得到极限状态变量 Z 的四阶矩 $a_{kz}(k=1, 2, 3, 4)$ 后, 将其带入 Edgeworth 级数展开式^[12]中, 即可得到极限状态变量 Z 的分布函数 $F_{Z_u}(z_u)$, 即

$$F_{Z_u}(z_u) = F(z_u) - f(z_u) \left[\frac{1}{6} a_{3z} H_2(z_u) + \frac{1}{24} (a_{4z} - 3) H_3(z_u) + \frac{1}{72} a_{3z}^2 H_5(z_u) \right] \quad (5)$$

其中 Z_u 为极限状态变量 $Z = \min\{g_1, g_2, \mathbf{L}, g_m\}$ 的

标准化形式, 即 $Z_u = \frac{Z - a_{1Z}}{a_{2Z}}$ 。

对于响应功能函数的条件分布函数, 依据 $f_{X_i}(x_i)$ 抽取 x_i 的 N 个样本值 $x_i^{(j)} (j=1, 2, \dots, N)$ 。

对于每一个样本值 $x_i^{(j)}$, 采用矩方法求出对应的多维响应功能函数极限状态变量 Z 的前四阶矩 $a_{1Z}^{(j)}$ 、 $a_{2Z}^{(j)}$ 、 $a_{3Z}^{(j)}$ 、 $a_{4Z}^{(j)}$, 然后同样将其应用于 Edgeworth 级数展开式中, 可以得到与 $x_i^{(j)}$ 对应的串联系统的极限状态变量 Z 的条件分布函数 $F_{Z_u|X_i}^{(j)}(z_u^{(j)})$, 即

$$F_{Z_u|X_i}^{(j)}(z_u^{(j)}) = F(z_u^{(j)}) - f(z_u^{(j)}) \left[\frac{1}{6} a_{3Z}^{(j)} H_2(z_u^{(j)}) + \frac{1}{24} (a_{4Z}^{(j)} - 3) H_3(z_u^{(j)}) + \frac{1}{72} a_{3Z}^{2(j)} H_5(z_u^{(j)}) \right] \quad (6)$$

其中 $Z_u^{(j)}$ 为与 $x_i^{(j)}$ 对应的极限状态变量 $Z = \min\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ 的标准化形式, 即

$$Z_u^{(j)} = \frac{Z - a_{1Z}^{(j)}}{a_{2Z}^{(j)}}。$$

在式(5)和式(6)中, 二阶、三阶、五阶 Hermite 多项式分别为: $H_2(x) = x^2 - 1$ 、 $H_3(x) = x^3 - 3x$ 、 $H_5(x) = x^5 - 10x^3 - 15x$ 。对于并联系统, 求解方法类似。

将 $F_{Z_u}(z_u)$ 和 $F_{Z_u|X_i}^{(j)}(z_u^{(j)})$ 分别对 z 进行求导, 即可得到极限状态变量 Z 的无条件概率密度函数 $f_Z(z)$ 和 $x_i^{(j)}$ 对应的极限状态变量 Z 的条件概率密度函数 $f_{Z|X_i}^{(j)}(z)$ 。这样就把多维积分的问题转换成对一维极限状态变量的积分, 使计算简化。

3.2 多响应功能函数情况下全局灵敏度的求解

在基本随机变量全局灵敏度的表达式中, $s(X_i)$ 的数学期望 $E_{X_i}[s(X_i)]$ 中的积分问题可以采用大数定理将其用数字模拟样本均值进行求解。在求解全局灵敏度的过程中使用了一次矩方法求解极限状态变量的条件概率密度函数和无条件概率密度函数, 可称之为求解全局灵敏的单重矩方法。对于求 $E_{X_i}[s(X_i)]$ 的积分问题, 也可以再次使用矩方法来求解, 这称为求解全局灵敏度的双重矩方法。

对于求解全局灵敏度的单重矩方法, 在以上得

到的极限状态变量的无条件概率密度函数和条件概率密度函数的基础上对 x_i 进行 N 次抽样, 根据式(7)可近似求得 $s(X_i)$ 的数学期望 $E_{X_i}[s(X_i)]$ 。进而根据式(2)可以求得基本随机变量 X_i 的全局灵敏度的近似值

$$E_{X_i}[s(X_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x_i) s(X_i) dx_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s^{(j)}(X_i) \quad (7)$$

$$\hat{d}_i = \frac{1}{2} E_{X_i}[s(X_i)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x_i) s(X_i) dx_i = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s^{(j)}(X_i) \quad (8)$$

根据求解全局灵敏度的双重矩方法, 可得

$$\hat{d}_i = \frac{1}{2} \left[P_{x_i,1} s(l_{x_i,1}) + P_{x_i,2} s(l_{x_i,2}) + P_{x_i,3} s(l_{x_i,3}) \right] \quad (9)$$

其中 $P_{x_i,j}$ 和 $l_{x_i,j} (j=1, 2, 3)$ 是与基本随机变量 x_i 的均值 a_{1x_i} 、标准差 a_{2x_i} 、偏度 a_{3x_i} 、峰度 a_{4x_i} 有关的参数, 详细公式可参考文献[10-11]。

通过对上述过程的分析可知, 将矩方法应用于 Edgeworth 级数展开式来进行基本随机变量对多响应功能函数情况下的全局灵敏度的求解, 可以有效地拟合极限状态变量的无条件和条件分布函数, 并且将多维积分问题转化为一维积分, 从而大大简化了求解的复杂程度。尤其是对式(2)中外层积分的求解, 再次采用矩方法之后可使得计算效率又得到了很大提高。因此, 本文提出的方法是一种全局灵敏度求解的高效方法。下面通过算例来进行说明。

4 算例分析

在下面的算例中, M_C 表示采用直方图法求解出的全局灵敏度值。为了接近真实的分布情况, 需要将网格尽量细化并且要抽取大量的样本点, 本文直方图法调用功能函数的次数为 10^6 , 将采用单重矩方法和双重矩方法得到的全局灵敏度值与其进行对比。若系统含有 n 个不确定性随机变量, 在单重矩方法中, 若对随机变量进行抽样的次数为 $N = 2000$, 则需要调用功能函数的次数为 $N \times n \times 3^{n-1}$, 而双重矩方法中, 仅需要调用功能函数的次数为 $n \times 3^n$ 。

算例 1: 含有两个模式的线性并联系统的响应功能

函数为 $\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - 5 \\ g_2(\mathbf{x}) = -x_1 + 4x_2 + 5 \end{cases}$, 其中各基本变量均

服从标准正态分布, 即 $x_i \sim N(0,1)$ (其中 $i=1,2$)。表1是算例1不确定性输入变量的全局灵敏度计算结果。

表1 算例1的全局灵敏度计算结果

	d_1	d_2
M_C	0.182360	0.612044
单重矩方法	0.185215	0.591024
双重矩方法	0.178041	0.584120

算例2: 非线性串联系统的两个响应功能函数为

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = \exp(0.2x_1 + 6.2) - \exp(0.47x_2 + 5) + 70 \\ g_2(\mathbf{x}) = \exp(0.4x_1 + 7) - \exp(0.3x_2 + 5.5) - 20 \end{cases}$$
, 各

变量均服从标准正态分布, 且 $x_i \sim N(0,1)$ (其中 $i=1,2$)。表2是算例2不确定性输入变量的全局灵敏度计算结果。

表2 算例2的全局灵敏度计算结果

	d_1	d_2
M_C	0.328935	0.268266
单重矩方法	0.364932	0.252974
双重矩方法	0.380826	0.225137

算例3: 屋架算例

如图1所示一屋架, 其上弦杆和其他压杆采用钢筋混凝土杆, 下弦杆和其他拉杆采用钢杆。设屋架承受均布载荷 q 作用, 将均布载荷 q 化成节点载荷 $P=q/4$ 。所有基本随机变量均服从正态分布, A_C 、 E_C 和 A_S 、 E_S 分别为混凝土和钢杆的横截面积、弹

性模量, 长度参数 l 的定义见图1。考虑屋架的安全性和适用性, 求解 AD 杆与 EC 杆安全时的串联系统全局灵敏度。AD 杆受压最危险, EC 杆受拉最危险, 它们的内力分别为: $N_{AD} = -1.185ql$;

$N_{EC} = 0.75ql$, 所以结构的极限状态函数为

$$\begin{cases} g_1 = E_C A_C - 1.185ql \\ g_2 = E_S A_S - 0.75ql \end{cases}$$
。分别分情况1和情况2进

行计算结果的对比。在情况1和情况2中基本随机变量均值一致, 情况2在情况1的基础上减小了部分变量的标准差, 如表3所示; 情况3则将 E_C 和 E_S 看作常量 (取情况1的均值), 其余随机变量的分布特征同情况1, 这样结构就变成了含有三个随

$$\begin{cases} g_1 = 1.37 \times 10^7 A_C - 14.22q \\ g_2 = 3.35 \times 10^8 A_S - 9q \end{cases}$$
。

这三种情况下的计算结果对比分别如表4~表6所示。

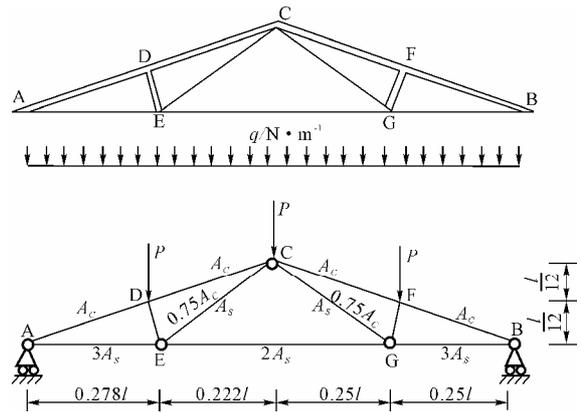


图1 屋架结构的简单示意图

表3 两种情况下基本变量的分布参数

基本变量	$q/N \cdot m^{-1}$	l/m	A_S / m^2	A_C / m^2	$E_S / N \cdot m^{-2}$	$E_C / N \cdot m^{-2}$
基本变量代号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
均值	20000	12	9.82×10^{-4}	0.03	3.35×10^8	1.34×10^7
标准差(情况1)	1400	0.12	5.892×10^{-5}	0.05	4.02×10^7	2.4×10^6
标准差(情况2)	14	0.12	5.892×10^{-5}	0.005	4.02×10^7	2.4×10^2

表4 算例3情况1的全局灵敏度计算结果

	$d_1(q)$	$d_2(l)$	$d_3(A_S)$	$d_4(A_C)$	$d_5(E_S)$	$d_6(E_C)$
M_C	0.444050	0.424740	0.470840	0.555390	0.759800	0.379850
单重矩方法	0.484973	0.477569	0.521729	0.531694	0.704922	0.478516
双重矩方法	0.492453	0.478793	0.516945	0.531695	0.700677	0.478531

表5 算例3情况2的全局灵敏度计算结果

	$d_1(q)$	$d_2(l)$	$d_3(A_S)$	$d_4(A_C)$	$d_5(E_S)$	$d_6(E_C)$
M_C	0.578960	0.598920	0.618240	0.546380	0.787920	0.576214
单重矩方法	0.589741	0.589318	0.628440	0.531672	0.803497	0.589794
双重矩方法	0.589794	0.590064	0.625811	0.531672	0.801231	0.589786

表6 算例3情况3的全局灵敏度计算结果

	$d_1(q)$	$d_2(A_S)$	$d_3(A_C)$
M_C	0.022630	0.007000	0.952900
单重矩方法	0.024961	0.006409	0.969435
双重矩方法	0.025039	0.006389	0.974219

表8 算例4的全局灵敏度计算结果

	$d_1(E)$	$d_2(G)$	$d_3(F_1)$
单重矩方法	0.034606	0.002843	0.828389
双重矩方法	0.028698	0.002515	0.827810

算例4: 某型飞机内襟翼机构翼面由子襟翼和主襟翼两部分组成, 其有限元模型如图2所示。在最危险工况下考虑两个节点的应变情况, 其节点编号分别为910457和920273, 分别建立与这两个节点对应的串联系统的隐式极限状态函数 $\begin{cases} g_1 = 36.5 - w_1(E, G, F) \\ g_2 = 32.5 - w_2(E, G, F) \end{cases}$, 其中: E 和 G 分别为两节点处的弹性模量和剪切模量; F 为翼面气动载荷; $w_1(E, G, F)$ 和 $w_2(E, G, F)$ 为相应的应变响应量, 它们是随机变量 E 、 G 、 F 的函数。考虑气动载荷 F 的变异性, 引入量纲为一的气动载荷变化因子 F_1 , 则实际的气动载荷 $F = F_0(1 + F_1)$ (其中: F_0 为固定值; F_1 、 E 、 G 为正态随机变量, 分布参数如表7所示)。由于采用直方图法需要调用功能函数的次数太多, 工程中无法接受, 所以本例采用两种矩方法来计算全局灵敏度, 计算结果如表8所示。

表7 基本随机变量的分布参数

随机变量	均值	变异系数	标准差
$E / \text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$	72450.0	0.02	1449
$G / \text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$	27236.8	0.02	544.736
F_1	0.0	/	0.1

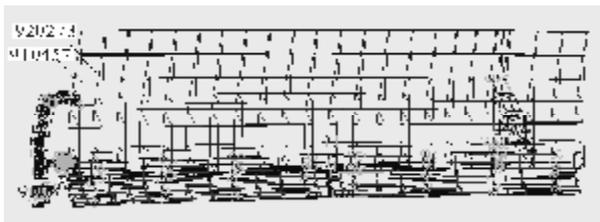


图2 内襟翼机构有限元网格划分

对以上几个算例的计算结果进行分析可以得到以下结论: 同直方图法相比, 在保证精度的情况下, 采用矩方法计算全局灵敏度有较高的效率; 将基本随机变量的标准差减小之后, 采用矩方法计算出的结果同直方图法更接近; 在线性情况下, 采用矩方法得到的计算结果相对于非线性情况精度更高。由于所提方法在整个过程中只用到了极限状态函数与基本输入变量的数值关系, 因此该方法也适用于工程中的隐式极限状态方程(如算例4)。

值得注意的是: 矩方法不适用于变量维数较高的问题, 因为其计算量随变量维数的增加而呈指数水平增加; 矩方法也不适用于功能函数的非线性程度比较大而且基本变量的变异系数很大的情况, 主要原因是在拟合极限状态变量的无条件分布函数和条件分布函数时, 仅仅利用了极限状态变量的前四阶矩, 这样对于非线性功能函数会造成大量的分布信息的损失, 形成误差。两次使用矩方法造成了误差的多次积累, 所以双重矩方法的计算精度不如单重矩方法高。而且将多维积分转化为一维积分时, 由于各个功能函数的取值范围可能处于不同数量级, 积分区间的选取如果不恰当也会使计算结果产生误差。所以, 采用矩方法来求解基本随机变量在多失效模式下的全局灵敏度适用于功能函数非线性程度较低、基本随机变量的变异性较小的情况。如何更加精确地拟合多失效模式下极限状态变量的无条件分布函数和条件分布函数以及提高矩方法在非线性情况下的计算精度还有待继续研究。

5 结论

工程实际中存在着大量的多失效模式可靠性系统, 因此对多失效模式下的不确定性随机变量

全局灵敏度的分析有着重要的意义。本文将矩方法同 Edgeworth 级数展开式相结合来拟合多失效模式下极限状态变量的无条件分布函数和条件分布函数,解决了基本随机变量全局灵敏度分析中极限状态变量的条件概率密度函数和无条件概率密度函数以及多重积分在求解上的困难,是一种全局灵敏度计算的高效方法。本文通过算例验证了该方法的高效性和合理性,但对于非线性程度较大的情况,基于矩方法的多失效模式下全局灵敏度的计算精度还有待提高。

参 考 文 献

- [1] Baraldi P, Zio E, Compare M. A method for ranking components importance in the presence of epistemic uncertainties[J]. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2009, 22(5): 582-592.
- [2] Satelli A. Sensitivity analysis for importance assessment[J]. *Risk Anal*, 2002, 22(3): 579-590.
- [3] Helton J C, Davis F J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analysis of complex systems[J]. *Reliab Eng Syst Safe*, 2003, 81(1): 23-69.
- [4] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2007, 92(6): 771-784.
- [5] Liu H B, Chen W, Sudjianto A. Relative entropy based method for probabilistic sensitivity analysis in engineering design[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2006, 128(3): 326-336.
- [6] Liu Q, Homma T. A new computational method of a moment-independent uncertainty importance measure[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, 94(7): 1205-1211.
- [7] Gorman M R. Reliability of structure systems[D]. Ohio: Case Western Reserve University, 1980.
- [8] Seo H S, Kwak B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using tree-point information[J]. *International Journal of Production Research*, 2002, 40(4): 931-944.
- [9] 王炳章, 方小娟. 有 Edgeworth 展式的分布的随机加权逼近的重对数律[J]. *数学进展*, 2002, 31(5): 467-475.
- [10] 宋军. 基于矩方法的可靠性及可靠性灵敏度研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2007.
- [11] 宋军, 吕震宙. 考虑状态模糊性时广义失效概率计算的矩方法[J]. *工程力学学报*, 2008, 25(2): 71-77.
- [12] Zhao Y G. Moment methods for structural reliability[J]. *Structural Safety*, 2001, 23: 47-75.