

二维空间中基于黎曼解的 SPH 方法

杨刚 韩旭 胡德安

(湖南大学 410082 长沙)

摘要: 应用传统的光滑粒子流体动力学(SPH)方法模拟激波问题能自主捕获波阵面,但是在接触间断界面处却不可避免地存在压力振荡。采用黎曼解修正粒子对之间的相互作用,并将基于黎曼解的 SPH 方法扩展到二维空间。通过对一维具有解析解的激波管问题和二维拟内爆问题的模拟,比较了基于黎曼解的 SPH 方法和传统的 SPH 方法。数值结果表明,相对于传统的 SPH 方法,基于黎曼解的 SPH 方法能够有效避免接触界面处的压力振荡,提高求解的精度。

关键词: 光滑粒子动力学; 黎曼解; 激波

中图分类号: O368

文献标识码: A

1 引 言

无网格光滑粒子(SPH)方法是一种具有拉格朗日性质的纯无网格方法,从其提出到现在,已被发展和应用到计算力学的各个领域^[1-2]。由于 SPH 方法在引入人工粘度后能对激波问题进行有效地模拟^[3],并且能自动对波阵面进行捕获,SPH 方法逐渐被应用到具有强间断和高压的爆炸冲击过程^[4-5]。虽然在引入人工粘度后 SPH 方法能对冲击问题进行模拟,但是在接触间断处仍存在一定的压力振荡,相对于基于黎曼解的 Godunov 方法精度要低^[6]。为了解决在接触间断处的数值振荡以及提高 SPH 对激波问题模拟的精度,Monaghan 最先提出了将黎曼解的方法与 SPH 方法结合起来^[6]。虽然在 Monaghan^[6]提出的方法中能有效提高激波问题的精度,减弱接触间断处的压力振荡,但是由于只考虑了间断面处速度跳跃一个因素,该方法并不具有一般性,对强爆轰问题的模拟还是存在压力振荡以及较大的误差。文献[7]构造了一系列的 Godunov 型的 SPH 方法,并对一维问题进行了分析,但是在模拟强爆轰问题的时候压力依然存在误差。文献[8]针对 Godunov 型的

SPH 方法,研究了不同黎曼解的影响,并构造了基于黎曼解的人工粘性,对一维激波等问题进行了有效模拟,并有效减缓了爆轰波模拟时存在的压力振荡和误差。文献[9-10]应用基于声波近似的黎曼解来描述粒子点之间的相互作用,对一维激波管问题和固体冲击问题进行了模拟。文献[11]也提出了与 Parshikov 相近的方法,对一维激波管问题以及一维飞片撞靶问题进行了有效模拟。

在上述已有的基于黎曼解的 SPH 方法中,基本都是以一维问题的模拟应用为主。虽然这些文献在描述一维基于黎曼解的 SPH 方法时以矢量形式表达,但是由于求解接触间断处的黎曼解时对相互作用粒子间假设其分别位于接触间断面的左端和右端。因此,当激波在多维空间传播的时候,接触间断处的黎曼解与两个粒子在各坐标方向的相对位置是相关的,这样导致描述二维以及三维空间的基于黎曼解的 SPH 方法时难以用矢量表达式描述。本文针对基于声波近似的黎曼解,以标量形式构造基于黎曼解的 SPH 方法的统一表达式,将基于黎曼解的 SPH 方法推广到二维应用,方程的形式同样适用于一维或者三维空间。

基金项目: 武器装备预演基金(9140A04040208JW3201); 国防基础研究资助项目(A1420080166)

来稿日期: 2009-11-29 **修回日期:** 2010-8-16

第一作者简介: 杨刚,男,1981年生,湖南大学机械与运载工程学院汽车车身先进设计制造国家重点实验室,博士生;研究方向——无网格方法理论和应用。**E-mail:** young_guy@tom.com

2 传统的SPH方法

在模拟激波的问题时,传统的SPH方法主要采用以下形式的离散方程描述无外力作用和无热源的流体动力学问题

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (1)$$

$$\frac{dv_i^a}{dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i + p_j}{r_i r_j} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^a} \quad (2)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i + p_j}{r_i r_j} + \Pi_{ij} \right) v_{ij}^b \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \quad (3)$$

其中: \mathbf{r} 、 \mathbf{v} 、 p 、 u 分别表示密度、速度、压力、单位质量的内能; i 和 j 表示不同的粒子点; N 表示粒子点 i 的相邻粒子的总数; 光滑函数 $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$; \mathbf{x} 表示粒子的位置矢量; h 为光滑长度; Π_{ij} 为人工粘度; $v_{ij}^a = (v_i^a - v_j^a)$ 表示粒子间的速度差; x_i^a 为标量形式的位置分量; 上标 $\mathbf{a}, \mathbf{b}=1, 2, 3$ 表示坐标方向。在本文中上标遵循张量的字母指标法。

本文采用高斯光滑函数

$$W(R, h) = B e^{-q^2} \quad (4)$$

式中: $q = \frac{|\mathbf{x}_{ij}|}{h}$, $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ 为两个粒子点之间

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^a < x_j^a, \mathbf{a} = \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^* = \frac{p_j r_i c_i + p_i r_j c_j - r_i c_i r_j c_j [(v_i^a)^R - (v_j^a)^R]}{r_i c_i + r_j c_j} \\ x_i^a > x_j^a, \mathbf{a} = \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^* = \frac{p_j r_i c_i + p_i r_j c_j - r_i c_i r_j c_j [(v_i^a)^R - (v_j^a)^R]}{r_i c_i + r_j c_j} \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^* = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^a < x_j^a : (v_{ij}^a)^* = \frac{(v_i^a)^R r_i c_i + (v_j^a)^R r_j c_j - (p_j - p_i)}{r_i c_i + r_j c_j} \\ x_i^a > x_j^a : (v_{ij}^a)^* = \frac{(v_i^a)^R r_i c_i + (v_j^a)^R r_j c_j - (p_i - p_j)}{r_i c_i + r_j c_j} \end{array} \right. \quad (7)$$

的距离; B 在一维、二维、三维空间中分别为 $1/(\pi^{1/2}h)$ 、 $1/(\pi h^2)$ 、 $1/(\pi^{3/2}h^3)$ 。

人工粘度用于抑制波后的数值振荡,此处选用 Monaghan 型的人工粘度^[12]

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 : \Pi_{ij} = \frac{-\mathbf{a}_{\Pi} \bar{c}_{ij} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{b}_{\Pi} \mathbf{f}_{ij}^2}{\bar{r}_{ij}} \\ \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 : \Pi_{ij} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

式中: $\mathbf{f}_{ij} = \frac{\bar{h}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + j^2}$; $\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$;

$\bar{r}_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_j)$; $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j)$; $j = 0.1\bar{h}_{ij}$;

c 为声速; \mathbf{a}_{Π} , \mathbf{b}_{Π} 为常数,取值一般为 1.0 左右;

$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, \mathbf{v} 表示速度矢量。

3 基于黎曼解的SPH方法

基于黎曼解的SPH方法中,设粒子之间的相互作用存在于粒子间的接触表面,将粒子间的相互作用近似于连续介质中的接触间断处理。在基于黎曼解的Godunov型SPH方法中用黎曼解的声波近似^[13]来表示接触间断处的速度和压力,即将动量方程中的压力项和能量方程中的速度项用黎曼解得到的压力和速度表示。

由声波近似得到接触间断处黎曼解的压力

$(p_{ij}^{ab})^*$ 和速度 $(v_{ij}^a)^*$ 分别为

式中粒子点处的速度 $(v_i^a)^R$ 和 $(v_j^a)^R$ 描述如下

$$\begin{cases} x_i^a < x_j^a : (v_i^a)^R = \frac{v_i^{ab}(x_j^b - x_i^b)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, & (v_j^a)^R = \frac{v_j^{ab}(x_j^b - x_i^b)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\ x_i^a > x_j^a : (v_i^a)^R = \frac{v_i^{ab}(x_i^b - x_j^b)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, & (v_j^a)^R = \frac{v_j^{ab}(x_i^b - x_j^b)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{b} : v^{ab} = v^a \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{b} : v^{ab} = 0 \end{cases}$, 上标 R 指示基于黎曼解的

$$\frac{du_i}{dt} = 2 \sum_{j=1}^N m_j \frac{(p_{ij}^{ab})^*}{r_i r_j} [(v_i^a)^R - (v_j^a)^R] \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \quad (11)$$

物理量。

因为应用声波近似求解接触间断处的压力和速度时, 假设两个相互作用的粒子点分别位于接触间断面的两端。因此在二维 SPH 近似过程中, 基于黎曼解的压力和速度与两个粒子点的坐标位置是相关的, 如式(6)~式(8)所示。

利用接触间断处的黎曼解压力和速度对传统的 SPH 离散方程中的对应项作如下近似替换, 即

上述方程为直接以黎曼解对相应物理量替代得到的离散方程, 为了进一步将基于黎曼解的 SPH 离散方程化成与传统 SPH 离散方程相近的形式, 采取与文献[8]相似的处理方法, 将黎曼解分解构造人工粘性。首先, 将接触间断处的黎曼解压力分解为下面 a 和 b 两部分

$$\begin{aligned} (p_{ij}^{ab})^* &\rightarrow p_i, \quad (p_{ij}^{ab})^* \rightarrow p_j, \\ 2[(v_i^a)^R - (v_j^a)^R] &\rightarrow v_{ij}^a \end{aligned} \quad (9)$$

由此可得基于黎曼解的 SPH 离散方程为

$$\frac{dv_i^a}{dt} = -2 \sum_{j=1}^N m_j \frac{(p_{ij}^{ab})^*}{r_i r_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \quad (10)$$

$$(p_{ij}^{ab})^* = (p_{ij}^{ab})^*_a + (p_{ij}^{ab})^*_b \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^*_a = \frac{p_j r_i c_i + p_i r_j c_j}{r_i c_i + r_j c_j} \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^*_a = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_i^a < x_j^a, \mathbf{a} = \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^*_b = \frac{r_i c_i r_j c_j [(v_i^a)^R - (v_j^a)^R]}{r_i c_i + r_j c_j} \\ x_i^a > x_j^a, \mathbf{a} = \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^*_b = \frac{r_i c_i r_j c_j [(v_j^a)^R - (v_i^a)^R]}{r_i c_i + r_j c_j} \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{b} : (p_{ij}^{ab})^*_b = 0 \end{cases} \quad (14)$$

利用以下式子替换式(14)中的速度差, 即

$$\begin{cases} x_i^a < x_j^a : -\frac{\bar{h}_{ij} v_{ij}^a x_{ij}^a}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + j^2} \rightarrow (v_i^a)^R - (v_j^a)^R \\ x_i^a > x_j^a : -\frac{\bar{h}_{ij} v_{ij}^a x_{ij}^a}{|\mathbf{x}_{ij}|^2 + j^2} \rightarrow (v_j^a)^R - (v_i^a)^R \end{cases} \quad (15)$$

式中: $v_{ij}^a = (v_i^a - v_j^a)$; $x_{ij}^a = (x_i^a - x_j^a)$ 。

然后将第二部分 $(p_{ij}^{ab})_b^*$ 作为人工粘性项, 并且仅

$$\begin{cases} a = b, v_{ij}^k x_{ij}^k < 0: (p_{ij}^{ab})_b^* = -\frac{r_i c_i r_j c_j}{r_i c_i + r_j c_j} \left(\frac{\bar{h}_{ij} v_{ij}^k x_{ij}^k}{|x_{ij}^k|^2 + j^2} \right) \\ a \neq b, v_{ij}^k x_{ij}^k > 0: (p_{ij}^{ab})_b^* = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中上标 $k = 1, 2, 3$ 指示坐标方向, 同样遵循张量的字母指标法。

在本文的数值算例中采用以下形式的基于黎曼解的 SPH 离散方程

$$\frac{dv_i^a}{dt} = -2 \sum_{j=1}^N m_j \frac{[(p_{ij}^{ab})_a^* + (p_{ij}^{ab})_b^*]}{r_i r_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \quad (17)$$

$$\frac{du_i}{dt} = 2 \sum_{j=1}^N m_j \frac{[(p_{ij}^{ab})_a^* + (p_{ij}^{ab})_b^*][(v_i^a)^R - (v_j^a)^*]}{r_i r_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^b} \quad (18)$$

4 数值算例

为了对基于黎曼解的 SPH 方法的正确性进行验证, 先将上述基于黎曼解的 SPH 离散方程退化到一维空间, 对具有解析解的激波管问题进行模拟。然后对二维密封空间内的拟内爆问题进行模拟, 以测试和分析基于黎曼解的 SPH 方法在二维复杂流动问题中的求解能力。以下两个算例都是采用 SI 标准单位制。

4.1 一维激波管问题

本算例的物理模型为在封闭的管状容器内, 初始时刻管道中部有隔膜将具有不同状态的气体隔开, 然后突然将隔膜抽离, 具有不同状态的两股气体相互作用会产生激波、膨胀波和接触间断等物理现象, 初始时刻位于隔膜两端气体状态为^[3]

$x \leq 0: r = 1, u = 2.5, p = 1$

$x > 0: r = 0.25, u = 1.795, p = 0.1795$

在模拟过程中采用理想气体的状态方程为

$$p = (g - 1) ru \quad (19)$$

在粒子相互靠近的时候才考虑。由此可以将式(14)改写为

式中 $g = 1.4$ 。在模拟中使用的 1000 个粒子均匀分布在区域 $(-0.6, 0.6)$ 中。

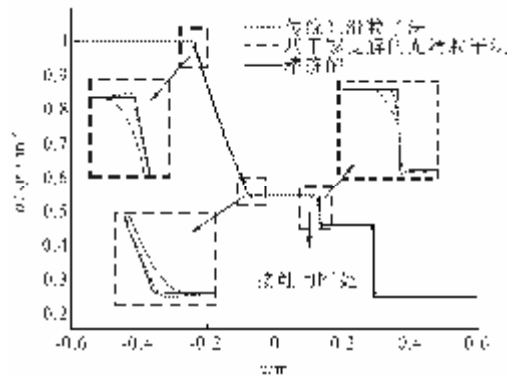


图1 t=0.2s 时激波管内密度的分布

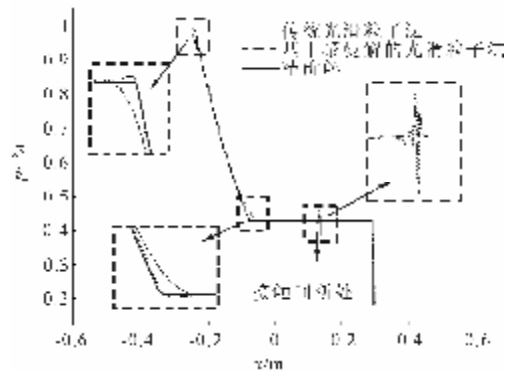


图2 t=0.2s 时激波管内压力的分布

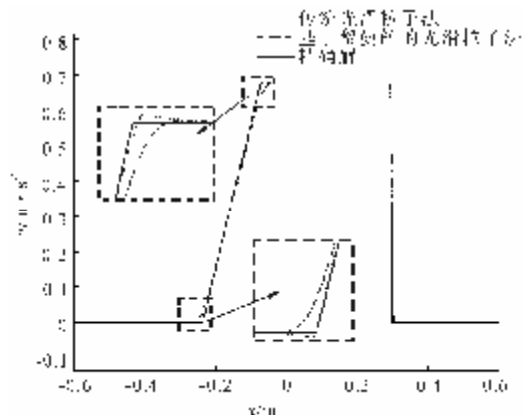


图3 t=0.2s 时激波管内速度的分布

图 1、图 2、图 3 分别给出了在 $t=0.2s$ 时刻激波

管内的密度, 压力、速度分布。由图1可见, 传统的 SPH 方法比基于黎曼解的 SPH 方法在接触间断处和稀疏波处的密度求解精度都比较高, 但是两种方法在全局上都能与精确解有较好的吻合。在图2的压力分布中, 传统的 SPH 方法在稀疏波处的精度比基于黎曼解的 SPH 方法高, 但是在接触间断处, 传统的 SPH 方法出现了较强的数值振荡, 而基于黎曼解的 SPH 方法虽然也存在振荡, 但是比传统的 SPH 方法要稳定得多。在图3的速度分布中, 两种方法都与精确解有较好的吻合, 同样是在稀疏波处传统的 SPH 方法比基于黎曼解的求解精度要高。

虽然在密度分布上传统的 SPH 方法相对于基于黎曼解的 SPH 方法精度较高, 而且在稀疏波处传统的 SPH 方法求解结果都比基于黎曼解的求解结果好, 但是从全局来看, 基于黎曼解的 SPH 方法和精确解也是有比较好的吻合的。在这里需要指出的是, 在接触间断处传统 SPH 方法存在较为严重的压力振荡, 并且此处压力振荡造成的影响远大于基于黎曼解的 SPH 方法在密度分布和稀疏波处误差的影响。这种影响在随后二维问题的数值计算将更为显著, 特别是当计算时间历程较长的時候, 存在的压力振荡将会导致较大的数值误差并有可能导致计算崩溃。

4.2 二维拟内爆问题

此处采用文献[14]提出的二维拟内爆模型, 此模型是典型的二维激波问题。与一维模型类似, 但是此模型激波是沿着二维空间的两个方向传播, 并且由于是在封闭容器内, 气体与容器壁作用以及不同状态气体间的相互作用会导致流动变得越来越

复杂。图4给出了二维拟内爆问题初始时刻的状态以及几何构型, 初始时刻不同状态静止的两股气体由隔膜隔开, 由隔膜的突然抽离开始相互作用。固壁使用镜面对称虚粒子来模拟。气体的状态方程采用如式(19)的理想气体状态方程。

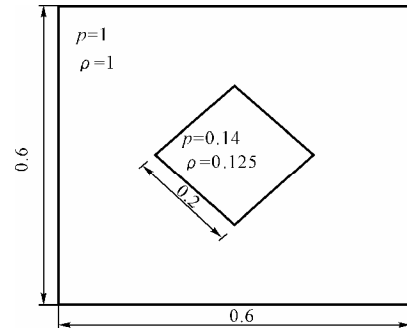
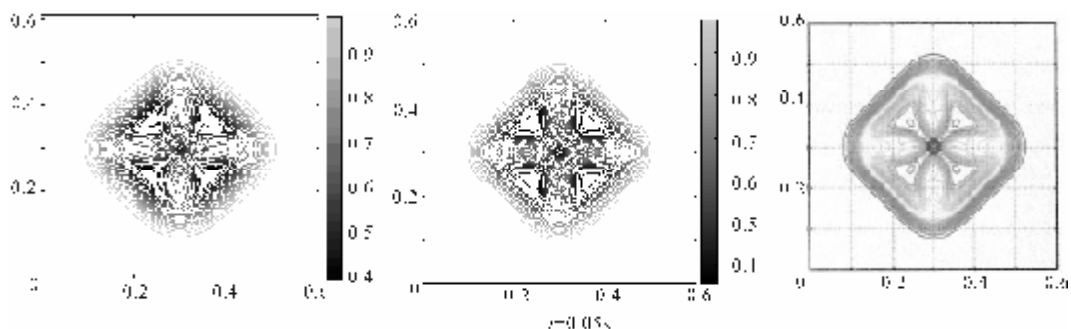


图4 二维拟内爆问题的模型^[14]

图5为不同时刻的压力分布等值线图, 其中给出了传统的 SPH 方法、基于黎曼解的 SPH 方法以及文献[14]的求解结果。由图可见, 在前期激波传播尚未在壁面发生发射时, 传统的 SPH 方法和基于黎曼解的 SPH 方法获得的结果相当吻合, 并且存在于传统 SPH 方法中的压力振荡并不明显。然而随着流动的发展, 激波在壁面发生反射, 气体流动变得复杂时, 传统 SPH 方法在接触间断处存在的压力振荡逐渐变得突出, 并且会一直影响随后的求解, 最终导致计算崩溃。基于黎曼解的 SPH 方法能有效处理接触间断处的压力振荡。



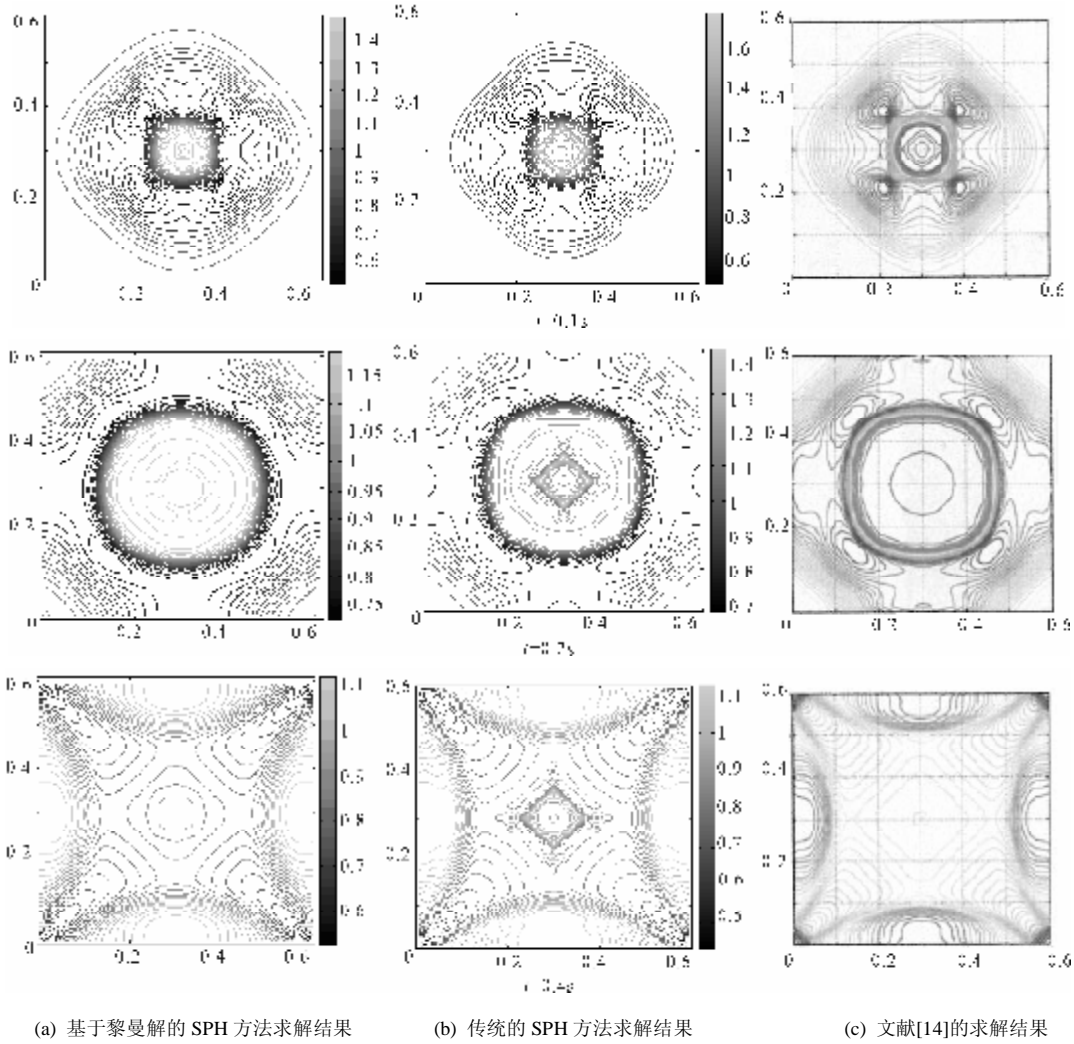


图5 不同时刻的压力等值线

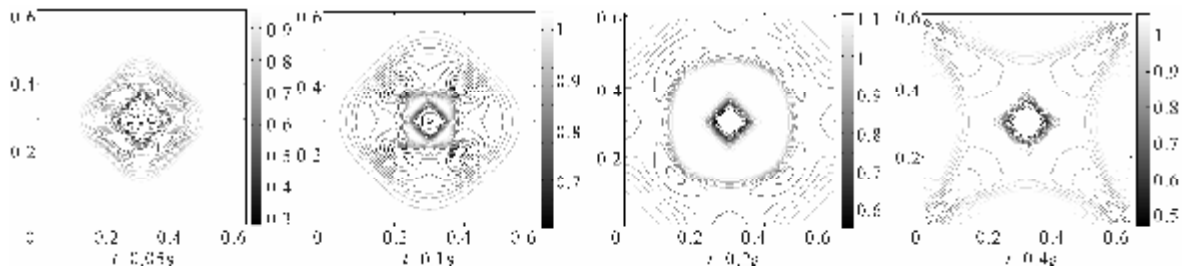
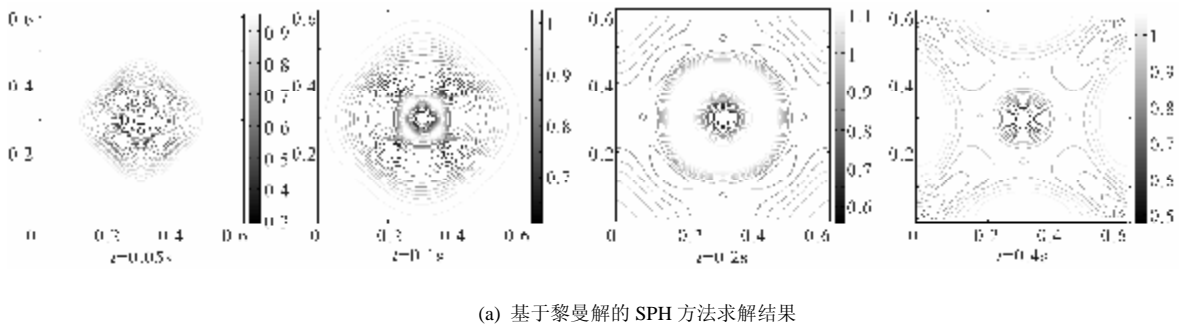


图6 不同时刻的密度等值线

图6给出了不同时刻密度分布等值线,由于求解密度时,两种SPH方法都是采用直接密度求和法,只与相邻粒子的距离相关,压力的直接影响很小,因此传统的SPH方法和基于黎曼解的SPH方法的密度分布等值线也是相近的。图7和图8分别

给出了沿着水平线 $y=0.3$ 不同时刻的压力和密度分布。由图7可以更为直观得看到传统SPH方法在求解此问题的时候存在的压力振荡,并且相对于一维激波的振荡更严重。从图8得到密度分布的结果可见,密度的分布两者是基本吻合的。

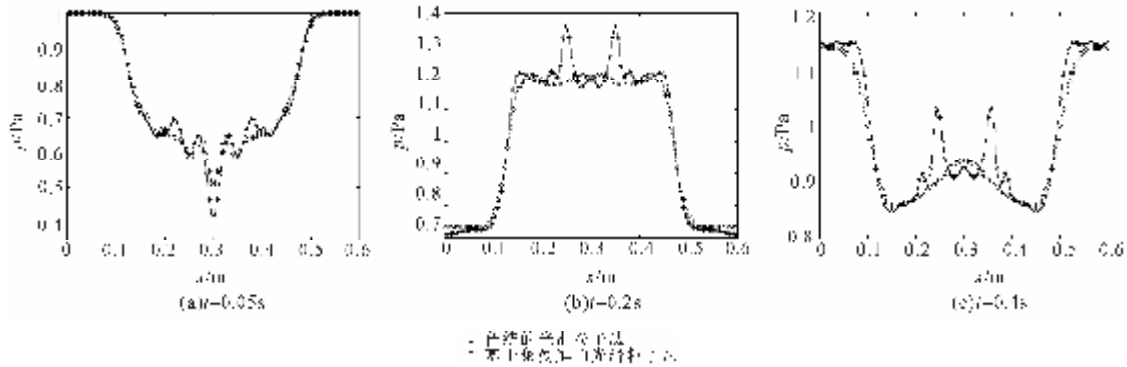


图7 沿着水平线 $y=0.3$ 不同时刻的压力分布

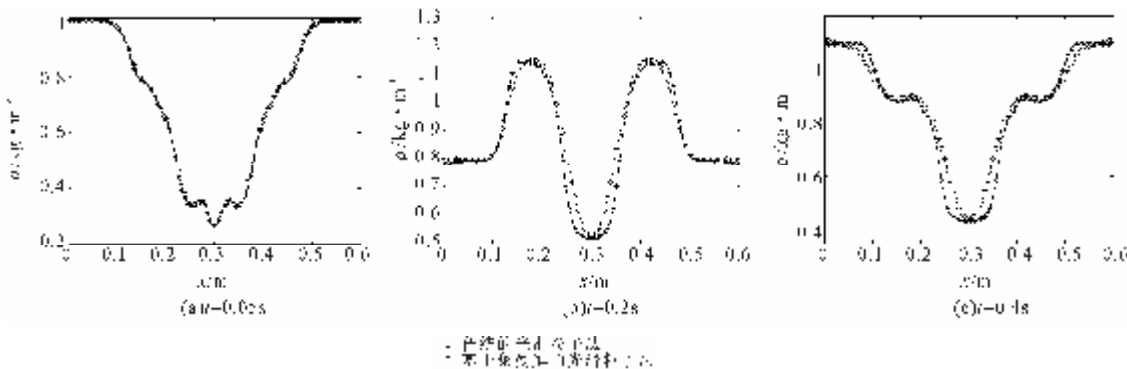


图8 沿着水平线 $y=0.3$ 不同时刻的密度分布

5 结论

本文采用黎曼解的近似方法对SPH方法进行修正,有效处理了在求解激波问题时接触间断面存在的压力振荡。由于在求解接触间断面处的压力和速度的黎曼解的时候是假设粒子点分别位于接触间断面的左端和右端进行求解的,因此难以使用统一的矢量表达式对二维空间中的基于黎曼解的SPH方法进行描述。文中以标量的形式给出了基于黎曼解的SPH方程,不仅适用于二维空间,同样可应用于一维和三维空间。通过一维激波管算例对基于黎曼解的SPH方法与传统的SPH方法对比,验证了本文构造的基于黎曼解的SPH方法的正确性,并且能够有效处理传统的SPH方法中存在的压力振荡问题。基于黎曼解的SPH方法在稀疏波处还是存在着一些误差,但是这些误差的影响远远不如压力振荡造成的影响大。传统的SPH方法在二维拟内爆问题的模拟中压力振荡的问题更加突显,而基于黎曼

解的SPH方法却能有效且稳定地对此复杂流动问题进行模拟。

由于应用SPH方法对激波进行求解的时候,能自动捕获波阵面的运动,不需要通过特别的处理追踪波阵面,而基于黎曼解的修正进一步提高了SPH方法的求解精度,这对于SPH方法在涉及冲击波传播的问题中的应用具有一定的意义。

参考文献

- [1] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics[J]. Reports on progress in physics, 2005, 68: 1703-1759.
- [2] Liu G R, Liu M B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method [J]. Computational Mechanics ,2004,3: DOI: 10.1007/s00466-004-0573-1
- [3] Monaghan J J, Gingold R A. Shock simulation by the particle method SPH[J]. Journal of computational physics, 1983, 52: 374-389.
- [4] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Meshfree particle simulation of the explosion process for high explosive in shaped charge unlined cavity

- configurations[J]. *Shock Waves*, 2003, 12(6): 509-520.
- [5] 杨刚, 韩旭, 龙述尧. 应用 SPH 方法模拟近水面爆炸[J]. *工程力学*, 2008, 25(4): 204-208.
- [6] Monaghan J J. SPH and riemann solver[J]. *Journal of computational physics*, 1997, 136: 298-307.
- [7] Cha S H, Whitworth A P. Implementations and tests of Godunov-type particle hydrodynamic[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2003, 340: 73-90.
- [8] 沈智军, 吕桂霞, 沈隆钧. SPH方法中的Riemann解与人工粘性[J]. *计算数学*, 2006, 28(4): 433-448.
- [9] Parshikov A N. Application of the Riemann problem to the SPH method[J]. *Computational mathematics and mathematical physics*, 1999, 39(7): 1173-1182.
- [10] Parshikov A N, Medin S A, Loukashenko I I, et al. Improvements in SPH method by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation at moderate projectile velocities[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2000, 24: 779-796.
- [11] 徐志宏, 汤文辉, 张若棋. 基于黎曼解的粒子间接触算法在SPH中的应用[J]. *高压物理学报*, 2006, 20(1): 93-96.
- [12] Monaghan J J. On the problem of penetration in particle methods[J]. *Journal of Computational physics*, 1989, 82: 1-15.
- [13] 水鸿寿. 一维流体力学差分方法[M].北京: 国防工业出版社, 1998.
- [14] Hui W H, Li P Y, Li Z W. A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 153: 596-637.