

# Ghost-Fluid Eulerian-Lagrangian 方法及其应用

刘坤 柏劲松 李平

(中国工程物理研究院 621900 绵阳)

**摘要:** 考察了将独立的 Euler 程序和 Lagrange 程序通过 Ghost Fluid 方法结合起来以处理流固耦合问题的算法。在 Euler 计算步中, 采用基于物质界面建立的 Level set 函数对被 Lagrange 域覆盖的 Euler 网格上的物理量进行外插, 同时确保界面两侧压力和法向速度连续; 而在 Lagrange 计算步中, 根据界面所在 Euler 网格压力确定界面各个节点的受力情况, 从而确定 Lagrange 单元的运动与变形。应用这种方法对瞬时起爆爆轰产物作用于爆炸容器问题进行了计算分析, 给出了流场演化及容器各关键位置的超压与变形情况。计算表明, 对长径比为 2: 1 的椭球封头爆炸容器最大超压及最大应变均出现在封头顶部, 这与封头顶部最易破坏的实际相符。

**关键词:** level set; GEL 算法; 流固耦合; 爆炸容器

**中图分类号:** O383.3

**文献标识码:** A

## 1 引言

对一类冲击载荷作用的流固耦合问题, 流体和固体介质本身的物理力学性质差别很大, 其各自的数学描述不同; 同时, 流体和固体介质中都会出现物理量的间断问题, 对数值求解方法要求较高。因此求解这类问题时, 需要对描述流体和固体的不同数学模型和数值方法在流固界面进行耦合。目前, 常见的流固耦合技术有单一方法和混合方法。单一方法包括纯 Euler<sup>[1]</sup>、纯 Lagrange 和纯 ALE(Arbitrary Lagrangian Eulerian)方法。纯 Euler 方法需要结合 VOF(Volume of Fluid)方法描述界面, 在计算中不可避免产生扩散, 使得界面模糊。纯 Lagrange 方法能够准确确定物质界面, 但随流体运动, 其网格变形很大, 往往使得时间步长急剧减小, 甚至导致计算无法继续。纯 ALE 方法对处理动边界和大变形问题上有一定优势, 但多见于处理不可压或近似不可压流体。混合方法包括 Eulerian/Lagrangian 和

ALE/Lagrangian 等。采用 Eulerian/Lagrangian 耦合方法时, 一般利用 level set<sup>[2-3]</sup>方法结合 GFM(Ghost Fluid Method)<sup>[4-5]</sup>技术确定被固体覆盖的 Euler 网格物理量, Euler 域向 Lagrange 边界传递压力信息, 而 Lagrange 边界向 Euler 域传递速度信息, 这种方法也称为 GEL (Ghost-Fluid Eulerian-Lagrangian)方法<sup>[6-7]</sup>。理论上, Eulerian/Lagrangian 方法可以将任意 Euler 和 Lagrange 算法耦合起来。对 ALE/Lagrangian<sup>[8-9]</sup>方法, ALE 计算域与 Lagrange 计算域一般不重叠, 在界面处交换压力和速度信息, 同样地, 这种方法常见于处理不可压或近似不可压问题。

本文着重讨论 Eulerian/Lagrangian 耦合方法, 借助 GFM 方法实现 Euler 程序(MFPPM)<sup>[10-11]</sup>和 Lagrange 程序(DEFEL)<sup>[12]</sup>的耦合计算, 该耦合计算克服了文献[13]中所采用欧拉程序不能处理多介质问题的不足及计算绕射激波与固壁作用出现非物理反射的错误, 并针对爆炸容器内气体流场和壳体响应进行分析。

## 2 GEL 方法介绍

本文中, Euler 计算域和 Lagrange 计算域形成的界面 (E-L 界面) 被认为是不可穿透的、无化学反应、绝热和不存在表面张力的, 界面两侧物理量允许有间断, 是强间断面。根据 E-L 界面两侧物质关于质量、动量和能量的守恒关系, 其两侧满足条件

$$[p] = 0, [u_n] = 0 \quad (1)$$

这里  $p$  为压力,  $u_n$  为介质在界面法线方向的速度,  $[\cdot]$  表示界面两侧物理量之差。尽管公式(1)要求界面两侧介质的压力和法向速度连续, 但在实际计算过程中, 为减小误差, 界面压力往往根据 Euler 计算确定, 而界面的速度和位移由 Lagrange 计算给出。因此, Lagrange 计算步相当于求解在 Lagrange 域边界施压了具有某种分布载荷的问题, Euler 计算步相当于求解人为给定一部分区域速度场问题, 就每一步而言, 两者是完全解耦的, 对已有的 Lagrange 和 Euler 程序, 不需作大的改动。

### 2.1 level set 函数试验方法

在对 ghost 点赋值时, 需要用到各个点的 level set 函数值。本文中 level set 函数的定义与 Ghost-Fluid 方法中 level set 函数定义相同, 即任意点  $\mathbf{x}$  的 level set 函数值  $f(\mathbf{x}, t)$  为该点到界面的最短距离:

$$f(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} -d[\mathbf{x}, \Gamma(t)], & \mathbf{x} \in \Omega_R \\ 0, & \mathbf{x} \in \Gamma(t) \\ d[\mathbf{x}, \Gamma(t)], & \mathbf{x} \in \Omega_G \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\Gamma(t)$  表示 Euler-Lagrange(E-L)界面的曲线, 在每个时间步均可显式得到;  $\Omega_R$  表示 Euler 域中真实的流体区域;  $\Omega_G$  表示 ghost 区;  $d(\cdot)$  表示最短距离函数。

若设真实流体域对应的 level set 函数为负, 而 ghost 域对应 level set 函数为正。采用一种简单的方法来确定其符号。如果  $\Gamma(t)$  为闭合曲线, 其上 Lagrange 节点按顺序依次为  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1)$ , 并定义  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1})$  为  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}$  的方向角<sup>[14]</sup>, 则有

$$\begin{cases} \sum_i \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = 0: f(\mathbf{x}, t) < 0 \\ \sum_i \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = \pi: f(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \sum_i \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = 2\pi: f(\mathbf{x}, t) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

如果  $\Gamma(t)$  不闭合, 可将 Lagrange 域一侧的计

算域边界补充使之闭合。这种方法对多个互不相交的 Lagrange 域情况同样适用。

### 2.2 ghost 域外差

对二维情况, 设 Lagrange 域和 Euler 域网格如图1所示, 被 Lagrange 域覆盖的 Euler 网格即为 ghost 网格。在 Euler 计算步中, ghost 域被与其相邻的 Euler 真实域对应的介质填充, 各 ghost 网格物理量借助 level set 函数方法<sup>[2,3]</sup>根据真实网格上的物理量外插得到。本文采用反射外插方法来对 ghost 点赋值。反射外插形式为

$$\begin{cases} \rho_g = \rho_e \\ \mathbf{u}_g = (2\mathbf{u}_w \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} \\ p_g = p_e \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\rho$  表示密度;  $\mathbf{u}$  表示速度矢量;  $\mathbf{n}$  和  $\mathbf{t}$  分别为 ghost 点 level set 函数  $j$  等值线单位法向矢量和切向矢量; 下标  $g$  表示 ghost 点的值; 下标  $e$  表示根据 Eikonal 方程推进得到的值; 下标  $w$  表示 E-L 界面。Eikonal 方程为

$$I_t \pm \mathbf{n} \cdot \nabla I = 0 \quad (5)$$

其中  $I$  为外插变量, 可以是压力、密度、速度等物理量。其含义为物理量  $I$  沿 level set 函数梯度方向随时间不断向 ghost 域延拓, 它是一个伪时间推进过程。计算中, 时间步长和循环次数均可人为选取, 本文中取  $\Delta t = 0.25 \min(\Delta x, \Delta y)$ , 循环次数取 65。

从方程(4)和方程(5)可以看出, ghost 域和真实流体域密度、压力和切向速度分量均是由 Eikonal 方程从真实流体域外推得到的, 但法向速度的求解略有差别。ghost 点的法向速度取决于 Lagrange 网格在 E-L 界面上投影点的速度  $\mathbf{u}_w$  以及外推速度  $\mathbf{u}_e$ 。对二维情况, ghost 点与其投影点坐标满足

$$\mathbf{x}_w = \mathbf{x}_g - f\mathbf{n} \quad (6)$$

其中取负号是因为 level set 函数  $j$  在 ghost 点取正。假设  $\mathbf{x}_w$  落在 E-L 界面以  $i$  和  $i+1$  结点为端点的线段上, 与两 endpoint 距离分别为  $d_i$  和  $d_{i+1}$ , 两 endpoint 的速度为  $\mathbf{u}_i$  和  $\mathbf{u}_{i+1}$ , 则根据线性插值可得到

$$\mathbf{u}_w = \frac{d_{i+1}\mathbf{u}_i + d_i\mathbf{u}_{i+1}}{d_i + d_{i+1}} \quad (7)$$

需要注意的是, 为避免计算中在界面处出现“overheating”现象, 本文采用了“isobaric fix”变量和“isobaric”修正技术<sup>[15]</sup>对外插过程进行处理。

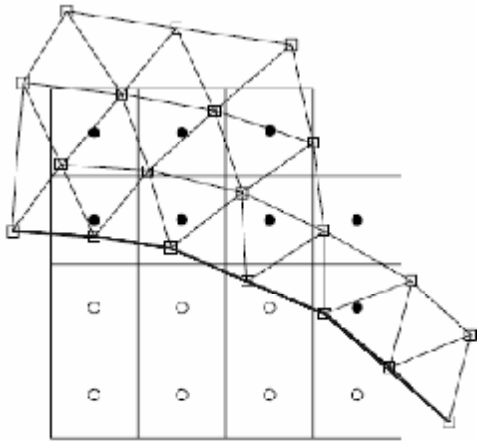


图1 欧拉和拉氏网格示意图

(其中: o 为真实物理网格中心点; • 为 ghost 网格中心点; □ 为拉氏网格节点; E-L 界面以粗实线标出)

### 2.3 Lagrange 域边界条件

Lagrange 域在边界受到来自 Euler 域真实流体作用力, 计算中, 将这种面力近似为作用于 E-L 界面上 Lagrange 节点的集中力。对第  $i$  线段, Euler 网格将其截成  $n$  段, 取每小段中点为压力控制点, 根据 Euler 域真实流体和 ghost 域压力采用双线性插值得到该点压力, 则该线段受到的总力为

$$F_i = (\sum_{j=1}^n l_j P_j^C) n \tag{8}$$

其中:  $l_j$  为第  $j$  小段长度;  $P_j^C$  为其中点压力;  $n$  为线段中点指向 Lagrange 域一侧的单位法向矢量。则第  $i$  线段对其两端点作用力贡献为

$$F_L = \frac{1}{2} F_i \tag{9}$$

### 2.4 Euler 和 Lagrange 算法

本文中对 Euler 域采用多流体 PPM (piecewise-parabolic method)方法计算<sup>[10-11]</sup>, 对介质应用一般气体状态方程。而对 Lagrange 域采用弹塑性流体动力学 Lagrange 有限元方法<sup>[12]</sup>进行计算, 对金属采用 Mie-Grüneisen 状态方程处理。

## 3 数值算例

本节先通过一个算例验证耦合程序的正确性, 然后针对爆炸容器问题进行讨论。

**验证算例:** 考察激波作用于刚性圆柱问题。本算例采用文献[7]和文献[16]提供的计算模型, 计算域为  $[0,1m] \times [0,0.2m]$ , 左右为自由边界条件, 上下为固壁, 初始时刻在  $x=0.08m$  处有一马赫数  $M=3$  的平面激波, 波前气体静止, 压力密度分别为  $1.0Pa$  和

$1.4kg/m^3$ ; 波前气体中有一半半径为  $0.05m$ , 密度为  $10.77kg/m^3$  的静止刚性圆柱, 中心位于  $(0.15m,0.05m)$ 。图 2 给出了网格数为  $1000 \times 200$  时  $t$  分别为  $0, 0.1641s, 0.30085s$  的流场等压线。从图中可以看到激波对圆柱的反射和绕射情况, 与文献[7]给出的计算结果相比, 对应时刻气体压力分布、波系结构及位置、圆柱位置都完全一致, 且本算例中的激波细节更为清晰和丰富。图 3 总结了  $t=0.30085s$  时刻圆柱中心位置对不同网格数的收敛情况, 随着网格数增加, 圆柱中心逐渐趋于定值, 表明本文所采用的算法对网格而言是收敛的, 其网格收敛性与文献[7]结果相比也符合很好。

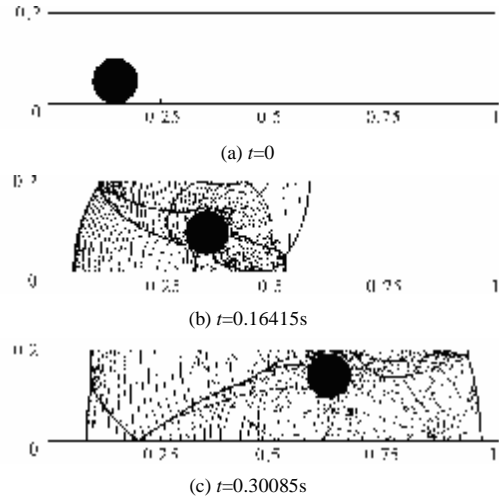


图2 激波作用于刚性圆柱在不同时刻的压力等值线

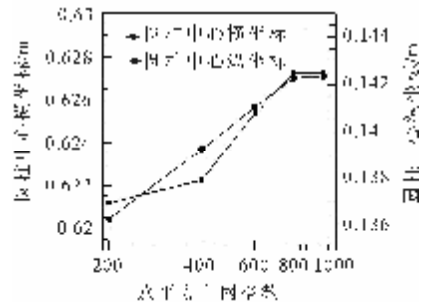


图3 圆柱中心坐标对网格数的收敛情况

**爆炸容器算例:** 炸药在椭球封头爆炸容器中瞬时起爆的数值模拟。对钢材料爆炸容器, 取: 内壁半径  $1060mm$ ; 厚  $53mm$ ; 封头长短轴比为  $2:1$ ; 封头内壁顶端到原点距离  $2120mm$ (容器外型参考文献[9])。采用瞬时起爆模型,  $1kgTNT$  当量爆轰产物初始半径  $52.7mm$ , 密度  $1.63g/cm^3$ , 压力  $10GPa$ , 比热比  $3.0$ , 背景气体为  $1$  大气压空气。忽略三维效应, 采用二维球坐标划分网格,  $(r, q)$  计算域大小为  $(0,2300mm) \times (0, \pi/2)$ , 对应网格数  $460 \times 180$ 。

图 4 是几个时刻容器内的流场压力分布情况。

初始时, 在接触间断处分别有一道球形冲击波和稀疏波向空气和爆轰产物内部传播。同时, 爆轰产物向外膨胀, 其密度和压力减小。在冲击波反射前, 气体流场没有失稳机制, 各物理量保持球形对称, 容器壳体保持静态平衡。当冲击波在容器壁面反射时, 壁面应力迅速升高, 形成所谓超压现象, 容器内壁中环面压力-时间曲线如图 5 所示。随激波波阵面进一步膨胀, 其与壁面接触滑移线向上方移动, 滑移线附近壳体内部应力相应升高。封头顶端受气体作用比较复杂, 结合图 4 给出的流场压力变化, 可以看到封头顶端超压曲线第一道波峰主要来自三种机制: ①扩张冲击波直接在封头顶端反射。由于周向发散作用, 其强度在到达封头顶端时较小, 反射压力也相对较小, 约 4atm。②中心反射冲击波在封头顶端反射。第一道冲击波在壳体内表面反射形成向中心运动的冲击波, 该冲击波在中心二次反射后, 在对称轴方向较强, 并在 3ms 时在封头顶端反射, 反射压力约为 10atm。③一次反射波在顶端会聚和反射作用。由于壳体封头几何外形作用, 一次反射波向封头顶端会聚并在约 3.3ms 时刻反射, 使该处压力极大增加, 约 95atm。显然, 一次反射波的会聚和反射是造成封头压力升高的主要因素。

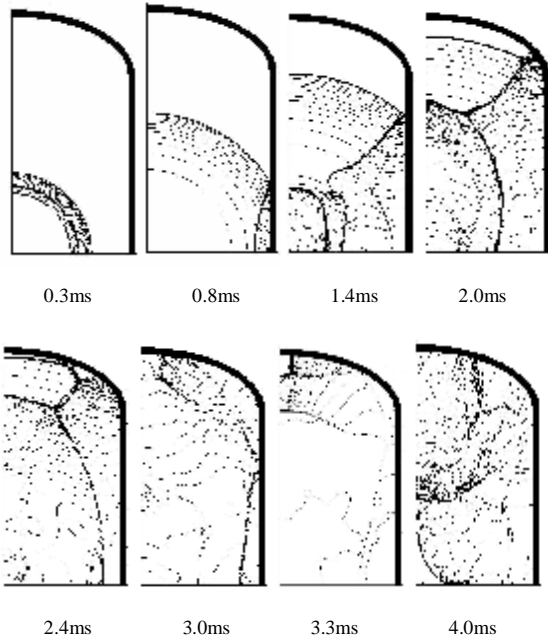


图 4 不同时刻容器流场压力分布

图 5 给出了容器内壁中环面超压曲线的计算结果, 计算所得峰值压力比实验给出的值(见文献[17])小, 其原因可能是本文采用的是瞬时起爆模型, 爆轰产物最大压力低于实际情况所致。图 5 还给出了封头顶端的超压曲线变化情况, 其峰值压力远大于

中环面峰值压力。图 6 给出了容器内壁中环面和封头顶点法向应变随时间的变化情况, 封头顶点的轴向应变比中环面处的径向应变大 1 个量级。这些数据均说明椭球封头爆炸容器在封头处更易损坏, 这与实验一致。

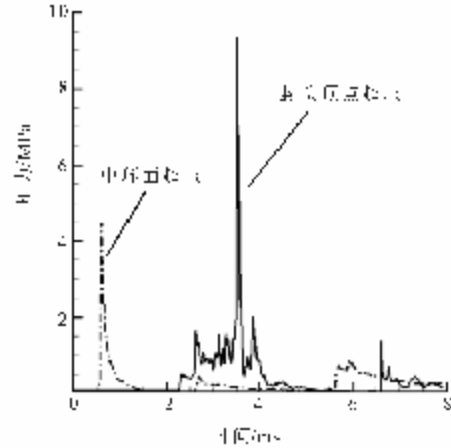


图 5 容器内壁超压曲线

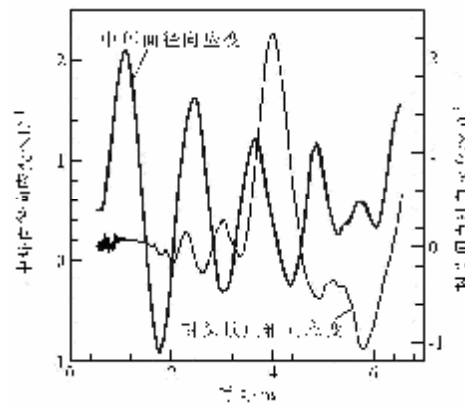


图 6 容器内壁中环面及封头顶点应变变化

### 4 结 论

本文基于 Ghost Fluid 方法实现了多流体 Euler 程序和动力有限元 Lagrange 程序, 成功复现了二维直角坐标下激波作用于刚性圆柱问题, 计算表明该耦合程序结果正确, 具有较高精度。采用该程序考察了瞬时起爆模型下轴对称椭球封头爆炸容器内的流场演化和壳体结构响应, 发现在壳体安全变形范围内, 最大应力出现在封头顶端, 与实验结果一致。分析表明, 对封头顶端安全占主导因素的是一次反射波在封头顶端处的会聚作用。

### 参 考 文 献

[1] Miller G H, Colella P. A conservative three-dimensional Eulerian method for coupled solid-fluid shock capturing [J]. Journal of

- Computational Physics, 2002, 184: 26-82.
- [2] Osher S, Fedkiw R P. Level Set Methods: An overview and some recent results [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 169: 463-502.
- [3] Muller W, Osher S, Sethian J. A. Computational interface motion in compressible gas dynamics [J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 100: 209-228.
- [4] Fedkiw R P, Aslam T. A non-oscillatory Eulerian approach to interface in multimaterial flows the Ghost Fluid Method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152: 457-492.
- [5] Fedkiw R. P, Aslam T, Xu S. The ghost fluid method for deflagration and detonation discontinuities [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 154: 393-427.
- [6] Fedkiw R. P. Coupling an Eulerian fluid calculation to a Lagrangian solid calculation with the ghost fluid method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, 175: 200-224.
- [7] Arienti M, Hung P. A level set approach to Eulerian- Lagrangian coupling [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 185: 213-251.
- [8] Hu H H, Patankar N A, Zhu M Y. Direct numerical simulations of fluid-solid systems using the arbitrary Lagrangian-Eulerian technique [J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, 169: 427-462.
- [9] 张亚军. 爆炸流场及容器内爆流固耦合问题计算研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007.
- [10] Colella P, Woodward P R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulation [J]. *Journal of Computational Physics*, 1984, 54: 172-201.
- [11] 马东军. 可压缩/不可压缩流体交界面高精度数值方法的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2002.
- [12] 裴晓阳. 损伤度函数模型用于碰撞和内爆加载下钢层裂的二维数值模拟研究[D]. 绵阳: 中国工程物理研究院, 2005.
- [13] 姚阳, 李平. Euler-Lagrange 耦合计算的 GEL 方法[J]. *爆炸与冲击*, 2007, 27(5): 420-425.
- [14] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [15] Fedkiw R P, Marquina A, Merriman B. An isobaric fix for the overheating problem in multimaterial compressible flows [J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 148: 545-578.
- [16] Forrer H, Berger M. Flow simulations on Cartesian grids involving complex moving geometries flows [J]. *Int Ser Number Math*, 1998, 129: 315-324.
- [17] 霍宏发. 组合式爆炸容器动态特性分析及实验研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2007.