

Ma X G, Hu F. Refined structure of energy spectrum and energy cascade in atmospheric turbulence. *Chinese J Geophys* (in Chinese), 2004, 47(2): 195 ~ 199

# 大气湍流能谱的精细结构及能量级串

马晓光<sup>1,2</sup> 胡非<sup>1</sup>

1 中国科学院大气物理研究所大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京 100029  
2 中国科学院研究生院, 北京 100039

**摘要** 利用小波变换和傅里叶分析对近地层大气湍流脉动资料进行了分析,发现波数空间能谱著名的“-5/3”标度律成立的区间中存在突变点;还发现对应于小波变换时间尺度 $2^j, j=1, 2, \dots, j_0$ ,高频分量按照 $2^{(j-2)}-1 (j>1)$ 的方式级串,这符合同步级串的物理图象;在标度区间内高频分量作用于幂律局部特征的效果是平均的,不存在影响标度指数的特征频谱.利用不同高度大气湍流资料 and 不同小波基函数作变换,结果是一致的.我们还对 $H=1/3$ 的分形布朗运动产生的随机序列进行了对比实验,发现从能谱角度,实际发达大气湍流偏离高斯分布的程度很小,二者的差别只在高阶标度律时明显.

**关键词** 大气湍流 标度律 能量级串 小波变换 间歇性 惯性副区

**文章编号** 0001-5733(2004)02-0195-05 **中图分类号** P425 **收稿日期** 2003-07-22, 2003-10-25 **收修定稿**

## REFINED STRUCTURE OF ENERGY SPECTRUM AND ENERGY CASCADE IN ATMOSPHERIC TURBULENCE

MA Xiao-Guang<sup>1,2</sup> HU Fei<sup>1</sup>

1 State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Science, Beijing, 100029, China

2 Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100039, China

**Abstract** Using wavelet and Fourier transform we make an analysis of velocity fluctuation data of atmospheric turbulence in the near surface layer. We find that there are some abrupt points in the well-known energy spectrum of “-5/3” scaling law in the wave-number domain. If the timescale of wavelet transform varies with  $2^j, j=1, 2, \dots, j_0$ , the eddy of high-frequency components will cascade in a manner of  $2^{(j-2)}-1 (j>1)$ , which is in accordance with the physical picture of synchro-cascade pattern. There are no characteristic spectrum components, because the effects of the high frequency componets on the properties of spectrum are the same in the region in which the scaling law is hold. We get the same result using different basic functions to data of atmosphere turbulence at different heights. The comparing experiments are also made between a number of random series about the fractal Brown motion with Hurst exponent  $H=1/3$ . The results show that the deviation of real full developed atmospheric turbulence from Gaussian distribution is very small, and the difference only occurs in the case of the high order scaling law.

**Key words** Atmospheric turbulence, Scaling law, Energy cascade, Wavelet transform, Intermittence, Inertial subrange.

**基金项目** 国家自然科学基金项目(40233030)和中国科学院知识创新工程项目(KZCXZ-204).

**作者简介** 马晓光,男,1978年生,毕业于清华大学环境科学与工程专业,现为中国科学院在读研究生,从事大气湍流研究. E-mail: hot\_maxg@hotmail.com

# 1 引言

自 Kolmogorov 奠定了局地均匀各向同性湍流的统计理论<sup>[1]</sup> (K41 理论) 以来,集中于发达湍流这一著名难题的研究已逾半个世纪<sup>[2]</sup>. 分析湍流一直沿用的基本方法是研究空间两点速度差的统计矩幂律变化<sup>[2~12]</sup>,即  $p$  阶结构函数  $S_p(l)$  有

$$v(l)^p = |v(x+l) - v(x)|^p \quad l^{(p,\nu)} \quad (1)$$

其中  $l$  是空间两点的距离,  $v(x)$  是  $x$  点的速度, 表示差分, 标度指数  $(p, \nu)$  被广泛用来描述湍流场的统计特性, 其物理意义是对多尺度复杂系统临界自组织状态的定量刻画.

K41 理论预言极高雷诺数流动中在  $\ll l \ll L$  范围内存在惯性副区 ( $L$  为湍流积分尺度, 是耗散尺度), 其间  $S_p(l) \propto l^{p/3}$ , 由量纲分析还可得速度结构函数的标度指数 ( $k$ ) 和波数空间能谱  $E(k)$  著名的“ $-5/3$ ”幂律, 即  $E(k) \propto k^{-5/3}$ ; 同时, 还预言惯性副区内的标度律与大尺度的运动特性、黏性耗散机理和流动的具体环境无关, 这一假设的普适性吸引人们以极大的热情探索湍流运动的根本性规律. 然而大量实验<sup>[2,4~10]</sup> 发现, 湍流运动结构函数统计特征是非线性的, 标度律在高阶数  $p$  时与 K41 理论所预言的  $(p, \nu) = p/3$  有较大偏离. 能量传输率的间歇现象是导致反常标度特性的根本原因<sup>[2~9,12,14]</sup>, 它使得尺度不变性遭到破坏. 理论分析<sup>[2,10]</sup> 发现湍流场的统计特征不具有严格的自相似性, 而是偏离高斯分布的非平稳过程. 间歇性同时指出 Richardson 能量均匀级串模式的不足<sup>[2~4]</sup>: 在流动由层流转向发达湍流的过程中, 能量由大涡向小涡级串, 从空间上看, 在给定尺度上的能量传输率不是各向同性的, 而是间歇脉动的. 过去的 30 年内涌现出大量经验模型, 其中考虑了间歇性的一些重要的非线性模型, 如  $\beta$ -模型<sup>[2]</sup>, ESS 模型<sup>[7]</sup>, S-L 模型<sup>[8~9]</sup> 等的理论值与观测结果在高阶矩时相当一致<sup>[10]</sup>, 但遗憾的是, 它们都缺少令人信服物理解释<sup>[2,5,6,12]</sup>.

对惯性副区的定义一直非常模糊, 只知道这个范围比  $[l, L]$  狭窄的多<sup>[2,11,12]</sup>. 目前由湍流资料确定惯性副区的方法<sup>[6,10,12]</sup> 主要依靠三阶结构函数标度指数为 1 成立的线性区域来划分, 这显然受到噪声和回归方法影响. 如何有效地标度惯性副区? 其间大涡向小涡的湍能怎样传递? 哪些关键信号支配能量级串的过程? 不同频谱分量作用于标度律局部

特征的效果如何? 这些都涉及到对能谱精细结构的深入研究. 本文利用小波变换和 Fourier 分析从信号多重分解的角度探讨大气湍流速度能谱的这些问题, 其结果有助于加深对湍流惯性副区动力学过程的理解.

# 2 小波变换及小波能谱

小波变换是分析湍流常用的工具<sup>[3~5,10,13~15]</sup>. 将湍流速度信号  $v(l)$  的尺度缩放  $a$  倍, 由 Navier-Stocks 方程标度不变性可得  $v_{x_0}(l) \sim a^{-(x_0)} v_{x_0}(l)$ , 其中  $(x_0)$  为局部尺度指数, 代表  $x_0$  处的湍流强度, 此时  $v(l)$  在  $x_0$  邻域内的小波变换为<sup>[13]</sup>

$$W(a, x_0 + b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{x_0 - b}^{x_0 + b} v_{x_0} \left( \frac{x - x_0 - b}{a} \right) dx \quad (2)$$

其中  $a$  为伸缩因子,  $b$  为尺度因子,  $(\cdot)$  为小波基函数. 按照二进法离散化, 即分辨率  $a = 2^j, j = 1, 2, \dots, j_0$  的方式 ( $j$  为分解尺度序数), 可将速度脉动信号  $v(l)$  分解成近似部分 (低频) 和细节部分 (高频), 即

$$v(l) = L_{j_0}(v(l)) + \sum_{i=1}^{j_0} H_i(v(l)) \quad (3)$$

$L_{j_0}(v(l))$  是分辨率为  $2^{j_0}$  时的低频信息, 而  $H_i(v(l))$  包含  $v(l)$  中尺度  $j_0$  以下所有的高频信息, 这就是 Mallat 金字塔重构算法, 利用它可以实现信号的分解与重构. 小波变换并不改变的标度律<sup>[3,13]</sup>, 因此小波谱可以用定量刻画标度律, 其定义为<sup>[13]</sup>

$$E(k_j) = \frac{(W^{(j)}[i])^2 v(l)}{2 f_s^2}, \quad k_j = \frac{2 f_s}{2^j v(l)} \quad (4)$$

$E(k_j)$  和  $k_j$  分别代表尺度为  $j$  时的能量和波数,  $W^{(j)}[i]$  是分解尺度  $j$  时的小波系数,  $\langle \cdot \rangle$  表示对时间 (空间) 位置上所有系数  $i$  值作平均,  $f_s$  是采样频率,  $v(l)$  为  $v(l)$  的标准差. 将公式 (3) 对数回归可得小波谱标度指数.

# 3 数值实验

大气湍流具有极高的雷诺数 ( $Re > 10^6 \sim 10^8$ ), 是研究发达湍流最理想的实验对象. 本文使用的大气边界层湍流资料取自北京 325m 气象塔观测系统. 该塔位于 39°58' N、116°22' E, 海拔 49m, 地面具

有典型的粗糙元分布非均匀下垫面特征. 超声风速仪(UAT-II型,采样频率 10Hz,声程 15cm)分别安置在塔层 280m,120m 和 47m 三处. 本文选取 2002 年 08 月 6 日~10 日总计 96h 的连续数据,观测期间天气条件平稳,均为晴天. 我们将湍流速度资料按照 60min 的间隔( $N = 36000$  点)分成 96 组进行了分析,文中讨论的是垂直速度脉动  $w(t)$  分析结果.

功率谱由快速 Fourier 变换(FFT)获得,采用 Welch 算法<sup>[15]</sup>将每组  $w(t)$  按照长度  $2^{13}$  (约 13min)分成不重叠的 4 部分(舍弃尾部),然后取 Fourier 系数平均得到较光滑的谱线. 本文选用 Haar 基函数作小波变换,其反对称性对涡旋伸展统计特征的捕捉极为敏感<sup>[10]</sup>,在湍流研究中最常用<sup>[16]</sup>. 我们利

用金字塔算法对垂直速度脉动  $w(t)$  进行 15 层小波分解( $j = 15$ ),由公式(3)获得小波谱系数;还利用 Daubechies 三阶小波基(db3)和 Coiflets 三阶小波基(coif3)重复实验,以排除选择小波基造成的影响.

### 4 结果与讨论

图 1 是  $w(t)$  信号的 Fourier 谱和小波谱,二者在  $[m, n]$  区间内与“ $-5/3$ ”幂律相当一致. Fourier 谱是震荡的,而小波谱对标度指数的刻画则非常清晰. 从图 1 中看到,Haar 小波谱和 Fourier 谱最为吻合,而 db3 和 coif3 几乎与 Haar 小波谱重合,说明实验中对小波基的选取并不敏感.

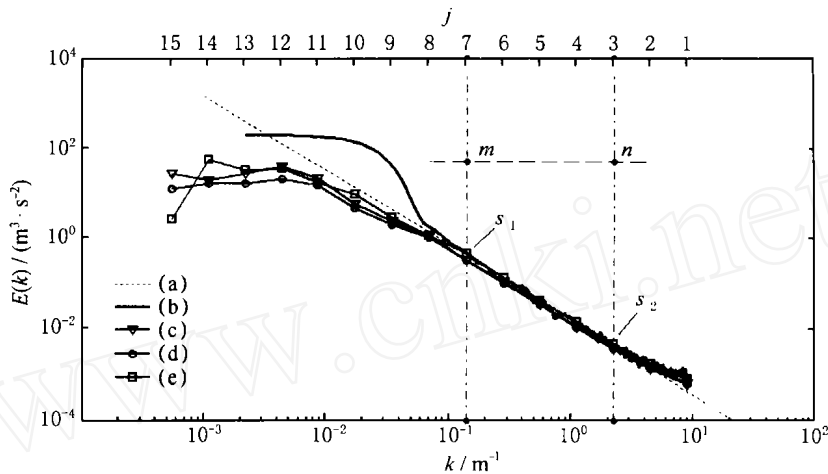


图 1 垂直速度脉动  $w(t)$  的能谱

(a)  $-5/3$  律;(b) Fourier 谱;(c) db3;(d) coif3;(e) Haar 小波谱.

Fig. 1 Energy spectrum of vertical fluctuation velocity  $w(t)$

#### 4.1 标度律起止区间的突变点

利用 FFT 计算分解后不同尺度的功率谱,其中  $PSD(L_j)$ 、 $PSD(H_j)$  对应于尺度  $a = 2^j$  时低频和高频的功率谱. 图 2(c~g) 显示出高频功率谱在  $j = 3 \sim 7$  之间出现分叉现象,它清楚地反映出大涡开始裂解成小涡(图 1 中点  $S_1$ )和小涡在黏性的作用下耗散掉(图 1 中点  $S_2$ )的突变状态,需要注意的是不同尺度涡旋破裂过程是同步发生的. 在图 1 的  $[m, n]$  区间内,小波谱最小二乘拟合值为  $-1.654$ , Fourier 谱为  $-1.633$ ,与“ $-5/3$ ”幂律十分接近. 表 1 是对  $w(t)$  速度分量各 96 组实验的结果,证明了此标度区间的普适性.

$S_1$  和  $S_2$  两点是能谱“ $-5/3$ ”幂律成立区间的状态突变点,这个区间显然包含于 Kolmogorov 预测的惯性区,即在远小于最大涡旋尺度( $10^3$  量级)又远

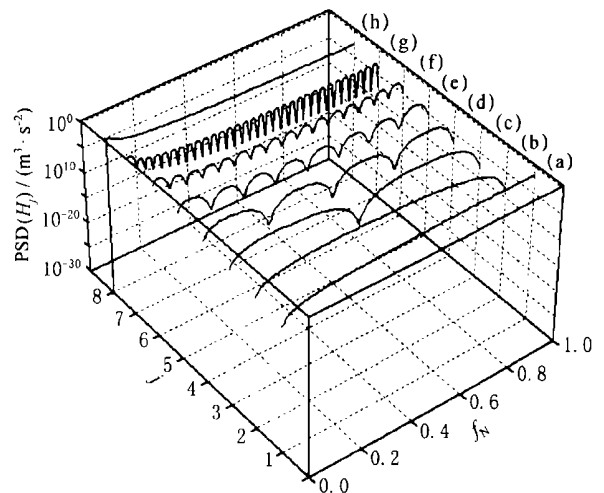


图 2 垂直速度脉动信号  $w(t)$  高频分量功率谱

(a)~(h) 代表小波分解尺度  $j = 1, 2, \dots, 8$ ;  $f_N$  表示归一化频率.

Fig. 2 Power spectrum of the high-frequency vertical fluctuation velocity  $w(t)$

表 1 垂直速度脉动信号  $w(t)$  能谱标度律

Table 1 Scaling law of the vertical fluctuation velocity

$w(t)$ energy spectrum			
$w(t)/(m\ s^{-1})$	湍流观测层高(m)		
	47	120	280
最大	1.713	1.702	1.698
最小	1.576	1.592	1.605
平均	1.656	1.660	1.658

大于耗散尺度 ( $10^{-3}$  量级) 范围. 若将  $w(t)$  信号最高频率看作是 1, 则小波分解便是低通或带通滤波器,  $S_1 (j=7)$  和  $S_2 (j=3)$  两点代表的高频分量分别携带了 0.8% ~ 1.6% 和 12.5% ~ 25% 的带宽, 换算成空间尺度相当于波长在 1 ~ 10m 范围内涡旋运动. 我们将  $[m, n]$  区间定义为惯性副区, 在此频率和空间尺度内, 高频信号的能量级串具有严格的自相似性, 湍流运动的统计规律不依赖于复杂环境和湍流产生的机理, 其物理意义十分清晰.

4.2 影响能量传递的特征尺度

从图 2 (b ~ g) 可以看出, 高频分量 (小尺度涡旋) 也有能量的级串过程, 虽然它对整个能量级串过程的贡献很小, 但其能谱的精细结构说明, 对于极小涡旋而言, 其动力学过程也不像 K41 理论给出的那样, 即各向同性、均匀和平稳的图像. 实验中还发现, 低频分量 (大尺度涡旋) 的功率谱未发生显著分叉, 而是出现杂乱的起伏. 这使我们对惯性副区的能量级串有了深一步的认识.

图 2 (c ~ g) 分叉状态显示较低频率的高频分量起伏更加显著, 这是因为频率愈低时, 小波的尺度因子愈大, 所以能够更多地观察信号“全景”(轮廓) 情况. 此外, 注意到在给定的同一分解尺度上, 低频分量所携带的能量大于高频分量两个数量级, 这说明整体上由大尺度向小尺度的能量传递过程仍然占据了主导地位.

4.3 能量级串的方式

图 2 还清楚地反映出高频分量或小尺度涡旋散裂个数与尺度分解层次之间的关系为  $N(D) = 2^{j-2} - 1$ , 不同于赵松年<sup>[3]</sup>发现的低频分量或大尺度涡旋具有的  $N_z(D) = 2^{j-1} - 1$ , 也有别于 Richardson 所预测的  $N_R(D) = 2^j$ , 三者三维空间上大小 ( $N^3$ ) 的差值随  $j$  增大而剧增. 这种涡旋散裂的个数之间的巨大差别, 在物理图像上反映出级串过程并不是均匀的由大涡向小涡裂解, 事实上含能涡只需一次裂解便同时形成大、中、小、微各种尺度 (如图 2 (c ~ g) 所示) 的概率应该远大于 Richardson 级串模式的概率<sup>[3]</sup>,

这充分肯定了能量同步级串的模式.

4.4 影响局部标度律的特征尺度

利用小波多尺度分解计算  $w(t)$  中扣除某(些)频率后重构信号的功率谱, 图 3 (b ~ h) 依次对应扣除高频分量  $j = 2 \sim 8$  的情况. 可以发现, 标度区内能谱曲线只是在对应高频尺度附近依次略微下沉 (如图 3 箭头指示), 局部标度指数没有出现极端跳跃, 可见高频分量对标度律的局部影响不明显. 图 3 (i) 描述了  $w(t)$  中同时扣除尺度  $j = 2 \sim 8$  高频分量后重构信号的功率谱, 标度指数整体上发生的较小下沉, 但仍能够较好地保持线性特征, 新的标度指数变为 1.86, 略大于原始  $w(t)$  信号, 它刻画出剩余信号新的自组织临界状态. 由此可见, 高频分量作用于局部标度律的效果是平均的.

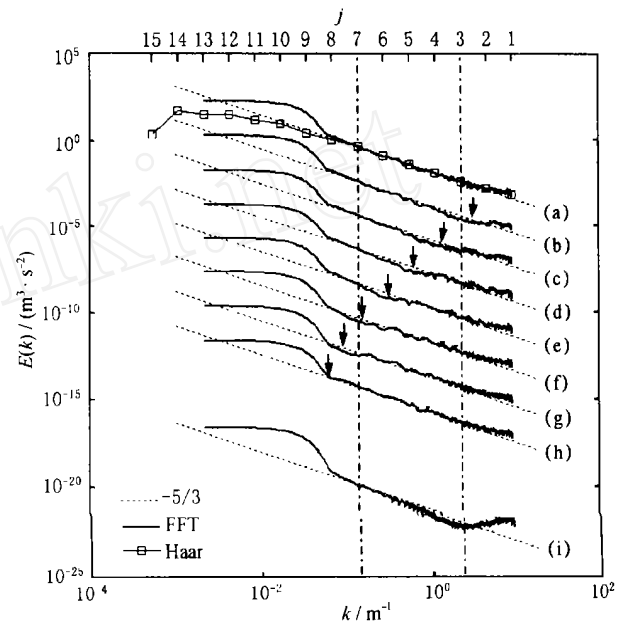


图 3 垂直速度脉动信号  $w(t)$  局部能谱 (a)  $w(t)$  能谱; (b) ~ (h)  $w(t)$  依次去除尺度  $j = 2, 3, \dots, 8$  后重构信号的能谱; (i) 同时去除  $j = 2 \sim 8$  尺度后的能谱; (b) ~ (i) 的纵坐标应与 (a) 重合, 为表示方便, 图中依次向下进行了平移.

Fig. 3 Local energy spectrum of the vertical fluctuation velocity  $w(t)$

4.5 与分形布朗运动的比较

分形布朗运动 (fBm) 产生的随机序列是“高斯 Kolmogorov 信号”<sup>[2,10]</sup>, 具有高斯分布、零均值、非平稳和严格自相似特征, 在 Hurst 指数  $H = 1/3$  情况下, 对于任何阶统计矩理论上均严格满足  $p/3$  的线性标度律. 我们对 fBm 序列采用完全相同的方法进行了分析, 发现 fBm 信号与实际湍流信号的上述特征 (4.1 节 ~ 4.4 节) 非常一致, 这说明从能谱 (二阶结构函数) 的角度, 无法鉴别发达大气湍流偏离高斯

分布的程度,但是二者的差别在高阶结构函数的标度指数上表现得非常清楚,正如图 4 所示, fBm 信号严格遵守  $p/3$  标度律,而实际大气湍流资料标度律是非线性的。

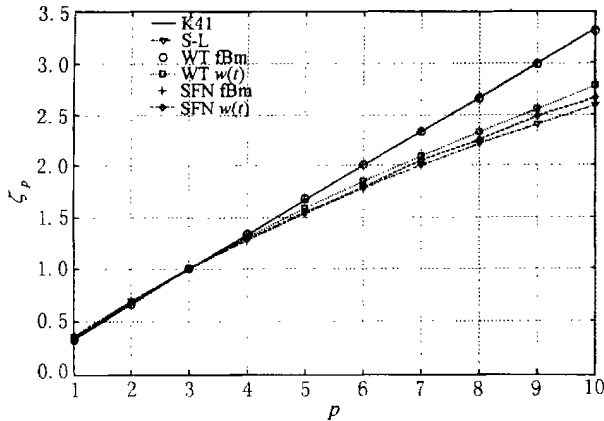


图 4 高阶结构函数标度律  $p$

WT 表示小波变换, SFN 为结构函数数值模拟, S-L<sup>[8]</sup>.

Fig. 4 Scaling law of high order structure function

(WT stands for wavelet transform, SFN stands for structure function numerical simulation, S-L model ref [8])

## 5 结论和展望

通过标度律可以从大尺度脉动中定量预测任何小尺度的脉动,因而研究它的精细结构极为重要。本文利用小波变换和 Fourier 分析对北京 325m 气象塔观测系统的速度超声资料和 fBm 随机序列进行了分析,有以下发现:(1)湍流速度信号能谱“ $-5/3$ ”幂律标度律成立的区间中存在突变点,对应于小波尺度  $2^3$  和  $2^7$  (波长尺度 1~10m),由此可以合理地定义惯性副区;(2)从能谱上看,对应于小波尺度  $2^j$ ,高频分量含能涡按照  $2^{j-2} - 1$  的方式级串,这一结果指出即使在惯性副区,高频分量或含能小涡能量的级串仍然是非平稳的,能量是以同步级串方式传递,加深了我们对惯性副区动力学过程的理解;(3)标度区间内高频分量作用于幂律局部特征的效果是平均的;(4)分形布朗运动产生的随机序列具有(1)~(3)相同的特征,说明从能谱(二阶结构函数)上看发达大气湍流偏离高斯分布的程度可能很小,但高阶标度律可以清晰地反映出二者的差别。

本文的研究工作针对实际近地层大气湍流而开展,所发现的上述规律是否也适用于不同下垫面,如海洋、森林、冰雪等表面的湍流观测资料有待实验进一步证实。

衷心感谢赵松年研究员同作者有益的讨论,感谢

曲绍厚研究员的宝贵支持,感谢曾庆存院士的鼓励。

## 参考文献

- [1] Kolmogorov A N. Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very high Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1941, **30**:301~305 (Reprint: *Proc. R. Soc. Lond A*, 1991, **434**:9~13)
- [2] Frisch U. *Turbulence: The Legacy of A N Kolmogorov*. NY: Cambridge Univ press, 1995. 72~192
- [3] Songnian Z. Sychrocascade pattern in the atmospheric turbulence. *J. Geophys. Res.*, 2003, **108**(D8):4238~4246
- [4] 胡非. 湍流,间歇性和大气边界层. 北京:科学出版社, 1995. 1~65, 87~130, 227~248  
HU F. *Turbulence, Intermittency and Atmospheric Boundary Layer (in Chinese)*. Beijing: Science Press, 1995. 1~65, 87~130, 227~248
- [5] 余振苏, 苏卫东. 湍流中的层级结构和标度律. *力学进展*, 1999, **20**(3):289~303  
SHE Z S, SU W D. Hierarchical structure and scalings in turbulence. *Advances In Mechanics (in Chinese)*, 1999, **20**(3):289~303
- [6] 钱俭. 关于湍流标度律的争鸣. *力学进展*, 2001, **1**(3):405~416  
QIAN J. On the normal and anomalous scaling in turbulence. *Advances In Mechanics (in Chinese)*, 2001, **1**(3):405~416
- [7] Benzi R, Biferale L, Ciliberto S, et al. Scaling property of turbulent flows. *Phys. Rev. E*, 1990, **53**:3025~3027
- [8] She Z S, Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**:336~338
- [9] She Z S, Ren K, Lewis G S, et al. Scaling and structures in turbulent Couette-Taylor flow. *Phys. Rev. E*, 2001, **64**(1):16308~16315
- [10] Katul G, Vidakovic B, Albertson J. Estimating global and local scaling exponents in turbulent flows using discrete wavelet transform. *Phys. Fluids*, 2001, **13**:241~250
- [11] 卞建春, 乔劲松, 吕达仁. 大气近地层湍流能谱特征的再分析. *大气科学*, 2002, **26**:474~480  
BIAN J C, QIAO J S, LU D R. Reanalysis of the turbulent spectra in the atmospheric surface layer. *Chinese J. Atmos. Sci. (in Chinese)*, 2002, **26**:474~480
- [12] Arneoda A, Manneville S, Muzy J F. Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence. *Eur. Phys. J. B*, 1998, **1**:129~140
- [13] Farge M. The continuous wavelet transform of two dimensional turbulent flow. In: *Wavelets and Their Applications*, Rukai eds. NY: Jones and Bartlett Publisher, 1992
- [14] Katul G, Albertson J, Chu C R, et al. Intermittency in atmospheric surface layer turbulence: the orthonormal wavelet representation. In: *Wavelet in Geophysics*. Bi F G and Praveen Keds. San Francisco: Academic Press, 1994. 81~105
- [15] Stoica P, Moses R L. *Introduction to Spectral Analysis*. NY: Prentice-Hall, 1997. 52~54
- [16] Katul G, Vidakovic B. Identification of low-dimensional energy containing /flux transporting eddy motion in the atmospheric surface layer using wavelet thresholding methods. *J. Atmos. Sci.*, 1998, **54**:91~1