

李 斐,岳建利,张利明.应用 GPS/重力数据确定(似)大地水准面.地球物理学报,2005,48(2):294~298

Li F, Yue J L, Zhang L M. Determination of geoid by GPS/Gravity data. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2005, 48(2):294~298

## 应用 GPS/重力数据确定(似)大地水准面

李 斐<sup>1,2</sup>, 岳建利<sup>1</sup>, 张利明<sup>2,3</sup>

1 武汉大学测绘学院, 武汉 430079

2 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077

3 中国科学院研究生院, 北京 100049

**摘 要** 作为 GPS/重力边值问题理论及方法的应用,本文在对 GPS/重力方法确定(似)大地水准面的原理进行简要介绍与分析的基础上,利用收集到的 N 区的 702 个 GPS 重力数据以及 52 个高精度的 GPS 水准数据,计算出该区域的似大地水准面.通过拟合法和系统差直接改正法进行的精度分析表明,应用 GPS/水准方法确定的该地区似大地水准面的精度达到厘米级.

**关键词** GPS/重力边值问题, (似)大地水准面, 精度分析

**文章编号** 0001-5733(2005)02-0294-05 **中图分类号** P312 **收稿日期** 2004-07-27, 2004-11-20 收修定稿

### Determination of geoid by GPS/Gravity data

LI Fei<sup>1,2</sup>, YUE Jian-Li<sup>1</sup>, ZHANG Li-Ming<sup>2,3</sup>

1 School of Geodesy and Geomatics of Wuhan University, Wuhan 430072, China

2 Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China

3 Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

**Abstract** As an application and test of GPS/Gravity boundary value problem, a local geoid located on N area is determined, by using 702 GPS/Gravity data for calculation and 52 GPS/Leveling for matching and checking. The accuracy analyses by matching with GPS/Leveling data and by direct correction to system difference show that the determination of local geoid computed by GPS/Gravity data and method of GPS/Gravity BVP achieved centimeter accuracy.

**Key words** GPS/Gravity BVP, Quasi-geoid, Accuracy analyses

## 1 引 言

(似)大地水准面是代表地球形状的基本面,也是高程基准起始面.同时,大地水准面也是地球内部物质密度分布的外在表现,是地球物理反演的重要约束面. GPS 技术出现之前,人们通过地面重力测量和水准测量,依据 Stokes 理论和 Molodensky 理论<sup>[1]</sup>, 构成出重力异常为边界值的有关扰动位的边

值问题,确定(似)大地水准面,即相对于参考椭球的起伏——大地水准面差距或高程异常.由于边界面坐标的未知性,传统的大地边值问题是一个自由边值问题,涉及到重力归算中地壳密度的未知性以及求解自由边值问题时迭代或逼近技术的复杂性.随着 GPS 技术的出现和快速发展,地面点的坐标可以实时、准确地获得,这不仅使得我们能够得到一个固定的边界面,更为重要的是使地面扰动重力的获取成为现实.据此,文献[1,2]通过以地球自然表面为

**基金项目** 国家自然科学基金(40374005)、测绘遥感信息工程国家重点实验室开放基金(WKL03-0201)及地理空间信息工程国家测绘局重点实验室基础测绘若干重大关键技术课题(1460130424210)资助.

**作者简介** 李 斐,男,1960 年生,博士,武汉大学教授,博士生导师,主要从事物理大地测量与地球物理科研与教学工作.

E-mail: fli@whu.edu.cn

边界面,以其上扰动重力为边值,建立起 GPS/重力边值问题,并对其定义及数学表述进行了详细的研究,应用连续趋近法给出了问题的逼近解及其在确定(似)大地水准面及其外部重力场中的实用计算公式.本文拟结合实际应用,在对 GPS/重力边值问题作进一步分析的基础上,运用 GPS/重力数据确定 N 区域(似)大地水准面,并通过精度分析,论证该方法的实用性和有效性.

## 2 GPS/重力边值问题的基本原理

所谓 GPS/重力边值问题,即是以 GPS 观测所得到的大地高数据,构制以地球自然表面为边界,以其上重力观测数据为边值,得到关于扰动位的 Laplace 方程定解问题.

求解  $T$ , 满足

$$\begin{cases} T = 0, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = -g, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $T$  为地球表面上的扰动位,  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s$  为扰动位  $T$  沿垂向  $n$  的导数,  $s$  为地球自然表面,  $g$  为地面扰动重力值,它是由地面重力观测数据与对应点正常重力(GPS 之前无法准确计算得到)之差构成.

对于公式(1),若垂向  $n$  与地面法向重合,在球近似下,公式(1)的解为著名的 Hotine 积分.而实际上,地球表面的法向与垂向不重合,它们之间由斜向导数相联系,公式(1)的求解显得更为复杂.一个有效的方法是依据  $T$  在地球外部的调和属性,应用 Green 恒等式,将公式(1)转换成为

$$\begin{aligned} & T - \frac{1}{2} \int_s \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) T dS \\ &= \frac{1}{2} \int_s \frac{1}{l} [g - ( \tan \alpha_1 \\ &+ \tan \alpha_2 )] \cos \alpha dS, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $l$  为积分面元与待求点之间的距离,  $g$  为正常重力值,  $\alpha_1$  与  $\alpha_2$  为垂线偏差分量,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别为南北向断面与东西向断面相对水平面的夹角,  $\alpha$  为地形面的最大倾角.

方程(2)的解已由文献[2]应用连续趋近法具体给出,并依据 Bruns 公式<sup>[3]</sup>,进一步得到了高程异常的实用计算公式

$$\zeta = \frac{T}{4} = \frac{R}{4} (g + g_1) H(\alpha) d \quad (3)$$

其中,  $R$  为地球平均半径,  $\sigma$  为单位球面,  $\alpha$  为待求点与流动面元之间的夹角,  $H(\alpha)$  为 Hotine 核,  $g_1$  是与计算点、流动点之间的大地高差  $h - h_p$  有关的量,具体形式为

$$g_1 = \frac{R^2}{2} \frac{h - h_p}{l^3} \left[ g - \frac{1}{8} g H(\alpha) d \right] d. \quad (4)$$

应用公式(3)和(4),通过 GPS 观测和重力观测得到大地高数据和扰动重力数据,即可以计算出高程异常或大地水准面高,从而确定(似)大地水准面.

## 3 实际应用

### 3.1 数据预处理

#### 3.1.1 扰动重力计算

作者收集了 N 区域的 702 个重力点数据和对应点的 GPS 大地高数据  $h$ , 根据公式<sup>[3]</sup>

$$g = g_0 + \frac{\partial}{\partial h} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} h^2 + O(h^3) \quad (5)$$

计算出  $g$ . 式中  $g_0$  为已测重力点在椭球面上投影点的正常重力值.在实际计算中,大地高  $h$  和正常重力  $g_0$  是以 WGS84 参考椭球的基本参数求得的.正常重力  $g_0$  采用的实用计算公式<sup>[4]</sup> 为

$$g_0 = 978.03267714 \frac{1 + 000193185138639 \sin^2 \phi}{(1 - 0.00669437999 \sin^2 \phi)^{1/2}}, \quad (6)$$

其中  $\phi$  为大地纬度.然后根据公式

$$g = g - \zeta \quad (7)$$

计算出每点的扰动重力值  $g$ , 式中  $g$  为测点的重力观测值.图 1 为根据实际数据绘制的扰动重力等值线图,其中  $x$  轴为南北方向,  $y$  轴为东西方向.

#### 3.1.2 数据的格网化处理

数据的格网化处理方法,也就是数据的插值拟合.选择一种局部加权拟合,即 Shepard 曲面拟合法,按内插点的距离远近进行加权平均.其具体的表达式<sup>[5]</sup> 为

$$\hat{g} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n g_i [w_i(r_i)]^2}{\sum_{i=1}^n [w_i(r_i)]^2} & r_i > 0 \\ g_i & r_i = 0 \end{cases} \quad (8)$$

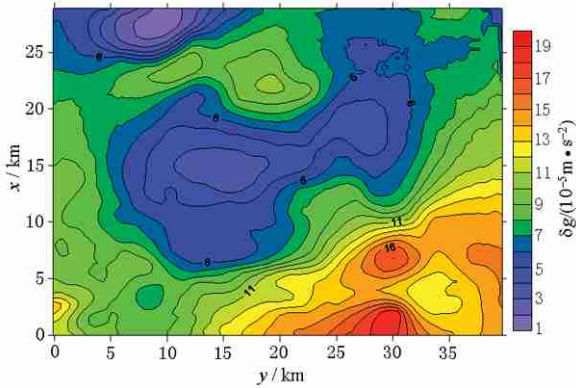


图 1 扰动重力等值线图

Fig. 1 The isoline map of gravity disturbances

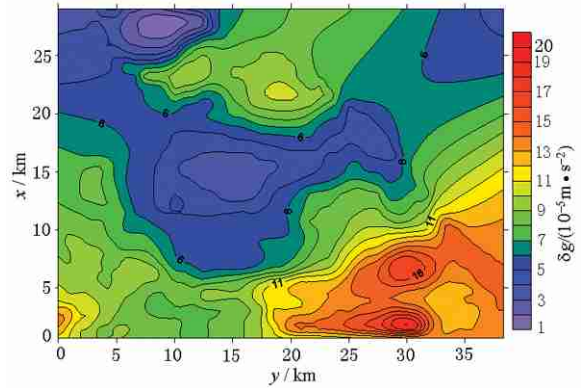


图 2 格网化扰动重力等值线图

Fig. 2 The isoline map of grid gravity disturbances

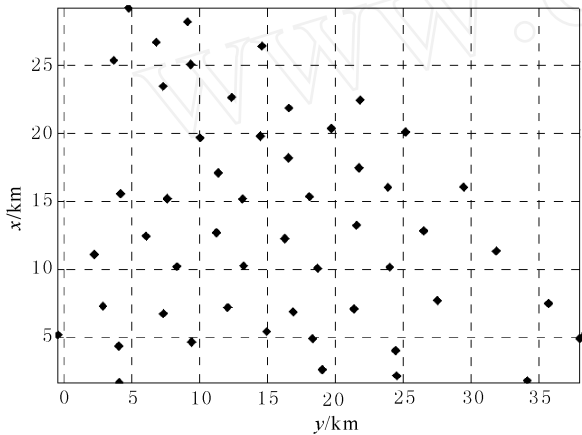


图 3 GPS 水准点分布图

Fig. 3 Distribution of GPS/levelling points

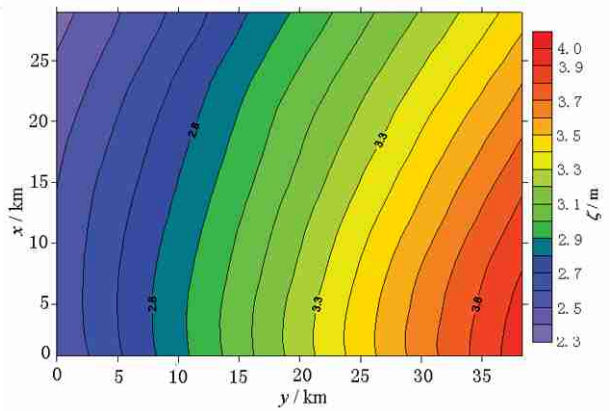


图 4 N 区似大地水准面等值线图

Fig. 4 The isoline map of the quasi-geoid in N area

式中

$$(r_i) = \begin{cases} \frac{1}{r_i}, & 0 < r_i < \frac{R_0}{3} \\ \frac{27}{4R_0} \left(\frac{r_i}{R_0} - 1\right)^2, & \frac{R_0}{3} < r_i < R_0 \\ 0, & r_i > R_0 \end{cases} \quad (9)$$

$R_0$  为拟合所选定的小区域半径,称为搜索半径. 在实际计算中选择的搜索半径为 1km. 图 2 为格网化处理后的 N 区域扰动重力 ( $0.5 \times 0.5$ ) 等值线图.

比较图 1 和图 2,格网化扰动重力数据基本反映了扰动重力的真实情况. 在右上角稍有不同是因为缺少这个角的重力数据,只能用外推的方法模拟一些数据,而在其他区域基本没有失真情况出现. 这也证明了 Shepard 曲面拟合法的的有效性.

### 3.1.3 GPS 水准数据

除已用的 702 个 GPS/重力数据之外,还收集了

52 个高精度 GPS 水准点,其分布如图 3. 从图中 GPS 水准点的分布来看,重力点数据与其分布基本相似,由此将增强对计算结果进行拟合以及进行外部检核的可靠性.

### 3.2 (似)大地水准面的计算

采用国际公认的移去 - 恢复技术,首先移去重力场模型的影响,具体的表达式为

$$g_{RES}(\lambda, \varphi) = g(\lambda, \varphi) - g_{GM}(\lambda, \varphi), \quad (10)$$

其中  $\lambda$  为大地经度,  $g_{RES}$  为剩余扰动重力,  $g_{GM}(\lambda, \varphi)$  为重力场模型所计算的扰动重力.

依据公式 (3) 和 (4),通过 Molodensky 理论中的分析方法得到<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned}
 \xi_{RES}(\lambda, \varphi) = & \frac{R}{4} \left[ g_{RES} - (h - h_p) \frac{\partial g}{\partial h} \right] \\
 & \times H(\lambda, \varphi) d. \quad (11)
 \end{aligned}$$

从而求得剩余似大地水准面  $\xi_{RES}(\lambda, \varphi)$ , 然后通过

公式

$$\zeta(\lambda, \varphi) = \zeta_{RES}(\lambda, \varphi) + \zeta_{GM}(\lambda, \varphi), \quad (12)$$

求得高程异常  $\zeta$ 。式中  $\zeta_{GM}$  为重力场模型所计算的高程异常。按照常规方法,似大地水准面的长波部分可视为与大地水准面的长波部分等值,因此,其具体公式为

$$\zeta_{GM}(\lambda, \varphi) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \varphi), \quad (13)$$

式中  $GM$  为地心引力常数,  $a$  为参考椭球的长半径,  $r$  为向径,  $\bar{C}_{nm}$  和  $\bar{S}_{nm}$  为完全规格化位系数,  $\bar{P}_{nm}(\cos \varphi)$  为完全规格化缔合 Legendre 函数,  $n$  为重力场模型阶数。在实际计算中,我们用的是国际公认同等阶次最好的 EGM96 重力场模型(360 阶)。

在实际计算中,采用  $0.5 \times 0.5$  格网化扰动重力数据为输入数据,采用严密的球面核函数和一维 FFT 技术计算(似)大地水准面。

### 3.3 计算结果

本文按照以上方法计算了 N 区域  $0.5 \times 0.5$  的似大地水准面,然后选择 29 个高精度 GPS 水准点作为高一级控制点进行拟合插值。在计算中,具体运用了二项式拟合,具体的表达式<sup>[6]</sup>为

$$\zeta_o(\lambda, \varphi) = \zeta(\lambda, \varphi) + a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^5, \quad (14)$$

式中  $\zeta_o(\lambda, \varphi)$  和  $\zeta(\lambda, \varphi)$  分别为实际的高程异常和 GPS/重力法确定的高程异常,  $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$  为未知参数,可以通过最小二乘法解算。图 4 为最终计算的似大地水准面等值线图,由图 4 可知,计算区的似大地水准面变化比较平缓,东西向最大变化量约为 1.7m,这完全符合 N 区域的实际地形状况。

## 4 精度分析

为了验证 GPS/重力方法的可靠性我们采用两种方法对计算结果进行检核。

### 4.1 检核 1

由于在计算区内收集到 52 个 GPS 水准点数据(如图 3),按照目前通行的做法,在计算过程中,选择 29 个 GPS 水准点作为高一级控制点作最小二乘拟合,其余均匀分布的 23 个点用作外部检核点使用,表 1 给出了检核结果。可以看出,精度达到了厘米级。

表 1  $0.5 \times 0.5$  格网似大地水准面精度统计信息

Table 1 Accuracy statistics of quasi-geoid with  $0.5 \times 0.5$  grid

检核点个数	最大值 (m)	最小值 (m)	平均值 (m)	平均误差 (m)	标准差 (m)
23	0.067	-0.083	-0.004	0.0162	$\pm 0.024$

### 4.2 检核 2

为了分析 GPS/重力方法与 GPS/水准的几何方法之间的系统偏差的特征,做了如下计算:应用计算区内收集到的 52 个 GPS 水准点,用纯几何方法直接计算出该区域的似大地水准面,称为 GPS/水准(似)大地水准面。将此水准面与 GPS/重力(似)大地水准面进行比较,得到两者之间的系统差为 0.94m,以系统差作为线性改正量,对 GPS/重力(似)大地水准面进行改正(平移),得到计算区的(似)大地水准面。应用已知 GPS 水准点对改正后的 GPS/重力(似)大地水准面进行检核,其精度结果由表 2 给出。

表 2 平移后的  $0.5 \times 0.5$  格网似大地水准面精度统计信息

Table 2 Accuracy statistics of quasi-geoid with  $0.5 \times 0.5$  grid by removing

检核点个数	最大值 (m)	最小值 (m)	平均值 (m)	平均误差 (m)	标准差 (m)
52	0.109	-0.096	0.000	0.039	$\pm 0.048$

表 2 说明,应用 GPS 数据与重力数据,依据 GPS/重力边值问题的求解方法得到的(似)大地水准面,经过 GPS 水准数据的系统差校正后,其精度也达到厘米量级。与传统的重力/水准方法求解(似)大地水准面的方法相比较,GPS/重力方法与 GPS/水准方法的几何结果之间具有较强的线性相关性,故其计算及改正更为方便、可靠。

## 5 结 论

选择 N 区域收集到的 702 个 GPS 重力数据以及 52 个高精度 GPS 水准数据,用国际公认的移去 - 恢复技术和一维 FFT 技术<sup>[7]</sup>计算了该地区(似)大地水准面。计算结果表明,N 区域的似大地水准面变化较为平缓,计算区内东西向最大变化量为 1.7m 左右。通过精度分析发现,应用 GPS/重力方法计算得到的似大地水准面,以 GPS 水准点进行控制与检核,其标准差达到  $\pm 0.024m$ 。而直接以 GPS/重力法计算得到的似大地水准面与 GPS 水准点拟合的似

大地水准面直接进行平移改正后, GPS/重力似大地水准面的精度(标准差)亦达到  $\pm 0.048\text{m}$ , 由此反映出两者之间的强线性相关性. 本研究结果进一步说明了 GPS/重力边值问题理论方法的合理性以及应用 GPS 重力数据确定(似)大地水准面的可行性和可靠性.

GPS/重力方法理论上具有不需要进行归算, 不需要其他类型数据辅助做地形项改正, 尤其是在地形起伏较大地区, 可以减少大量的费时费力的水准测量工作. 因此, 随着 GPS 技术的更广泛应用和数据量的增加, 这一方法的应用前景将更加广阔.

#### 参考文献 (References)

- [ 1 ] 李 斐, 陈 武, 岳建利. GPS/重力边值问题的求解及应用. 地球物理学报, 2003, **46**(5) : 595 ~ 599  
Li F, Chen W, Yue J L. On solution and application of GPS/Gravity boundary value problem. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2003, **46**(5) : 595 ~ 599
- [ 2 ] 李 斐, 陈 武, 岳建利. GPS 在物理大地测量中的应用及 GPS 边值问题. 测绘学报, 2003, **32**(3) : 198 ~ 203  
Li F, Chen W, Yue J L. Physical geoid with GPS. *Acta Geodaetica et Cartographica* (in Chinese), 2003, **32**(3) : 198 ~ 203
- [ 3 ] Heiskanen W A, Moritz H. *Physical Geodesy*. San Francisco and London: W H Freeman Co, 1967
- [ 4 ] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础. 武汉: 武汉大学出版社, 2001. 26 ~ 28  
Kong X Y, Guo J M, Liu Z Q. *Geodesy* (in Chinese). Wuhan: Wuhan University Press, 2001. 26 ~ 28
- [ 5 ] 管泽霖, 管 铮, 黄谟涛等. 局部重力场逼近理论和方法. 北京: 测绘出版社, 1997. 163 ~ 167  
Guan ZL, Guan Z, Huang M T, et al. *Theories and Methods on the Approach of Local Gravity Field* (in Chinese). Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1997. 163 ~ 167
- [ 6 ] 宁津生, 罗志才, 杨沾吉等. 深圳市 1km 高分辨率厘米级高精度大地水准面的确定. 测绘学报, 2003, **32**(2) : 102 ~ 107  
Ning J S, Luo Z C, Yang Z J, et al. Determination of Shenzhen geoid with 1 km resolution and centimeter accuracy. *Acta Geodaetica et Cartographica* (in Chinese), 2003, **32**(2) : 102 ~ 107
- [ 7 ] Haagnans R R N, de Mine, van Gelderenm. Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1-D FFT, and a Comparison with Existing Methods for Stokes' s Integral. *Manuscr Geod*, 1993, **18**: 227 ~ 241