

冯德山, 陈承申, 戴前伟. 基于 UPML 边界条件的交替方向隐式有限差分法 GPR 全波场数值模拟. 地球物理学报, 2010, 53(10):2484~2496, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.10.022

Feng D S, Chen C S, Dai Q W. GPR numerical simulation of full wave field based on UPML boundary condition of ADI-FDTD. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, 53(10):2484~2496, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.10.022

基于 UPML 边界条件的交替方向隐式 有限差分法 GPR 全波场数值模拟

冯德山, 陈承申, 戴前伟

中南大学信息物理工程学院, 长沙 410083

摘 要 交替方向隐式差分(ADI-FDTD)法突破了 Courand-Friedrich-Levy(CFL)条件的约束, 具有无条件稳定的特点; 而单轴各向异性完全匹配层(UPML)边界条件具有宽频带吸收特性, 不需要对电场和磁场进行分裂, 迭代公式简单, 便于编程的特点. 综合两者优势, 本文提出了基于 UPML 边界条件的 ADI-FDTD 探地雷达数值模拟算法, 通过对 3 个二维 Maxwell 方程进行离散化, 推导了 GPR 波的 ADI-FDTD 及其 UPML 边界条件的两个子时间步的迭代差分公式, 并分别给出了详细计算步骤. 在此基础上, 开发了相应的模拟程序, 应用该程序对两个 GPR 模型进行了正演模拟, 得到了两个正演模型的 wiggle 图、扫描图与全波场快照. 通过分析这些雷达剖面图与波场快照, 可以了解雷达波形在空间中的传播过程及变化规律, 有助于雷达资料更可靠、更准确的解释. 模拟结果表明, 基于 UPML 边界条件的 ADI-FDTD 算法可取较大的时间步长, 消除了截断边界处的强反射, 能对简单与复杂 GPR 模型进行快速、高效模拟.

关键词 探地雷达, 交替方向隐式有限差分法, 单轴各向异性完全匹配层, 数值模拟

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.10.022

中图分类号 P631

收稿日期 2010-06-08, 2010-09-09 收修定稿

GPR numerical simulation of full wave field based on UPML boundary condition of ADI-FDTD

FENG De-Shan, CHEN Cheng-Shen, DAI Qian-Wei

School of Info-Physics and Geometrics Engineering, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract ADI-FDTD could break through the restriction of the CFL stability condition and is unconditionally stable. However, UPML boundary condition has the characteristic of absorbing wide frequency and without the necessity for separating electric field from magnetic field. Its simple iterative formula is convenient for compiling program. Synthesizing the merits of both methods, this paper put forward a GPR numerical simulation algorithm of ADI-FDTD based upon UPML boundary condition. Through the discretization of the three two-dimensional Maxwell equations, this paper put forward two sub-time step iterative finite difference formulae of ADI-FDTD and UPML boundary condition of GPR wave, and gave the computing steps in detail separately. Based on this, we could compile the corresponding program, use the program to simulate the two GPR models, get the wiggle maps, scan maps, and snapshots of the two

基金项目 国家自然科学基金项目(40804027, 41074085), 教育部博士点新教师专项科研项目(200805331082), 湖南省自然科学基金重点项目(09JJ3084)和湖南省科技计划项目(2008TP4013-2)资助.

作者简介 冯德山, 男, 1978 年生, 汉族, 湖南祁阳人, 博士, 副教授, 从事探地雷达与地震勘探的研究. E-mail: fengdeshan@126.com

models. By analyzing these section maps and snapshots of the spreading process of GPR wave, we can learn the regularities of radar wave spreading and changing in the space, so as to guide interpretation of radar data reliably and accurately. The simulation result indicated that the ADI-FDTD algorithm based on the UPML boundary condition eliminated the strong reflection of truncating boundaries and it could choose larger time steps. So it could simulate GPR model efficiently, reliably and accurately.

Keywords Ground penetrating radar, Alternating direction iterative finite difference time domain, Uniaxial perfectly matched layer, Numerical simulation

1 引言

探地雷达 (Ground Penetrating Radar, GPR) 数值模拟一直是该领域理论研究的热点, 时域有限差分法 (FDTD) 以算法简单灵活而被广泛采用. 何兵寿等^[1]运用 FDTD 算法结合 Mur 超吸收边界条件进行了理想频散条件下的雷达正演合成; 刘四新等^[2]利用 FDTD 算法结合基于分裂场的 Berenger PML 边界条件实现了雷达波在有损耗介质中的模拟; 肖明顺^[3]研究了适合 GPR 正演模拟 FDTD 算法中的单轴各向异性理想匹配层 (UPML) 边界条件; 李静等^[4]为了提高模拟精度, 采用高阶 FDTD 算法并结合 UPML 边界条件进行了探地雷达数值模拟; 赵延文和聂在平^[5]对比了 UPML 媒质中 ADI-FDTD 方法与常规 FDTD 算法精度及计算效率, 刘四新^[6]、刘磊^[7]等考虑介电常数虚部对电磁波传播的影响, 用含传导电流项的 Maxwell 方程来进行 GPR 正演, 得到了能更精确地刻画地下介质特征的波形.

由此可见, 运用 FDTD 进行探地雷达数值模拟中, 提高计算效率与精度, 合理选取吸收效果好、计算效率高、易于编程的边界条件是今后研究的重点. 考虑到 ADI-FDTD 方法^[8~11]将传统的一个时间步分成了两个分时间步, 这两个分时间步分别采用前向和后向差分, 其误差互相弥补, 兼具隐式差分格式的无条件稳定性和显式差分格式计算相对简单的优点, 可选取较大的时间步长, 极大地提高了计算效率.

本文利用无条件稳定的 ADI-FDTD 算法结合高精度 UPML 吸收边界条件进行 GPR 二维全波场数值模拟, 大大降低了边界上的反射, 提高了 GPR 模拟效率与精度, 除 GPR 模拟得到的剖视图之外, 还得到了 E_z 、 H_x 、 H_y 分量不同时刻的波场快照, 通过对这些全波场快照的分析, 能更加直观全面地了解雷达波的空间传播特性, 提高资料解释精度.

2 ADI-FDTD 法差分公式

由电磁波传播理论可知^[12], GPR 遵循的 Maxwell 方程的 6 个耦合偏微分方程在二维情况下变为 3 个偏微分方程, 其电磁分量仅为 E_z 、 H_x 、 H_y 三个, 称之为 TM 波:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\sigma_m}{\mu} H_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\sigma_m}{\mu} H_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} E_z = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \quad (3)$$

其中 E_z 为电场强度 (V/m); H_x 、 H_y 分别为 x 方向和 y 方向磁场强度 (A/m); ϵ 为介电常数 (F/m); μ 为磁导率 (H/m); σ 为电导率 (S/m); σ_m 为导磁率 (Ω/m). 下面分两个过程分别对 3 个偏微分方程进行差分离散.

过程一 在 $n \rightarrow n+1/2$ 步中, Maxwell 旋度方程左边的时间偏微分项仍旧采用中心差分格式, 对 x 方向导数的差分离散取隐式, 即在子时间步的末时刻 $(n+1/2)\Delta t$ 作差分, 对 y 方向导数的差分离散取显式, 即在初时刻 $n\Delta t$ 作差分离散, H_x 分量在 n 和 $n+1/2$ 时刻均取值, 则式(1)各分量离散为

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{H_x^{n+1/2} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) - H_x^n \left(i, j + \frac{1}{2} \right)}{\Delta t/2},$$

$$H_x = \frac{H_x^{n+1/2} \left(i, j + \frac{1}{2} \right) + H_x^n \left(i, j + \frac{1}{2} \right)}{2},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y}.$$

并定义:

$$CP(m) = \frac{4\mu(m) - \sigma_m(m)\Delta t}{4\mu(m) + \sigma_m(m)\Delta t},$$

$$CQ(m) = \frac{2\Delta t}{4\mu(m) + \sigma_m(m)\Delta t},$$

$$CA(m) = \frac{4\epsilon(m) - \sigma(m)\Delta t}{4\epsilon(m) + \sigma(m)\Delta t},$$

$$CB(m) = \frac{2\Delta t}{4\epsilon(m) + \sigma(m)\Delta t}.$$

同时,定义标号 $(m) = (i, j + 1/2)$, 则式(1)的差分格式为

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) &= CP\left(i, j + \frac{1}{2}\right)H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) \\ &- CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\Delta y}[E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)]. \end{aligned} \quad (4)$$

同理,对 x 方向导数差分离散取隐式,对 y 方向导数的差分离散取显式, H_y 分量在 n 和 $n + 1/2$ 时刻均取值,则式(2)各分量离散为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta t/2}, \\ H_y &= \frac{H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{2}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{E_z^{n+1/2}(i + 1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

如果定义标号 $(m) = (i + 1/2, j)$, 则式(2)的差分格式为

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) &= CP\left(i + \frac{1}{2}, j\right)H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \\ &CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\frac{1}{\Delta x}[E_z^{n+1/2}(i + 1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)]. \end{aligned} \quad (5)$$

再分析(3)式,对于该等式右端两项作差分离散时,对 $\partial H_y/\partial x$ 取隐式差分格式,对 $\partial H_x/\partial y$ 取显式差分格式, E_z 分量在 n 和 $n + 1/2$ 时刻均取值,则式(3)各分量离散为

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{E_z^{n+1/2}(i, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta t/2}, \\ E_z &= \frac{E_z^{n+1/2}(i, j) + E_z^n(i, j)}{2}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

如果定义标号 $(m) = (i, j)$, 则式(3)的差分格式为

$$\begin{aligned} E_z^{n+1/2}(i, j) &= CA(i, j)E_z^n(i, j) + CB(i, j)\left\{\frac{1}{\Delta x}\left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)\right] \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Delta y}\left[H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

以上式(4)~(6)可用于子时间步 $n \rightarrow n + 1/2$ 电磁场的时域推时计算,其中式(4)在计算 $n + 1/2$ 时刻场值时其右端只涉及 n 时刻场值,称为显式格式,但(5)式和(6)式都包含同时刻 $E_z^{n+1/2}$ 和 $H_y^{n+1/2}$ 场分量,不能构成显式时间推进计算,逻辑上讲时间步进是无法完成的,称为隐式格式.为克服此困难,重写(5)式,并把它代入到(6)式消去 $H_y^{n+1/2}$, 得

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i - \frac{1}{2}, j\right)E_z^{n+1/2}(i - 1, j) + \left[1 + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i - \frac{1}{2}, j\right) + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\right] \\ &\times E_z^{n+1/2}(i, j) - CB(i, j)CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\frac{1}{\Delta x^2}E_z^{n+1/2}(i + 1, j) = CA(i, j)E_z^n(i, j) + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j) \\ &\times \left[CP\left(i + \frac{1}{2}, j\right)H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - CP\left(i - \frac{1}{2}, j\right)H_y^n\left(i - \frac{1}{2}, j\right)\right] - \frac{1}{\Delta y}CB(i, j)\left[H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

如果令:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i - \frac{1}{2}, j\right), \\ b_i &= 1 + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i - \frac{1}{2}, j\right) + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j)CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right), \\ c_i &= -CB(i, j)CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\frac{1}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

$$d_i = CA(i, j)E_z^n(i, j) + \frac{1}{\Delta x^2}CB(i, j) \left[CP\left(i + \frac{1}{2}, j\right)H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - CP\left(i - \frac{1}{2}, j\right)H_y^n\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right] - \frac{1}{\Delta y}CB(i, j) \left[H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right],$$

则(7)式可改写为

$$a_i E_z^{n+1/2}(i-1, j) + b_i E_z^{n+1/2}(i, j) + c_i E_z^{n+1/2}(i+1, j) = d_i. \quad (8)$$

显然(8)式可写为矩阵形式

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y}, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} E_z^{n+1/2}(1, j) \\ \vdots \\ E_z^{n+1/2}(i, j) \\ \vdots \\ E_z^{n+1/2}(i_{\max}, j) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_{i_{\max}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{i_{\max}-1} & b_{i_{\max}-1} & c_{i_{\max}-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{i_{\max}} & b_{i_{\max}} \end{bmatrix}.$$

矩阵 \mathbf{A} 为三对角条带矩阵,其首、末元素 b_1, c_1 及 $a_{i_{\max}}, b_{i_{\max}}$ 需要用吸收边界条件得到.

过程二 在 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 步中,对 x 方向导数的差分离散取显式,对 y 方向导数的差分离散取隐式,则式(1)、(2)、(3)离散后的差分格式如下:

$$E_z^{n+1}(i, j) = CA(i, j)E_z^{n+1/2}(i, j) + CB(i, j) \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right] - \frac{1}{\Delta y} \left[H_x^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$H_x^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = CP\left(i, j + \frac{1}{2}\right)H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\Delta y} \left[E_z^{n+1}(i, j+1) - E_z^{n+1}(i, j) \right], \quad (11)$$

$$H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = CP\left(i + \frac{1}{2}, j\right)H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + CQ\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\frac{1}{\Delta x} \left[E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j) \right]. \quad (12)$$

以上式(10)~(12)可用于子时间步 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 电磁场的时域推时计算,其中式(12)在计算 $n+1$ 时刻场值时其右端只涉及 $n+1/2$ 时刻场值,称为显式格式,但(10)式和(11)式都包含同时刻 E_z^{n+1} 和 H_x^{n+1} 场分量,不能构成显式时间推进计算,逻辑上讲时间步进是无法完成的,称为隐式格式.为克服此困难,重写(11)式,并把它代入到(10)式消去 H_x^{n+1} ,得

$$-\frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j - \frac{1}{2}\right)E_z^{n+1}(i, j-1) + \left[1 + \frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right] \times E_z^{n+1}(i, j) - \frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right)E_z^{n+1}(i, j+1) = CA(i, j)E_z^{n+1/2}(i, j) + \frac{1}{\Delta x}CB(i, j) \left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right] - \frac{1}{\Delta y}CB(i, j) \left[CP\left(i, j + \frac{1}{2}\right)H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - CP\left(i, j - \frac{1}{2}\right)H_x^{n+1/2}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right]. \quad (13)$$

如果令:

$$a_i = -\frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j - \frac{1}{2}\right),$$

$$b_i = 1 + \frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j - \frac{1}{2}\right),$$

$$c_i = -\frac{1}{\Delta y^2}CB(i, j)CQ\left(i, j + \frac{1}{2}\right),$$

$$d_i = CA(i, j)E_z^{n+1/2}(i, j) + \frac{1}{\Delta x}CB(i, j)\left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)\right] - \frac{1}{\Delta y}CB(i, j)\left[CP\left(i, j + \frac{1}{2}\right)H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - CP\left(i, j - \frac{1}{2}\right)H_x^{n+1/2}\left(i, j - \frac{1}{2}\right)\right],$$

则(13)式可改写为

$$a_j E_z^{n+1}(i, j-1) + b_j E_z^{n+1}(i, j) + c_j E_z^{n+1}(i, j+1) = d_j. \quad (14)$$

显然(14)式可写为矩阵形式

$$AX = Y. \quad (15)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} E_z^{n+1}(i, 1) \\ \vdots \\ E_z^{n+1}(i, j) \\ \vdots \\ E_z^{n+1}(i, j_{\max}) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_{j_{\max}} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{j_{\max}-1} & b_{j_{\max}-1} & c_{j_{\max}-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{j_{\max}} & b_{j_{\max}} \end{bmatrix}.$$

矩阵 A 为三对角条带矩阵, 其首、末元素 b_1, c_1 及 $a_{j_{\max}}, b_{j_{\max}}$ 需要用吸收边界条件得到.

综上所述, 二维 GPR 波 ADI-FDTD 的计算步骤如下:

在子时间步 $n \rightarrow n + 1/2$

(1) 利用式(4)求 $H_x^{n+1/2}$;

(2) 计算 $E_z^{n+1/2}$, 求解矩阵方程式(8);

(3) 利用式(5)求 $H_y^{n+1/2}$. 至此, 完成子时间步 $n \rightarrow n + 1/2$ 的推进计算.

在子时间步 $n + 1/2 \rightarrow n + 1$

(1) 利用式(12)求 H_y^{n+1} ;

(2) 计算 E_z^{n+1} , 求解矩阵方程式(14);

(3) 利用式(11)求 H_x^{n+1} . 至此, 完成子时间步 $n + 1/2 \rightarrow n + 1$ 的推进计算.

3 PML 边界条件的选取

要达到真正有效将 ADI-FDTD 方法应用到精细模型的 GPR 正演模拟中, 缩短计算时间, 提高计算效率, 有必要为 ADI-FDTD 方法设置正确有效的吸收边界. 当然, 现有的边界条件有很多, 如: Mur 吸收边界条件、完全匹配层 (Perfect Matched Layer, PML) 边界条件, 但选择与 ADI-FDTD 差分格式相配合的吸收边界条件的原则是^[13]: 吸收边界条件的引入不破坏时间步进的无条件稳定性. 考虑到 PML 边界条件的宽频带吸收特性, 受到了人们极大关注, 主要有以下几种形式: 基于分裂场的 Berenger PML^[14]、非分裂场的 CPML^[15]、单轴各向异性吸收层 (UPML)^[16] 等. CPML 吸收层则对低频

分析有一定的优越性; Berenger PML 的理论体系是非 Maxwell 方程的, 物理机制模糊, 同时, 其电磁场分量分裂技术增加了数值实现的难度、计算机内存的占用. 而 UPML 不需要对电场和磁场进行分裂, 波方程仍为 Maxwell 方程, 节约计算机存储量, 提高了计算精度和计算效率, 迭代公式简单, 便于编程. 基于它的诸多优点, 本文中选用 UPML 边界条件结合 ADI-FDTD 方法进行探地雷达数值模拟.

3.1 UPML 边界条件的推导

由电磁场与电磁波的理论可知, 在单轴各向异性 PML 媒质中 Maxwell 两个旋度方程可以表示成:

$$\begin{cases} \nabla \times H = j\omega\epsilon\bar{S} \cdot E, \\ \nabla \times E = -j\omega\mu\bar{S} \cdot H, \end{cases} \quad (16)$$

其中 \bar{S} 具有单轴各向异性媒质的特征, 它可以表示成

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} s_y s_z / s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_z s_x / s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_x s_y / s_z \end{bmatrix}.$$

二维 GPR 波的 UPML 有 4 个平面区和 4 个棱边区, 仅有 E_z, H_x, H_y 分量, 这时 UPML 参数 $s_x = \kappa_x + \sigma_x / j\omega\epsilon_0$, $s_y = \kappa_y + \sigma_y / j\omega\epsilon_0$, $s_z = 1$, 式中 s_x 和 s_y 是有损耗单轴各向异性介质分别在 x 和 y 方向的相对介电常数张量和相对导磁率张量; 参数 κ_x 和 κ_y 是用来吸收到达 UPML 层的凋落波; 参数 σ_x 和 σ_y 是 UPML 区域的衰减因子. 为了让波从模拟区域传播到 UPML 区域, 没有反射, 而且波全部被吸收, 参数 σ 和 κ 在 UPML 区域应该有恰当的空间分布, 例如,

一个恰当的选择:

$$\sigma_i(i) = \sigma_{\max} \left(\frac{i}{d_i} \right)^m,$$

$$\kappa_i(i) = 1 + (\kappa_{\max} - 1) \left(\frac{i}{d_i} \right)^m, \quad (i = x, y)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{m+1}{150\pi\Delta\sqrt{\epsilon_r}},$$

其中 d_i 为 PML 媒质厚度. 根据 Gedney 的经验, 一般取 $m = 4, d_i = (8 \sim 10)\Delta$.

则二维 GPR 波情况下, UPML 边界条件下的 ADI-FDTD 公式汇集如下:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \kappa_x \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} D_z, \quad (17a)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \epsilon_1 \kappa_y \frac{\partial E_z}{\partial t} + \epsilon_1 \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} E_z, \quad (17b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\kappa_y \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} B_x, \quad (17c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \kappa_x \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} B_y, \quad (17d)$$

$$\kappa_x \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\sigma_x}{\epsilon_0} B_x = \mu_1 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (17e)$$

$$\kappa_y \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\sigma_y}{\epsilon_0} B_y = \mu_1 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (17f)$$

式中 $B_x = \mu_1 H_x / s_x, B_y = \mu_1 H_y / s_y, D_z = \epsilon s_y E_z$. 其中式(17a), (17b)为 $H_x, H_y \rightarrow D_z \rightarrow E_z$ 的时间推进计算. 式(17c), (17d)为 $E_z \rightarrow B_x, B_y$ 的时间推进计算, 式(17e), (17f)为 $B_x, B_y \rightarrow H_x \rightarrow H_y$ 的时间推进计算, 这样就完成了 1 个时间步的向前推进.

下面给出(17)式的 ADI-FDTD 形式. 为了公式形式简明, 设

$$\begin{aligned} ax(m) &= \frac{2\kappa_x(m)}{\Delta t} + \frac{\sigma_x(m)}{2\epsilon_0}, \quad bx(m) = \frac{2\kappa_x(m)}{\Delta t} - \frac{\sigma_x(m)}{2\epsilon_0}, \quad er = \frac{2}{\epsilon_1 \Delta t}, \\ ay(m) &= \frac{2\kappa_y(m)}{\Delta t} + \frac{\sigma_y(m)}{2\epsilon_0}, \quad by(m) = \frac{2\kappa_y(m)}{\Delta t} - \frac{\sigma_y(m)}{2\epsilon_0}, \quad hr = \frac{\Delta t}{2\mu_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

过程一 在子时间步 $n \rightarrow n+1/2$ 中, 对 x 方向导数的差分离散取隐式, 即在末时刻 $(n+1/2)\Delta t$ 作差分离散; 对 y 方向导数的差分离散取显式, 即在初时刻 $n\Delta t$ 作差分离散. 于是, (17a)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$\begin{aligned} D_z^{n+1/2}(i, j) &= \frac{bx(i, j)}{ax(i, j)} D_z^n(i, j) + \frac{1}{ax(i, j)} \left[\frac{H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i, j - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

(17b)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$E_z^{n+1/2}(i, j) = \frac{by(i, j)}{ay(i, j)} E_z^n(i, j) + \frac{er}{ay(i, j)} [D_z^{n+1/2}(i, j) - D_z^n(i, j)], \quad (20a)$$

即

$$D_z^{n+1/2}(i, j) = D_z^n(i, j) + \frac{ay(i, j)}{er} E_z^{n+1/2}(i, j) - \frac{by(i, j)}{er} E_z^n(i, j), \quad (20b)$$

(17c)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$B_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = \frac{by\left(i, j + \frac{1}{2}\right)}{ay\left(i, j + \frac{1}{2}\right)} B_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{ay\left(i, j + \frac{1}{2}\right)} \frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y}, \quad (21)$$

(17d)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$B_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = \frac{bx\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{ax\left(i + \frac{1}{2}, j\right)} B_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{1}{ax\left(i + \frac{1}{2}, j\right)} \frac{E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)}{\Delta x}, \quad (22)$$

(17e)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}\right) + hr \cdot \left[ax\left(i, j + \frac{1}{2}\right) B_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - bx\left(i + \frac{1}{2}, j\right) B_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j\right) \right], \quad (23)$$

(17f)式的 ADI-FDTD 离散式为

$$H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+hr\cdot\left[ay\left(i+\frac{1}{2},j\right)B_x^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-by\left(i+\frac{1}{2},j\right)B_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right]. \quad (24)$$

注意(19)~(24)式中除(21)式以外,等式左右端都包含有 $n+1/2$ 同时刻量. 例如在(20)式中, $E_z^{n+1/2}$ 和 $D_z^{n+1/2}$ 均为同时刻量,因此不能构成显式的时间推进计算. 由(19)~(24)式消去 $E_z^{n+1/2}$ 以外的同时刻量,得到

$$a_i E_z^{n+1/2}(i-1,j) + b_i E_z^{n+1/2}(i,j) + c_i E_z^{n+1/2}(i+1,j) = d_i, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{hr}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{ay\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i-\frac{1}{2},j\right)}, \\ b_i &= \frac{ax(i,j)ay(i,j)}{er} + \frac{hr}{(\Delta x)^2} \cdot \left[\frac{ay\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i-\frac{1}{2},j\right)} + \frac{ay\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i+\frac{1}{2},j\right)} \right], \\ c_i &= -\frac{hr}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{ay\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i+\frac{1}{2},j\right)}, \\ d_i &= \frac{ax(i,j)by(i,j)}{er} E_z^n(i,j) + [bx(i,j) - ax(i,j)] D_z^n(i,j) + \left[\frac{H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^n\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^n\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] + \frac{hr}{\Delta x} \left[\left[ay\left(i+\frac{1}{2},j\right) \frac{bx\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i+\frac{1}{2},j\right)} - by\left(i+\frac{1}{2},j\right) B_y\left(i+\frac{1}{2},j\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[ay\left(i-\frac{1}{2},j\right) \frac{bx\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i-\frac{1}{2},j\right)} - by\left(i-\frac{1}{2},j\right) \right] B_y\left(i-\frac{1}{2},j\right) \right] \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

过程二 在子时间步 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 中,对 y 方向导数的差分离散取隐式,即在末时刻 $(n+1)\Delta t$ 作差分离散;对 x 方向导数的差分离散取显式,即在初时刻 $(n+1/2)\Delta t$ 作差分离散. 于是,(17a)式的离散式为

$$\begin{aligned} D_z^{n+1}(i,j) &= \frac{bx(i,j)}{ax(i,j)} D_z^{n+1/2}(i,j) + \frac{1}{ax(i,j)} \left[\frac{H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right], \quad (27) \end{aligned}$$

(17b)式的离散式为

$$E_z^{n+1}(i,j) = \frac{by(i,j)}{ay(i,j)} E_z^{n+1/2}(i,j) + \frac{er}{ay(i,j)} [D_z^{n+1}(i,j) - D_z^{n+1/2}(i,j)], \quad (28a)$$

即

$$D_z^{n+1}(i,j) = D_z^{n+1/2}(i,j) + \frac{ay(i,j)}{er} E_z^{n+1}(i,j) - \frac{by(i,j)}{er} E_z^{n+1/2}(i,j), \quad (28b)$$

(17c)式的离散式为

$$B_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) = \frac{by\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} B_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{ay\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} \frac{E_z^{n+1}(i,j+1) - E_z^{n+1}(i,j)}{\Delta y}, \quad (29)$$

(17d)式的离散式为

$$B_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=\frac{bx\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{ax\left(i+\frac{1}{2},j\right)}B_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{1}{ax\left(i+\frac{1}{2},j\right)}\frac{E_z^{n+1/2}\left(i+1,j\right)-E_z^{n+1/2}\left(i,j\right)}{\Delta x}, \quad (30)$$

(17e)式的离散式为

$$H_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+hr\cdot\left[ax\left(i,j+\frac{1}{2}\right)B_x^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-bx\left(i+\frac{1}{2},j\right)B_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right], \quad (31)$$

(17f)式的离散式为

$$H_y^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+hr\cdot\left[ay\left(i+\frac{1}{2},j\right)B_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-by\left(i+\frac{1}{2},j\right)B_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right]. \quad (32)$$

为了得到 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 的时域推进计算,和 $n \rightarrow n+1/2$ 子时间步一样,由(27)~(32)式消去同时刻量,可得

$$a_j E_z^{n+1}(i,j-1)+b_j E_z^{n+1}(i,j)+c_j E_z^{n+1}(i,j+1)=d_j, \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} a_j &= -\frac{hr}{(\Delta y)^2} \cdot \frac{ax\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}, \\ b_j &= \frac{ax(i,j)ay(i,j)}{er} + \frac{hr}{(\Delta y)^2} \cdot \left[\frac{ax\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} + \frac{ax\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j+\frac{1}{2}\right)} \right], \\ c_j &= -\frac{hr}{(\Delta y)^2} \cdot \frac{ax\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}, \\ d_j &= \frac{ax(i,j)by(i,j)}{er} E_z^{n+1/2}(i,j) + [bx(i,j) - ax(i,j)] D_z^{n+1/2}(i,j) + \left[\frac{H_y^{n+1/2}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_x^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1/2}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] - \frac{hr}{\Delta y} \left[\left[ax\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \frac{by\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{ay\left(i+\frac{1}{2},j\right)} - bx\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. \times B_y^{n+1/2}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - \left[ax\left(i,j-\frac{1}{2}\right) \frac{by\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{ay\left(i,j-\frac{1}{2}\right)} - bx\left(i,j-\frac{1}{2}\right) \right] B_y^{n+1/2}\left(i,j-\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

综上所述,二维 GPR 波 UPML 的 ADI-FDTD 的计算步骤如下:

在子时间步 $n \rightarrow n+1/2$

- (1) 计算 $E_z^{n+1/2}$, 并求解矩阵方程式(25);
- (2) 利用式(20b)求 $D_z^{n+1/2}$;
- (3) 利用式(21)、(22)求 $B_x^{n+1/2}$ 和 $B_y^{n+1/2}$;
- (4) 利用式(23)、(24)求 $H_x^{n+1/2}$ 和 $H_y^{n+1/2}$. 至此,

完成子时间步 $n \rightarrow n+1/2$ 的推进计算.

在子时间步 $n \rightarrow n+1$

- (1) 计算 E_z^{n+1} , 并求解矩阵方程式(33);
- (2) 利用式(28b)求 D_z^{n+1} ;
- (3) 利用式(29)、(30)求 B_x^{n+1} 和 B_y^{n+1} ;
- (4) 利用式(31)、(32)求 H_x^{n+1} 和 H_y^{n+1} . 至此,完成子时间步 $n \rightarrow n+1$ 的推进计算.

3.2 UPML 边界条件应用实例

为验证 UPML 边界条件的吸收效果,在二维空间中加入 Ricker 子波,对比它在有、无 UPML 边界条件下雷达波传播的空间特征. 模拟区域为 $1.0\text{ m} \times 1.0\text{ m}$ 的正方形,空间为均匀素填土介质,其相对介电常数为 10.0,电导率为 0.002 S/m ,在模拟区域的正中心($x=0.5\text{ m}, y=0.5\text{ m}$)位置加入一个 Ricker 子波. 图 1 为未加入边界条件 $1.0 \times 10^{-8}\text{ s}$ 时的全波场快照,分析图 1 中的(a)~(c)三个电磁场分量波场快照,无边界条件下波场分量在截断边界的四条边上产生了强的反射波,而四个角点附近尤其强烈;磁场分量 H_x 与 H_y 图形基本一致,把一个分量旋转 90° ,能很好地吻合,这与其实际物理意义是一致的. 由图 2(a~c)波场快照可知,雷达波等值线是非常规则的同圆心,四个边角没有明显的反射,表明 UPML 层的吸收效果很好,雷达波无反射地进入完全匹配层后被迅速衰减掉. 对比图 1,2 表明:UPML 是比较适合 ADI-FDTD 算法的边界条件,吸收效果良好,同时两图中也说明了均匀介质中雷达波前以球面波辐射传播的特点.

4 探地雷达数值模拟成像实例

4.1 简单模型一

目前探地雷达多采用在地表发射脉冲子波,同时由接收天线在地面接收的工作方式,为更真实地模拟雷达波在地下的传播特征,只考虑地下半空间情况. 设定模拟区域为 $3.0\text{ m} \times 2.0\text{ m}$,Ricker 子波主频为 900 MHz ,位于模型深度 0.1 m 位置. 模型中最上层为空气介质,厚度为 0.1 m ,空气层下面为素填土,其介电常数为 10.0,电导率为 0.002 S/m ,在素填土中存在一个混凝土矩状异常体,其两个对角点坐标为 $(1.425\text{ m}, 0.6\text{ m})$ 、 $(1.575\text{ m}, 0.9\text{ m})$,其介电常数为 6.0,电导率为 0.0005 S/m ,详见图 3 模型示意图. 取网格空间步长为 $dx=0.005\text{ m}, dy=0.005\text{ m}$,UPML 边界设为 10 层网格,总的网格数为 600×400 ,接收雷达波场快照的点位为($x=1.5\text{ m}, y=0.0\text{ m}$). 受 CFL 条件的影响,应用常规的 FDTD 正演软件如(GPRmax, Author: Antonis Giannopoulos)取时间步长为 $1.17933 \times 10^{-11}\text{ s}$,在 Intel(R)Core™2 Duo CPU,P8600@2.4 GHz,2.96GB 的内存物理地址扩展,Window XP 操作系统的 IBM X200 笔记本上计算该雷达剖面 50 道数据,共计花费时间 16 min 46 s,而本文应用结合 UPML 边界条件

ADI-FDTD 算法采用的时间步长为 $2.0 \times 10^{-11}\text{ s}$,采用更大时间步长的同时保证了算法的稳定性,尽管还需求解大型线性方程组,但本文方法把计算时间缩短了 4 min,效率提高了近 1/4(可能会因不同的编程风格存在出入). 分析 wiggle 图 4 与扫描图 5 可知,矩状混凝土的上界面在雷达正演图中仍然为平界面,矩状金属体的两个棱角位置出现绕射波,由于矩形的顶边不是很长,导致矩状体的上边在雷达剖面图中近似为双曲线形弧形,其实质是一个平界面与两个双曲线的半支组成,而矩状体的下界面与上界面类似,只是反射波能量较弱. 分析图 6(a~i)三个电磁场波场快照可知, E_z, H_x, H_y 分量的雷达波前以近似半圆形向下扩散传播,不同时刻雷达波前到达位置得到清楚的反映,当波前到达矩状异常体位置时,异常体的 4 条边产生了强的反射. 通过分析这些不同时刻的雷达全波场快照,可以了解雷达波在地下半空间介质的传播详细过程,以便更好地认识雷达波的传播特性,进一步对工程资料作出精确解释.

4.2 复杂模型二

模型二的模拟区域参数、介质参数、天线主频与模型一完全相同. 混凝土与素填土的分界面存在两个凹的“V”形与一个三角形突起,在混凝土介质中存在两个球状异常体,半径均为 0.02 m ,其中位于 $(0.30\text{ m}, 0.4\text{ m})$ 位置为金属球体,位于 $(2.50\text{ m}, 0.4\text{ m})$ 位置为球状空洞,详见示意图 7. 应用本文 ADI-FDTD 算法并取上例的模拟参数进行计算,模拟所得的正演 wiggle 图与扫描图如图 8、9 所示,不同时刻全波场快照如图 10 所示. 分析 wiggle 图与扫描图可知,两个球状体都产生了强的反射波与绕射波,但两者产生的绕射波是有区别的,金属球体的绕射波能量更强,波幅更宽. 在两个凹的“V”形与一个三角形突起位置也产生了强的绕射波,由于两个凹的“V”形角度大小的区别,在 wiggle 图与扫描图上体现为绕射波形态不一致,右边角度较平缓的凹“V”形下顶点位置产生了明显的回折波.

分析 $5.0 \times 10^{-9}\text{ s}$ 时 E_z 波场快照(图 10a),雷达波前以半圆形向下传播,达到深度 0.5 m 位置; $8.0 \times 10^{-9}\text{ s}$ 时刻(图 10b)波前到达凸出的三角形附近,并在其上顶点产生绕射波,使雷达波一部分以该凸出的三角形顶点为新的波源向上传播,其波前主体部分继续向下传播;在 $1.0 \times 10^{-8}\text{ s}$ 时刻(图 10c),原本以半圆形向下传播的波前,受两个凹的“V”形的影响,变成了带钜齿状半圆向下传播,而向上传播

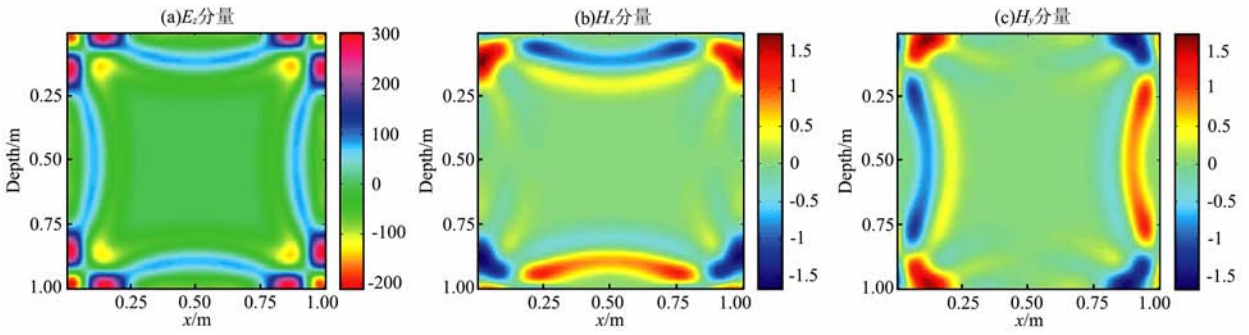


图 1 无边界条件的全波场快照

Fig. 1 The snapshot of full wave field without boundary condition

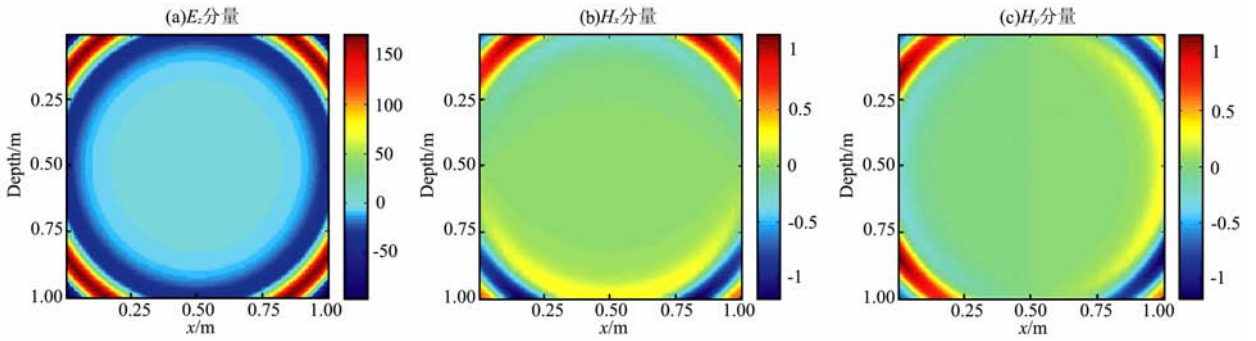


图 2 加入 UPML 边界条件的全波场快照

Fig. 2 The snapshot of full wave field adding the UPML boundary condition

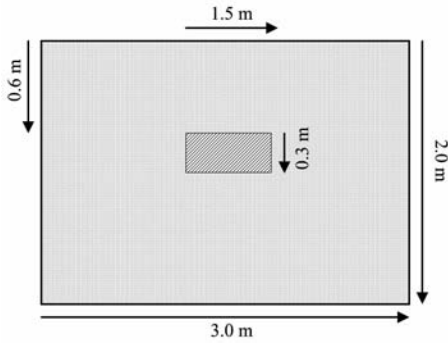


图 3 模型一示意图

Fig. 3 Sketch map of model 1

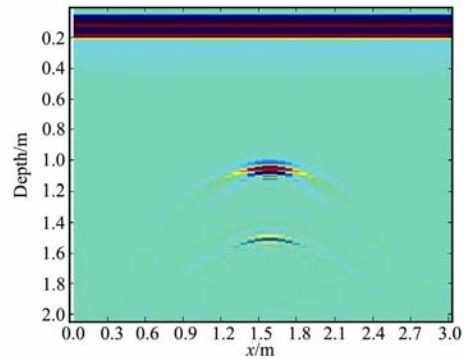


图 5 模型一正演扫描图

Fig. 5 Simulate scan map of model 1

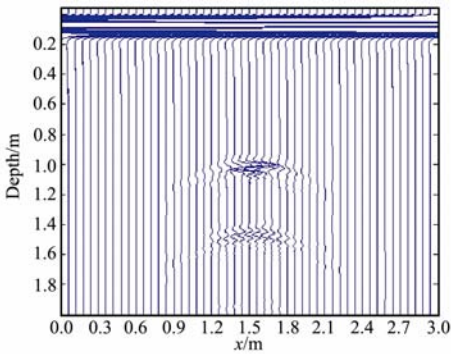


图 4 模型一正演 wiggle 图

Fig. 4 Simulate wiggle map of model 1

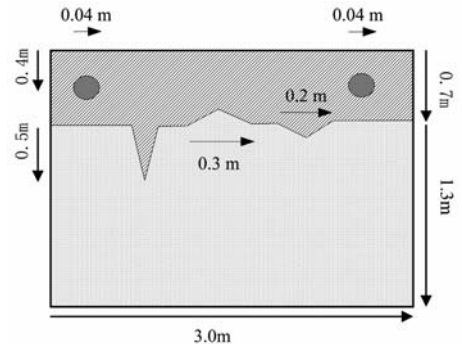


图 7 模型二示意图

Fig. 7 Sketch map of model 2

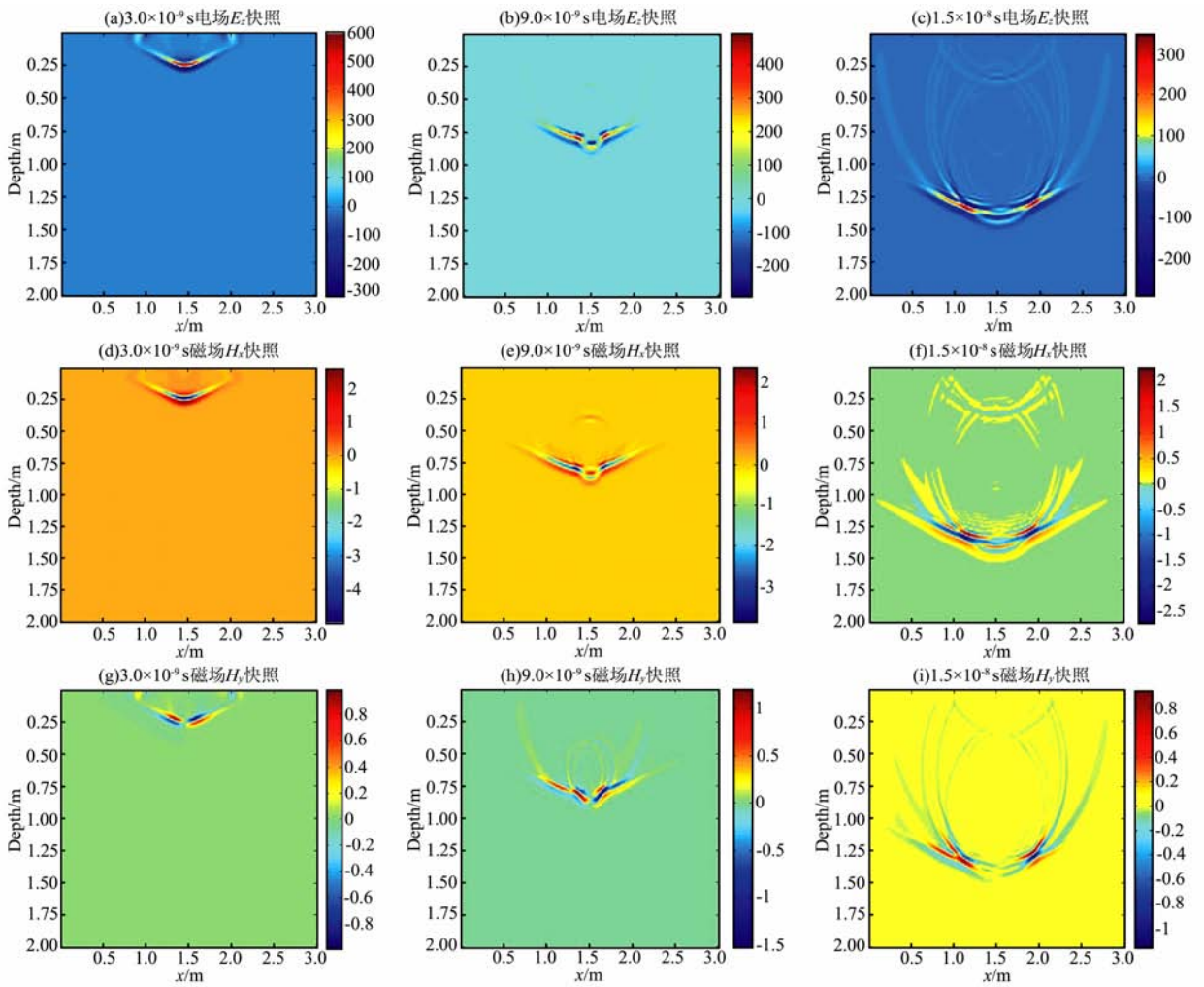


图 6 模型一的雷达波传播全波场快照

Fig. 6 GPR full wave field snapshot of model 1

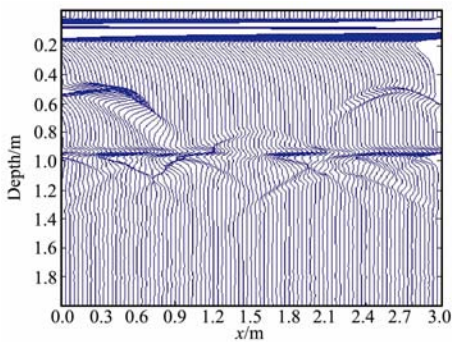


图 8 模型二正演 wiggle 图

Fig. 8 Simulate wiggle map of model 2

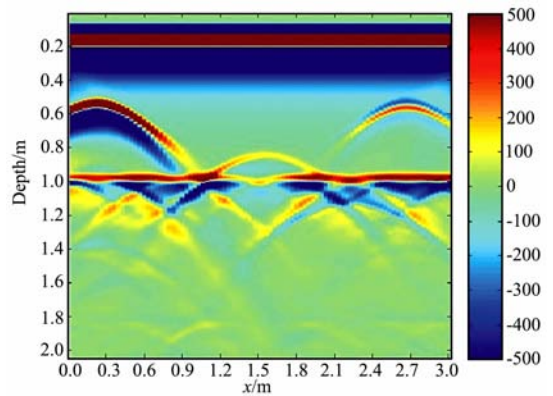


图 9 模型二正演扫描图

Fig. 9 Simulate scan map of model 2

的波前呈三角形的形态传至顶边界处;在 1.2×10^{-8} s 时刻(图 10d),向下传播的波前已至深度 1.2 m,受到两个凹的“V”形影响,图中产生了两个直立的菱形,而向上传播的波已超出边界.图 10(e~l)为磁场 H_x 、 H_y 的雷达波场快照,其传播特征与 E_z 基本类似,

仅在磁场快照左上角区域中能更清楚地分辨出金属球体的位置.由于模型二相对复杂,各种异常体产生的绕射波、反射波、多次波混叠在一起,导致后期的波场快照相对复杂,波场细节特征难以分辨.通过分析雷达 wiggle 图、扫描图与不同时刻的雷达全波场

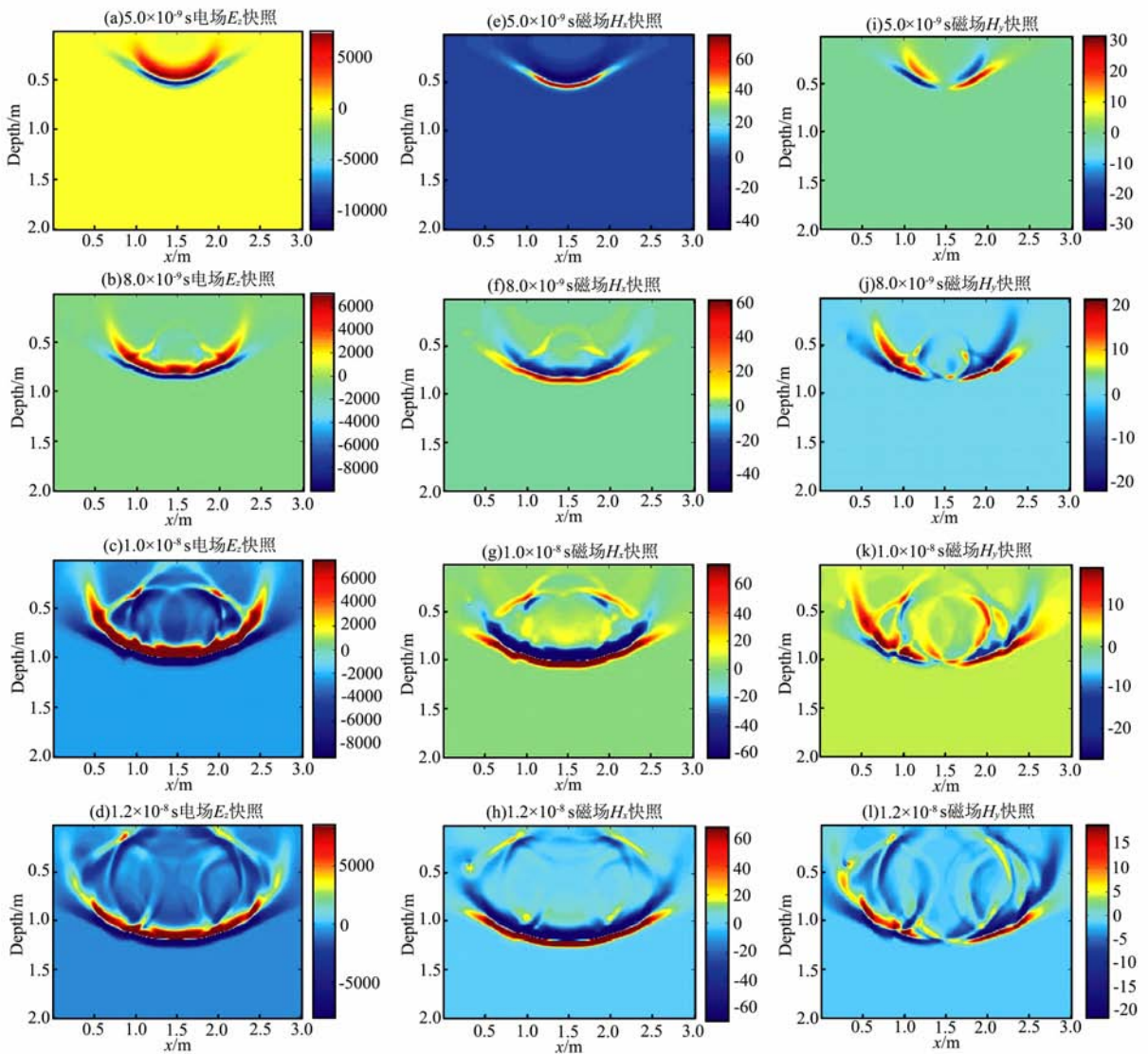


图 10 模型二的雷达波传播全波场快照

Fig. 10 GPR full wave field snapshot of model 2

快照,能更全面准确地推断模型特征,深刻认识雷达波的传播规律,指导 GPR 资料解释。

5 结论及建议

(1) 本文结合交替方向隐式差分的特点,推导了二维雷达(TM)波 ADI-FDTD 方法的迭代计算公式,包括第一个子时间步 $n \rightarrow n+1/2$ 对方程中的 x 方向导数取隐式差分格式, y 方向导数取显式;第二个子时间步 $n+1/2 \rightarrow n+1$ 的迭代过程中对 x 方向导数取显式差分格式, y 方向导数取隐式,并分别给出了其计算步骤。

(2) 成功地将 UPML 吸收边界引入到 GPR 数值模拟的 ADI-FDTD 方法中,而不破坏 ADI-FDTD 方法的无条件稳定性,消除了截断边界处的强反射,

为探地雷达的正演模拟提供了一种新的模拟手段。ADI-FDTD 方法是一种无条件稳定的交替方向隐式时域有限差分法,它克服了常规 FDTD 法受 CFL 约束条件限制,可选取较大的时间步长,尽管需要迭代求解大型线性方程组,仍然提高了计算效率。

(3) 设计了 1 个复杂模型和 1 个简单模型,应用基于 UPML 边界条件的 ADI-FDTD 算法并编制了相应的计算程序,对这两个模型进行数值模拟,得到了正演模拟 wiggle 图、扫描图及雷达全波场快照。通过分析这些雷达剖面图与全波场快照,对于雷达波在空间的传播特征有了系统的了解和更清楚的认识,有助于雷达资料的解释。

参考文献(References)

[1] 何兵寿,张会星. 地质雷达正演中的频散压制和吸收边界条

- 件改进方法. 地质与勘探, 2000, **36**(3):59~63
- He B S, Zhang H X. The suppression of numerical dispersion and improvement of absorbing boundary conditions in forward modeling of GPR. *Geology and Prospecting* (in Chinese), 2000, **36**(3):59~63
- [2] 刘四新, 曾昭发, 徐波. 三维频散介质中地质雷达信号的FDTD数值模拟. 吉林大学学报(地球科学版), 2006, **36**(1):123~127
- Liu S X, Zeng Z F, Xu B. FDTD simulation for Ground Penetrating Radar signal in 3-Dimensional dispersive medium. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)* (in Chinese), 2006, **36**(1):123~127
- [3] 肖明顺, 昌彦君, 曹中林等. 探地雷达数值模拟的吸收边界条件研究. 工程地球物理学报(地球科学版), 2008, **5**(3):315~320
- Xiao M S, Chang Y J, Cao Z L, et al. Research on boundary conditions in forward modeling of Ground Penetrating Radar. *Chinese Journal of Engineering Geophysics* (in Chinese), 2008, **5**(3):315~320
- [4] 李静, 曾昭发, 吴丰收等. 探地雷达三维高阶时域有限差分模拟研究. 地球物理学报, 2010, **53**(4):974~981
- Li J, Zeng Z F, Wu F S, et al. Study of three dimension high-order FDTD simulation for GPR. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, **53**(4):974~981
- [5] 赵延文, 聂在平. UPML媒质中无条件稳定的二维ADI-FDTD方法. 电波科学学报, 2002, **17**(6):586~589, 603
- Zhao Y W, Nie Z P. Unconditionally stable 2D ADI-FDTD method in perfectly matched uniaxial medium. *Chinese Journal of Radio Science* (in Chinese), 2002, **17**(6):586~589, 603
- [6] 刘四新, 曾昭发. 频散介质中地质雷达波传播的数值模拟. 地球物理学报, 2007, **50**(1):320~326
- Liu S X, Zeng Z F. Numerical simulation for Ground Penetrating Radar wave propagation in the dispersive medium. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2007, **50**(1):320~326
- [7] 刘磊, 昌彦君, 曹中林. 色散介质的探地雷达正演模拟. 资源环境与工程, 2009, **23**(2):171~174
- Liu L, Chang Y J, Cao Z L. Forward simulation of Ground Penetrating Radar in dispersive medium. *Resources Environment & Engineering* (in Chinese), 2009, **23**(2):171~174
- [8] 郑奎松. FDTD网络并行计算及ADI-FDTD方法研究[博士学位论文]. 西安:西安电子科技大学理学院, 2005
- Zheng K S. Study of FDTD parallel computing and ADI-FDTD method [Ph. D. thesis] (in Chinese). Xi'an: Institute of Science, XiDian University, 2005.
- [9] Fu W M, Tan E L. Stability and dispersion analysis for higher order 3-D ADI-FDTD Method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, **53**(11):3691~3696
- [10] Namiki T. 3-D ADI-FDTD method-unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 2000, **48**(10):1743~1748
- [11] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 1999, **47**(10):2003~2007
- [12] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分方法(第二版). 西安:西安电子科技大学出版社, 2005
- Ge D B, Yan Y B. Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves (2th Edition) (in Chinese). Xi'an: XiDian University Press, 2005
- [13] Gedney S D, Liu G, Roden J A. Perfectly matched layer media with CFS for an unconditionally stable ADI-FDTD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2001, **49**(11):1554~1559
- [14] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 1994, **114**(2):185~200
- [15] Roden J A, Gedney S D. Convolutional PML (CPML): an efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2000, **27**(5):334~339
- [16] Liu G, Gedney S D. Perfectly matched layer medium for an unconditionally stable three-dimensional ADI-FDTD method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 2000, **10**(7):261~263

(本文编辑 何燕)