

王万银. 位场总水平导数极值位置空间变化规律研究. 地球物理学报, 2010, 53(9): 2257~2270, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.09.027

Wang, W Y. Spatial variation law of the extreme value positions of total horizontal derivative for potential field data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, 53(9): 2257~2270, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.09.027

# 位场总水平导数极值位置空间变化规律研究

王万银

长安大学重磁方法技术研究所, 长安大学地质工程与测绘学院, 长安大学西部矿产资源与地质工程教育部重点实验室, 西安 710054

**摘 要** 通过对位场总水平导数函数性质的研究表明, 位场总水平导数不是位函数, 因而利用位场总水平导数构造新的边缘识别方法时会出现“奇点”, 使得计算结果的稳定性下降. 对单一边界、双边界、多边界模型重力异常总水平导数和重力异常垂向导数总水平导数极值位置的空间变化规律研究表明, 重力异常垂向导数总水平导数和化极磁力异常总水平导数的极值位置相同, 与重力异常总水平导数的极值位置空间变化规律相似. 利用位场总水平导数极大值位置能够准确识别单一直立边界地质体的边缘位置, 但不能准确识别其它任何形体的边缘位置, 其识别结果的偏移量大小随地质体的埋深、水平尺寸以及倾斜程度等变化, 但能收敛于某一固定值; 重力异常垂向导数总水平导数比重力异常总水平导数的峰值更加尖锐、横向识别能力更强, 其极大值位置更靠近地质体上顶面边缘位置, 但存在“次极大值”的影响.

**关键词** 总水平导数, 垂向导数总水平导数, 极值位置, 空间变化规律, 位函数性质, 边缘位置, 次极大值

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2010.09.027

中图分类号 P631

收稿日期 2010-04-12, 2010-08-15 收修定稿

## Spatial variation law of the extreme value positions of total horizontal derivative for potential field data

WANG Wan-Yin

*Institute of Gravity and Magnetic Technology, College of Geology Engineering and Geomatics, Key Laboratory of Western China's Mineral Resources and Geological Engineering, Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710054, China*

**Abstract** In this paper, the function properties of the total horizontal derivative (THDR) of the potential field were studied. The results show that the THDR of potential field is not a potential function, so the new edge recognition method based on the THDR may have the incalculable "singularities", which will make the stability of results decreased. I studied the spatial variation law of the extreme value position of the THDR and the total horizontal derivative of vertical derivative (VDR\_THDR) of gravity anomalies based on the single-border, double-boundary and multi-boundary models. The results show that the VDR\_THDR has the same extreme value positions with the THDR of the magnetic anomalies reduced to the pole and the similar spatial variation law of the extreme value positions with the THDR of gravity anomalies. By the extreme value position of the THDR of the potential field, we can identify the edge position of the single

**基金项目** 国家科技重大专项《大型油气田及煤层气开发》之“海洋深水油气勘探关键技术”项目(2008ZX05025)、国土资源部全国油气资源战略选区调查与评价第一批项目(XQ-2007-03、XQ-2007-05)和第二批项目(2009GYXQ03、2009GYXQ05、2009GYXQ06、2009GYXQ09)、国土资源部《高精度航空物探调查》计划项目之“新疆东昆仑祁漫塔格地区 1:5 万航磁调查”项目(1212010913037)和国家重大基础研究项目(973)南海深水盆地油气资源形成与分布基础性研究项目(2009CB219400)联合资助.

**作者简介** 王万银,男,1962年生,博士,副教授,主要从事重、磁位场数据处理、解释以及正、反演研究工作. E-mail: wwy790223@263.net.cn.

vertical geological body accurately. But the above method can not identify the edge position accurately for any other geological bodies, because the offset of the recognition result varies with the depth, the horizontal size and the inclination degree of the geological bodies, and converges to a fixed value finally. The extreme value peak of the VDR\_THDR is sharper than that of THDR and has more powerful recognition ability in horizontal direction. The extreme value position of the VDR\_THDR is nearer to geological body top edge in contrast to the extreme value position of the THDR, but influenced by the “second maximum”.

**Keywords** total horizontal derivative, total horizontal derivative of vertical derivative, position of extreme value, spatial variation law, property of potential function, edge position, second maximum

## 1 引言

利用重、磁异常可以研究地质体的横向不均匀性,特别是其边缘位置.文中的地质体边缘是指断裂构造线、不同地质体边界线等,实际上是具有一定密度或磁性差异的边缘位置.由于在该边缘位置存在一定的密度或磁性差异,使得地质体边缘附近的重、磁异常变化率较大,故可以利用重、磁异常的变化率来识别地质体的边缘位置.利用重、磁异常识别地质体的边缘位置有数理统计,数值计算和其它三大类<sup>[1]</sup>.数值计算类边缘识别方法是研究最多、应用最广的边缘识别方法,此类方法有垂向导数<sup>[2~5]</sup>、总水平导数<sup>[6~9,5]</sup>、解析信号振幅<sup>[10~14]</sup>三种基本方法和倾斜角<sup>[15]</sup>、 $\theta$ 图<sup>[16]</sup>两种基本比值方法,其他方法均是在这些方法的基础上发展而来.数值计算类边缘识别方法的理论基础是二度体铅垂台阶模型边缘处重、磁异常的变化率达到极大值或零值,故可以利用这一特点来准确识别二度体铅垂台阶的边缘位置.对于倾斜二度体、不规则二度体以及三度体边缘位置的识别均是二度体铅垂台阶模型理论的推广,但识别的边缘位置与真实位置有一定偏差(偏移).该偏差随着地质体边界形状、埋深、水平尺寸及物性差异等的变化而变化.

总水平导数最初由 Cordell<sup>[6]</sup>于1979年提出,并利用重力异常总水平导数识别密度体的边缘位置;1985年,Cordell和 Grauch<sup>[7]</sup>将磁力异常换算成磁源重力异常,计算磁源重力异常的总水平导数来识别磁性体的边缘位置;1987年 Grauch和 Cordell<sup>[8]</sup>又详细讨论了总水平导数的一些影响因素,如倾斜边界的影响、邻近地质体或异常干扰的影响、不同埋深的影响、区域异常的影响、地形起伏的影响、网格间距的影响、不规则边界的影响等;1994

年余钦范和楼海<sup>[9]</sup>利用二度体倾斜台阶模型研究了总水平导数边缘识别结果的精度;2007年钟清<sup>[5]</sup>等利用大量简单规则模型的试算结果研究了重力异常总水平导数确定地质体边缘位置的误差分布规律.这些研究工作奠定了总水平导数的理论基础,但还没有系统研究总水平导数极值位置随地质体埋深的空间变化规律.针对这一问题,本文用 Green 函数将重、磁异常边缘识别方法统一,并研究了位场总水平导数的函数性质以及适应性.通过几种简单规则形体重力异常总水平导数和垂向导数总水平导数的极值位置的解析表达式以及剖面、平面特征,特别是断面特征,重点研究了这些简单规则形体重力异常总水平导数和垂向导数总水平导数的极值位置空间变化规律,为总水平导数边缘识别偏移量大小的研究奠定了一定的理论基础.

## 2 位场总水平导数边缘识别方法的性质及适应性

**2.1 重力异常总水平导数和磁异常总水平导数的关系**  
为研究重、磁异常总水平导数之间的关系,引入 Green 函数,并将重、磁异常及其总水平导数统一用该 Green 函数表示.

(1)重、磁异常的 Green 函数表示式  
对于二度体,Green 函数的形式为

$$V(x, z) = 2 \iint_D \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) d\xi d\zeta, \quad (1)$$

这里  $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}$  为计算点  $P(x, z)$  到场源点  $Q(\xi, \zeta)$  之间的距离( $z$  坐标方向向下为正), $D$  为二度体横截面积.

对于三度体,Green 函数的形式为

$$V(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

这里  $\rho = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}$  为计算点  $P(x, y, z)$  到场源点  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  的距离,  $\Omega$  为三度体体积. 不论是二度体或三度体, 其重力异常均可表示为

$$\Delta g = G\sigma \frac{\partial V}{\partial z} = G\sigma V_z. \quad (3)$$

但对于二度体磁力异常, 其表达式为

$$\Delta \mathbf{T}(x, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} [m_{xz} \cdot V_{xz}(x, z) + (m_{zz} - m_{xx}) \cdot V_{zz}(x, z)]. \quad (4)$$

对于三度体磁力异常, 其表达式为

$$\Delta \mathbf{T}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \begin{aligned} & m_{xx} \cdot V_{xx}(x, y, z) + m_{xy} \cdot V_{xy}(x, y, z) + m_{xz} \cdot V_{xz}(x, y, z) \\ & + m_{yy} \cdot V_{yy}(x, y, z) + m_{yz} \cdot V_{yz}(x, y, z) + m_{zz} \cdot V_{zz}(x, y, z) \end{aligned} \right]. \quad (5)$$

以上各式中,  $G$  为万有引力常数;  $\sigma$  为剩余密度;  $\mu_0$  为真空磁导率;  $V_z$  为 Green 函数一阶垂向导数;  $V_{xx}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yy}, V_{yz}, V_{zz}$  为 Green 函数二阶混合导数;  $m_{xx} = t_x M_x, m_{xy} = (t_x M_y + t_y M_x), m_{xz} = (t_x M_z + t_z M_x), m_{yy} = t_y M_y, m_{yz} = (t_y M_z + t_z M_y), m_{zz} = t_z M_z, \{M_x, M_y, M_z\}$  为磁化强度分量,  $\{t_x, t_y, t_z\}$  为磁异常分量方向单位矢量.

### (2) 二度体重、磁异常总水平导数表达式及适应性

根据上述各式得到二度体重力异常总水平导数的表达式为

$$\text{THDR}(x, z) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta g(x, z)}{\partial x}\right)^2} = \left| \frac{\partial \Delta g(x, z)}{\partial x} \right| = G |\sigma V_{xz}|, \quad (6)$$

而二度体重力异常垂向导数总水平导数的表达式为

$$\text{VDR\_THDR}(x, z) = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Delta g(x, z)}{\partial z \partial x}\right)^2} = G |\sigma V_{zzz}|, \quad (7)$$

二度体磁力异常总水平导数的表达式为

$$\text{THDR}_{\Delta T}(x, z) = \left| \frac{\partial \Delta T(x, z)}{\partial x} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} |m_{xz} V_{xz}(x, z) + (m_{zz} - m_{xx}) V_{zzz}(x, z)|. \quad (8)$$

对于二度体化极磁力异常,  $\{t_x, t_z\} = \{0, 1\}, \{M_x, M_z\} = \{0, M\}$ , 其总水平导数的表达式为

$$\text{THDR}_{\text{RTP}}(x, z) = \left| \frac{\partial \Delta T_{\text{RTP}}(x, z)}{\partial x} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} |M \cdot V_{xz}(x, z)|, \quad (9)$$

对于二度体化赤磁力异常,  $\{t_x, t_z\} = \{1, 0\}, \{M_x, M_z\} = \{M, 0\}$ , 其总水平导数的表达式为

$$\text{THDR}_{\text{RTE}}(x, z) = \left| \frac{\partial \Delta T_{\text{RTE}}(x, z)}{\partial x} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} |M \cdot V_{xz}(x, z)|. \quad (10)$$

由此可以看出, 二度体磁力异常总水平导数受磁异常分量方向 ( $t_x, t_z$ ) 和磁化方向 ( $M_x, M_z$ ) 的影响, 因而不能直接利用磁异常总水平导数的极大值位置来识别地质体的边缘位置. 但二度体化极磁力异常和化赤磁力异常总水平导数不受磁异常分量方向和磁化方向的影响, 因而可以直接利用其极大值位置来识别地质体的边缘位置. 并且化极磁力异常总水平导数与重力异常垂向导数总水平导数的极值位置相同, 也与 Green 函数  $V_{zzz}$  的极值位置相同.

### (3) 三度体重、磁异常总水平导数表达式及适应性

三度体重力异常总水平导数的表达式为

$$\text{THDR}(x, y, z) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta g(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta g(x, y, z)}{\partial y}\right)^2} = G |\sigma| \sqrt{V_{xz}^2(x, y, z) + V_{yz}^2(x, y, z)}, \quad (11)$$

而三度体重力异常垂向导数总水平导数的表达式为

$$\text{VDR\_THDR}(x, y, z) = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Delta g(x, y, z)}{\partial z \partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Delta g(x, y, z)}{\partial z \partial y}\right)^2} = G |\sigma| \sqrt{V_{zzz}^2(x, y, z) + V_{zzz}^2(x, y, z)}, \quad (12)$$

三度体磁力异常在  $x$  和  $y$  方向的一阶水平导数及总水平导数表达式分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta T(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ m_{xx} \cdot V_{xxx}(x, y, z) + m_{xy} \cdot V_{xxy}(x, y, z) + m_{xz} \cdot V_{xxz}(x, y, z) \right. \\ &\quad \left. + m_{yy} \cdot V_{xyy}(x, y, z) + m_{yz} \cdot V_{xyz}(x, y, z) + m_{zz} \cdot V_{xzz}(x, y, z) \right], \\ \frac{\partial \Delta T(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ m_{xx} \cdot V_{xxy}(x, y, z) + m_{xy} \cdot V_{xyy}(x, y, z) + m_{xz} \cdot V_{xyz}(x, y, z) \right. \\ &\quad \left. + m_{yy} \cdot V_{yyy}(x, y, z) + m_{yz} \cdot V_{yyz}(x, y, z) + m_{zz} \cdot V_{yzz}(x, y, z) \right], \\ \text{THDR}_{\Delta T}(x, y, z) &= \sqrt{\left( \frac{\partial \Delta T(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta T(x, y, z)}{\partial y} \right)^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

对于三度体化极磁力异常,  $\{t_x, t_y, t_z\} = \{0, 0, 1\}$ ,  $\{M_x, M_y, M_z\} = \{0, 0, M\}$ , 其总水平导数为

$$\text{THDR}_{\text{RTP}}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} |M| \sqrt{V_{xzz}^2(x, y, z) + V_{yzz}^2(x, y, z)}, \quad (14)$$

对于三度体化赤磁力异常,  $\{t_x, t_y, t_z\} = \{t_x, t_y, 0\}$ ,  $\{M_x, M_y, M_z\} = \{M_x, M_y, 0\}$ , 其水平导数和总水平导数表达式分别为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta T_{\text{RTE}}(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\mu_0}{4\pi} [m_{xx} \cdot V_{xxx}(x, y, z) + m_{xy} \cdot V_{xxy}(x, y, z) + m_{yy} \cdot V_{xyy}(x, y, z)], \\ \frac{\partial \Delta T_{\text{RTE}}(x, y, z)}{\partial y} &= \frac{\mu_0}{4\pi} [m_{xx} \cdot V_{xxy}(x, y, z) + m_{xy} \cdot V_{xyy}(x, y, z) + m_{yy} \cdot V_{yyy}(x, y, z)], \\ \text{THDR}_{\text{RTE}}(x, y, z) &= \sqrt{\left( \frac{\partial \Delta T_{\text{RTE}}(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta T_{\text{RTE}}(x, y, z)}{\partial y} \right)^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

可以看出, 三度体磁力异常和化赤磁力异常的总水平导数依然受磁异常分量方向  $(t_x, t_y, t_z)$  和磁化方向  $(M_x, M_y, M_z)$  的影响, 只有化极磁力异常的总水平导数不受其影响. 因此, 不能直接使用磁异常总水平导数来识别磁性体的边缘位置, 必须将其转换成化极磁力异常或磁源重力异常才可以使用.

由于化极磁力异常总水平导数和重力异常垂向导数总水平导数的极值位置相同, 所以本文不再研究化极磁力异常总水平导数极值位置的空间变化规律, 只研究重力异常以及重力异常垂向导数的总水平导数极值位置空间变化规律.

## 2.2 位场总水平导数的函数性质及“奇点”问题

这里通过位函数的性质来研究位场总水平导数的函数性质, 并讨论“奇点”问题. 对于剖面位场(重力异常或磁力异常)  $g(x, z)$ , 其总水平导数 THDR 的计算公式为

$$\text{THDR}(x, z) = \sqrt{\left( \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} \right)^2} = \left| \frac{\partial g(x, z)}{\partial x} \right| = |g_x| = \sqrt{g_x^2}, \quad (16)$$

对于平面位场  $g(x, y, z)$ , 其总水平导数 THDR 的计算公式为

$$\text{THDR}(x, y, z) = \sqrt{\left( \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}, \quad (17)$$

这里的  $g_x$  和  $g_y$  分别为位场沿  $x$  和  $y$  方向的一阶水平导数.

剖面位场  $g(x, z)$  满足 Laplace 方程  $g_{xx} + g_{zz} = 0$ , 其总水平导数所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \text{THDR}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{THDR}}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{THDR} \neq 0), \quad (18)$$

即当剖面位场  $g(x, z)$  是位函数时, 位场总水平导数只有在  $\text{THDR} \neq 0$  的条件下才能保持位函数的性质.

平面位场  $g(x, y, z)$  满足 Laplace 方程  $g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0$ , 其总水平导数所满足的方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \text{THDR}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{THDR}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \text{THDR}}{\partial z^2} &= \frac{(g_x g_{xy} - g_y g_{xx})^2 + (g_x g_{yy} - g_y g_{xy})^2 + (g_x g_{yz} - g_y g_{xz})^2}{\text{THDR}^3} \geq 0, \\ (\text{THDR} \neq 0)\end{aligned}\quad (19)$$

即当平面位场  $g(x, y, z)$  是位函数时, 位场总水平导数不能保持位函数的性质.

通过以上证明得出, 不论是剖面位场或平面位场, 其总水平导数均不能保持位函数的性质. 理论上讲不能以位场总水平导数来构造新的位场边缘识别方法, 但若以位场总水平导数来构造新的边缘识别方法时, 就一定要注意其“奇点”问题. 如平面位场总水平导数垂向导数的表达式为

$$\frac{\partial \text{THDR}}{\partial z} = \frac{1}{\text{THDR}} \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} \right] = \frac{(g_x \cdot g_{xz} + g_y \cdot g_{yz})}{\text{THDR}}. \quad (20)$$

当位场总水平导数  $\text{THDR}=0$  时总水平导数垂向导数出现了无法计算的“解析奇点”。由于该“解析奇点”的存在使得当  $\text{THDR}=0$  时位场总水平导数垂向导数的计算结果不稳定而发生畸变。这一问题在某些边缘识别方法中也存在,如以倾斜角为基础构造出的倾斜角总水平导数在总水平导数为 0 或解析信号振幅为 0 时出现了“奇点”。

### 3 重力异常总水平导数极值位置空间变化规律

重力异常总水平导数极值位置的空间变化规律可以通过求解极值位置的解析表达式来进行研究,若难以得到其解析表达式则必须通过其极值位置的断面变化特征来进行研究。这里将选用单边界模型(铅垂台阶和倾斜台阶)、双边界模型(直立平行四边形和梯形)、多边界模型(直立平行四边形组合)、点质量模型(球体)和三度体模型(直立六面体)来研究重力异常总水平导数极值位置的空间变化规律。

#### 3.1 直立单边界模型——铅垂台阶

铅垂台阶模型只有一个直立边界,另外一个边界位于无穷远处,该模型用来模拟单边陡倾角断层或接触面。在直角坐标系中( $z$  坐标方向向下为正),设坐标原点位于铅垂台阶边缘在水平线的投影处。又设铅垂台阶的剩余密度为  $\sigma$ ,顶面和底面的  $z$  坐标分别为  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$ ,其引起的重力异常总水平导数(Total Horizontal Derivative)  $\text{THDR}$  为

$$\text{THDR}(x,0) = \left| \frac{\partial \Delta g(x,0)}{\partial x} \right| = |G\sigma| \cdot \ln \frac{x^2 + \zeta_2^2}{x^2 + \zeta_1^2} \quad (21)$$

由(21)不难看出,  $\text{THDR}(-x,0) = \text{THDR}(x,0)$ ,即铅垂台阶重力异常总水平导数是一个非负偶函数。为了研究重力异常总水平导数的极值位置,对(21)沿  $x$  方向求导得

$$\frac{\partial \text{THDR}(x,0)}{\partial x} = |G\sigma| \cdot \frac{x[\zeta_1^2 - \zeta_2^2]}{[x^2 + \zeta_1^2] \cdot [x^2 + \zeta_2^2]}, \quad (22)$$

并令其为 0 可得极值位置的解为  $x_m=0$ ,该极值为极大值,位于铅垂台阶边缘处。因此,可以利用重力异常总水平导数极大值位置来准确识别铅垂台阶的边缘位置。

#### 3.2 倾斜单边界模型——倾斜台阶

倾斜台阶只有一个倾斜边界,另外一个边界位于无穷远处,该模型用来模拟单边缓倾角断层或接

触面。在直角坐标系中( $z$  坐标方向向下为正),设坐标原点位于倾斜台阶上顶面边缘在水平线的投影点,顶面和底面的  $z$  坐标分别为  $\zeta_1$  和  $\zeta_2$ ,倾斜面和底面的夹角为  $\alpha$ ,剩余密度为  $\sigma$ ,其引起的重力异常总水平导数  $\text{THDR}$  为

$$\text{THDR}(x,0) = \left| \frac{\partial \Delta g(x,0)}{\partial x} \right| = |G\sigma| \times \left| \begin{aligned} & \sin^2 \alpha \cdot \ln \left( \frac{\zeta_2^2 + [x + (\zeta_2 - \zeta_1) \cot \alpha]^2}{\zeta_1^2 + x^2} \right) \\ & - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \arctan \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)(x - \zeta_1 \cot \alpha)}{x^2 + x(\zeta_2 - \zeta_1) \cot \alpha + \zeta_1 \zeta_2} \end{aligned} \right| \quad (23)$$

对(23)沿  $x$  方向求导,并令其为 0,经推导后得到极值位置的解为

$$x_m = -\zeta_1 \cot \alpha \cdot \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}, \quad (24)$$

该极值位置就是极大值位置。若倾斜台阶上顶面边缘点坐标为  $(0, \zeta_1)$ ,下底面边缘点坐标为  $(\xi_2, \zeta_2)$ ,则(24)还可以表示为

$$x_m = \zeta_1 \cdot \frac{\xi_2}{\zeta_2 + \zeta_1}. \quad (25)$$

可以看出该极大值位置既不是倾斜台阶模型的上顶边缘位置,也不是下底边缘位置,是随着倾斜台阶的埋深以及倾斜角而变化的。也就是说,利用重力异常总水平导数的极大值位置能够准确识别铅垂台阶的边缘位置,但不能准确识别倾斜台阶的边缘位置,其识别结果必然有一定偏差(偏移)。当  $\xi_2=0$  时,  $x_m=0$ ;当埋深较大时,  $x_m \rightarrow \xi_2/2$ 。即重力异常总水平导数极大值位置偏离倾斜台阶上顶面边缘位置不超过倾斜面水平宽度的一半,这就是倾斜台阶重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律。

图 1 给出了在  $z=0$  剖面上倾斜面和底面夹角分别为  $30^\circ$ 、 $45^\circ$  和  $135^\circ$  的重力异常总水平导数剖面图和在上半空间重力异常总水平导数极大值位置断面图(附倾斜面和底面夹角为  $45^\circ$  时的重力异常总水平导数等值线图)。

(1)从剖面图来看,重力异常总水平导数极大值位置偏向台阶倾斜方向,且在反倾向一侧的梯度变化较大,表现出不对称性;台阶倾斜角越小,重力异常总水平导数极大值位置偏离台阶上顶面边缘位置的距离越大,且倾角为  $\alpha(45^\circ)$  的重力异常总水平导数极大值位置与倾角为  $(\pi-\alpha)(135^\circ)$  的极大值位置以坐标原点(倾斜台阶上顶面边缘点)为对称。

(2)从断面图来看,随着倾斜台阶埋深的逐渐增加,重力异常总水平导数极大值位置首先快速向倾

向一侧偏移,并很快收敛到一个稳定值——倾斜面水平宽度的一半。

### 3.3 直立双边界模型——直立平行四边形

直立平行四边形模型的两个边界均呈直立状,上、下顶面均呈水平状,该模型用来模拟双边陡倾角断层或接触面。在直角坐标系中( $z$ 坐标方向向下为正),直立平行四边形的左、右边界 $x$ 坐标分别为 $-\xi$ 和 $\xi$ ,顶面和底面 $z$ 坐标分别为 $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$ ,剩余密度为 $\sigma$ 。其引起的重力异常总水平导数 THDR 可以由铅垂台阶重力异常总水平导数表达式(21)导出为

$$\text{THDR}(x, 0) = |-G\sigma| \times \left| \ln \frac{(\xi-x)^2 + \zeta_2^2}{(\xi-x)^2 + \zeta_1^2} - \ln \frac{(\xi+x)^2 + \zeta_2^2}{(\xi+x)^2 + \zeta_1^2} \right|. \quad (26)$$

式中不难看出,  $\text{THDR}(-x, 0) = \text{THDR}(x, 0)$ , 即重力异常总水平导数是一个非负偶函数。对该式沿 $x$ 方向求导,并令其为0,得

$$3x^4 + [(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) - 2\xi^2]x^2 - (\xi^2 + \zeta_1^2)(\xi^2 + \zeta_2^2) = 0.$$

因该方程的判别式为

$$\Delta = [2\xi^2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]^2 + 12\zeta_1^2\zeta_2^2 > 0,$$

所以 $x^2$ 有两个不等的实根。又考虑到 $x^2$ 必须大于等于0,故最后求得的重力异常总水平导数极值位置解析表达式为

$$x_m = \pm \sqrt{\frac{1}{6} \{ \sqrt{[4\xi^2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)]^2 + 12\zeta_1^2\zeta_2^2} + 2\xi^2 - (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \}}. \quad (27)$$

可以看出该极大值位置不是平行四边形的边缘位置,其值随着平行四边形的埋深以及水平尺寸的大小而变化。也就是说,利用重力异常总水平导数的极大值位置也不能准确识别平行四边形的边缘位置,其识别结果必然有一定偏差。

当 $\xi^2$ 远大于 $\zeta_1, \zeta_2$ 时,  $x_m \rightarrow \pm \xi$ , 即当形体水平尺寸远大于埋深时重力异常总水平导数的极大值位置接近直立平行四边形的上顶边缘位置。

当 $\xi^2$ 远小于 $\zeta_1, \zeta_2$ 时,  $x_m \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\zeta_1\zeta_2}$ , 即当形体水平尺寸远小于埋深时重力异常总水平导数的极大值位置接近直立平行四边形平均埋深的 $1/\sqrt{3}$ 。

对于一般情况,  $|x_m| > \xi$ , 表明重力异常总水平导数极大值位置位于形体上顶边缘外侧,随着形体水平尺寸的增加,重力异常总水平导数极大值位置接近形体上顶边缘位置;随着形体埋深的增加,重力异常总水平导数极大值位置接近形体平均埋深的 $1/\sqrt{3}$ 。

图2给出了在 $z=0$ 剖面上重力异常总水平导数图和在 $z=0$ 上半空间重力异常总水平导数极值位置(红色为极大值位置,黄色为极小值位置,也就是零值位置)断面图。由图2可以看出:直立平行四边形重力异常总水平导数极大值位置位于形体上顶边缘外侧,且随埋深和水平尺寸发生变化。随着埋深的增加,直立平行四边形重力异常总水平导数极大值位置偏离上顶边缘位置的距离增大;随着水平尺寸的增大,重力异常总水平导数极大值位置偏离形体上顶边缘位置的距离变小。

### 3.4 倾斜双边界模型——梯形台阶

梯形台阶的两个边界均呈倾斜状,上、下顶面均呈水平状,该模型用来模拟双边缓倾角断层或接触面。该模型重力异常总水平导数可以由倾斜台阶模型重力异常总水平导数表达式(23)导出。但难以得到梯形台阶模型重力异常总水平导数极值位置的解析表达式,故用其断面图来研究总水平导数极值位置的空间变化规律。

图3为 $z=0$ 剖面上的重力异常总水平导数图和 $z=0$ 上半空间重力异常总水平导数极值位置图。根据该图可以看出:重力异常总水平导数剖面图不对称,在形体中心附近达到极小值0,在形体边缘附近达到极大值,并且在反倾向一侧梯度变化较大。当形体埋深较浅时,重力异常总水平导数极大值位置接近上顶边缘位置,且向倾向一侧偏移;随着形体埋深的增加,重力异常总水平导数极大值位置先向倾向一侧偏移,到达一定深度时,开始向形体外侧偏移;随着形体埋深的进一步增大,其重力异常总水平导数极大值位置的变化规律与直立平行四边形的变化规律基本一致,即以形体中心位置为对称向形体外侧偏移。

### 3.5 多边界模型——直立平行四边形组合模型

这里设计两个相同大小的直立平行四边形组合模型来代表多边界模型。两个直立平行四边形水平宽度均为600 m,垂向厚度也为600 m,相距200 m。根据(26)计算得到重力异常总水平导数在 $z=0$ 上的剖面图和 $z=0$ 上半空间的断面图见图4所示。由该图可以看出:在两个互相靠近的直立平行四边形之间,埋深较浅时,总水平导数极大值位置位于直立平行四边形的上顶边缘位置;随着埋深的增加,两个形体总水平导数极大值位置首先向形体内侧偏移,之后向形体外侧偏移,直到埋深达到400 m时,两个极大值位置重合、并消失。这就是总水平导数所能分辨的最大深度。另外,随着埋深的增加,各形体

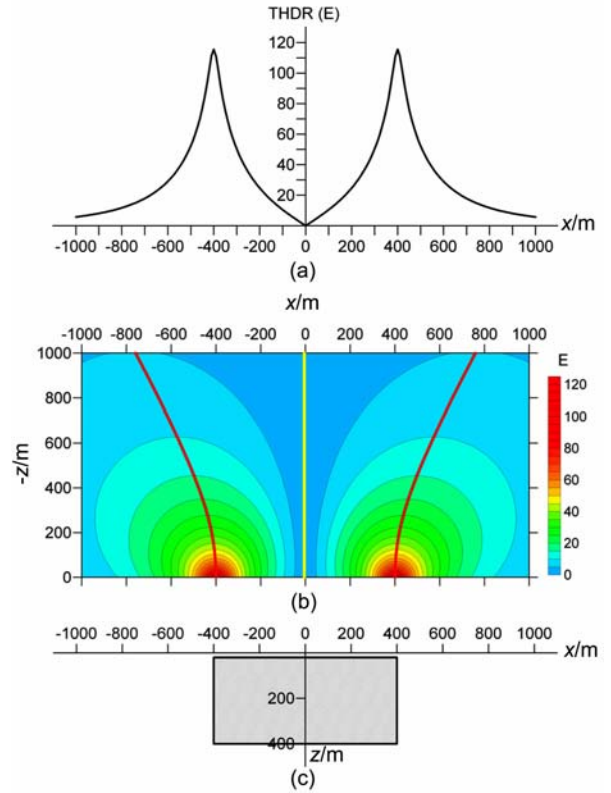
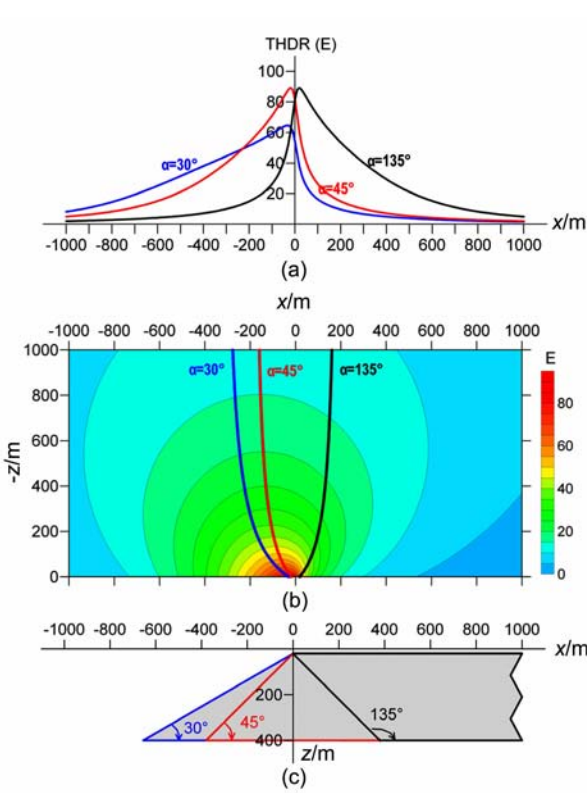


图 1 倾斜台阶模型及重力异常总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常总水平导数剖面图,(b)重力异常总水平导数极大值位置断面图,(c)倾斜台阶模型.

Fig.1 Inclined step models, profile map of THDR of gravity anomaly and the sectional drawing of the extreme value position from the THDR

(a) Profile map of the THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the THDR and (c) Inclined step models.

图 2 直立平行四边形模型及重力异常总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常总水平导数剖面图,(b)重力异常总水平导数极大值位置断面图,(c)直立平行四边形模型.

Fig.2 Vertical parallelogram model, profile map of THDR of gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the THDR

(a) Profile map of the THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the THDR and (c) Vertical parallelogram model.

外侧边缘的总水平导数极大值位置向形体外侧方向偏移,好像是一个直立平行四边形一样,其变化规律也和一个直立平行四边形总水平导数极大值位置变化规律一致.

### 3.6 点质量模型——球体

球体可以用来研究埋深较大或等轴三度体的重力异常总水平导数极值位置空间变化规律.在直角坐标系中( $z$ 坐标方向向下为正),假设球体的剩余密度为 $\sigma$ 、半径为 $R$ 、球体中心坐标为 $(0,0,\zeta)$ .则重力异常总水平导数 THDR 的表达式为

$$THDR(x,y,0) = |4\pi R^3 \sigma G \zeta| \cdot \sqrt{\frac{r^2}{[r^2 + \zeta^2]^5}}, \quad (28)$$

对(28)式沿水平方向(径向) $r(= \sqrt{x^2 + y^2})$ 求一阶导数并令其为0,得重力异常总水平导数极值位置坐标为

$$r_m = \frac{1}{2}\zeta = 0.5\zeta,$$

即球体重力异常总水平导数是关于 $z$ 轴对称的函数,而且极大值位置到球心的偏移量等于球心埋深的一半.

### 3.7 直立边界三度体模型——直立六面体

该模型用来模拟三度体陡倾角断层以及接触面,在直角坐标系中( $z$ 坐标方向向下为正),设直立六面体的坐标范围为 $\xi_1 \sim \xi_2, \eta_1 \sim \eta_2, \zeta_1 \sim \zeta_2$ ,剩余密度为 $\sigma$ .则重力异常总水平导数 THDR 的表达式为

$$THDR(x,y,0) = |G\sigma| \cdot \sqrt{(\ln[\rho + (\eta - y)] | \frac{\xi_2}{\xi_1} | \frac{\eta_2}{\eta_1} | \frac{\zeta_2}{\zeta_1} )^2 + (\ln[\rho + (\xi - x)] | \frac{\xi_2}{\xi_1} | \frac{\eta_2}{\eta_1} | \frac{\zeta_2}{\zeta_1} )^2}. \quad (29)$$



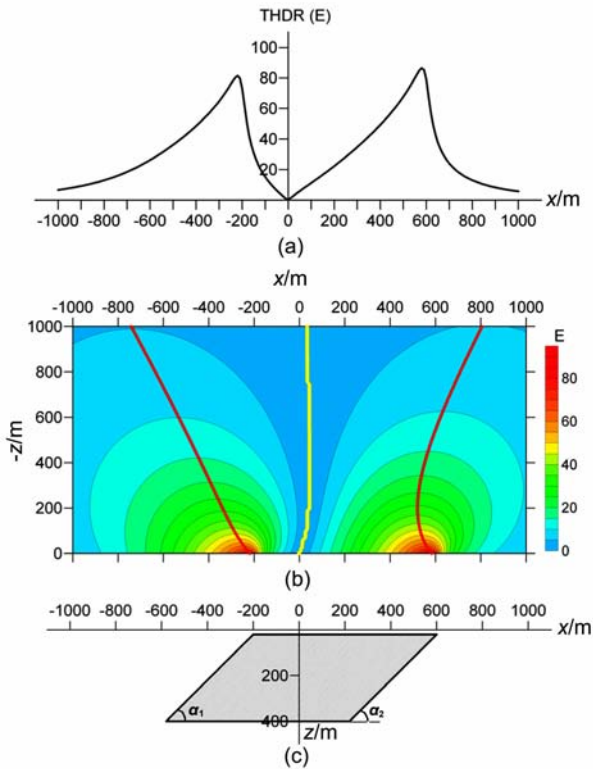


图3 梯形台阶模型及重力异常总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常总水平导数剖面图,(b)重力异常总水平导数极大值位置断面图,(c)梯形台阶模型.

Fig. 3 Trapezoidal step model, profile map of THDR of gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the THDR.

(a) Profile map of the THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the THDR and (c) Trapezoidal step model.

这里,  $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ .

直立六面体重力异常总水平导数极值位置难以得到简明的解析表达式,只能通过重力异常总水平导数平面图和中心剖面以上半空间断面图的极大值位置来研究其空间变化规律.图5为重力异常总水平导数平面等值线图 and  $z = 0$  上半空间  $y = 0$  的断面等值线图.

由该图可以看出:当直立六面体埋深较浅时,重力异常总水平导数极大值位置接近形体的上顶边缘位置;随着埋深的增加,重力异常总水平导数极大值位置向形体外侧偏离形体的上顶边缘位置.这些变化规律与二度体直立平行四边形重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律相似,只是偏移量的大小不同.根据球体重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律知,当埋深较大时,其极大值位置接

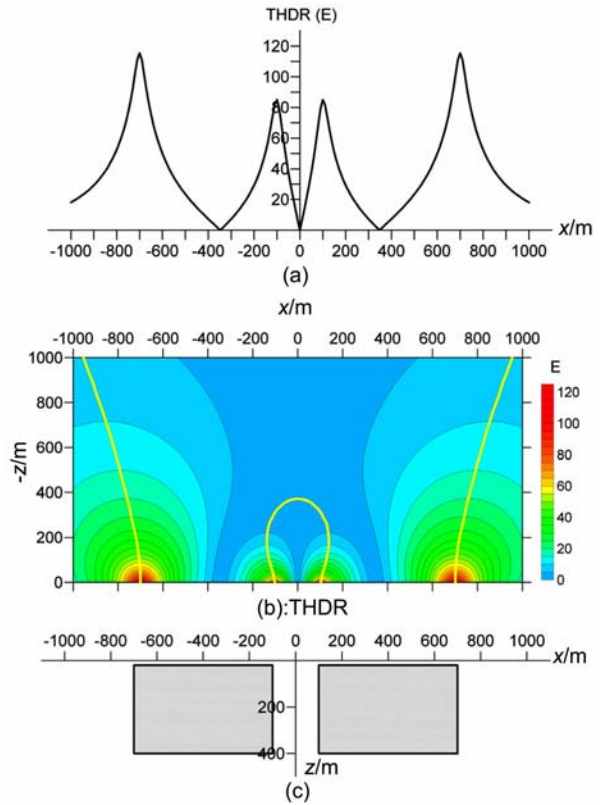


图4 直立平行四边形组合模型及重力异常总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常总水平导数剖面图,(b)重力异常总水平导数极大值位置断面图,(c)直立平行四边形组合模型

Fig. 4 Profile map of THDR of gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the THDR for Compound models.

(a) Profile map of the THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the THDR and (c) Compound model of the vertical parallelograms.

近形体埋深的一半.

### 4 重力异常垂向导数总水平导数极值位置空间变化规律

重力异常垂向导数总水平导数的极值位置与化极磁力异常总水平导数的极值位置相同,其研究方法 with 重力异常总水平导数极值位置的研究方法也相同,选择的模型也相同.

#### 4.1 直立单边界模型——铅垂台阶

铅垂台阶模型重力异常垂向导数总水平导数 (Total Horizontal Derivative of Vertical Derivative) VDR\_THDR 为

$$VDR\_THDR(x, 0) = \left| \frac{\partial VDR(x, z)}{\partial x} \right| = \left| G\sigma \frac{2(\zeta_2 - \zeta_1)[\zeta_2 \zeta_1 - x^2]}{[x^2 + \zeta_2^2][x^2 + \zeta_1^2]} \right|, \quad (30)$$



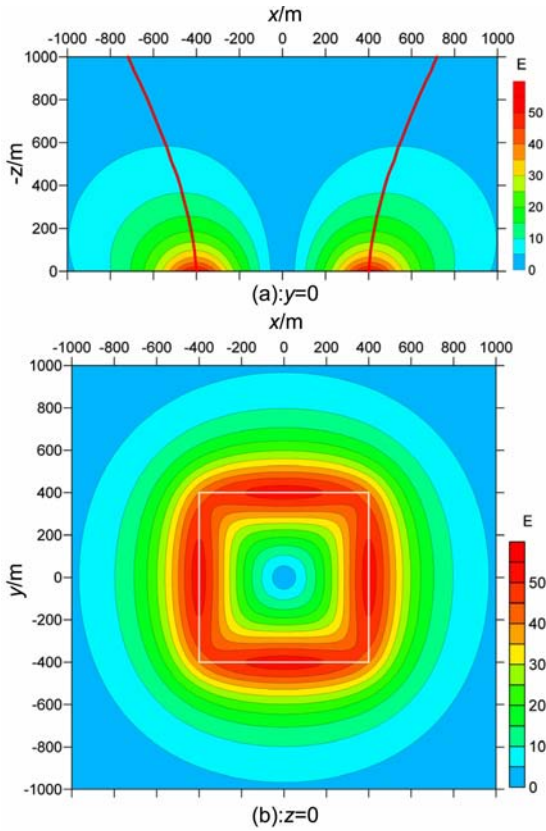


图5 直立六面体模型及重力异常总水平导数平面图和极大值位置断面图  
(a)重力异常总水平导数极大值位置断面图,  
(b)重力异常总水平导数平面图.

Fig. 5 Vertical hexahedron model, plane figure of THDR of gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the THDR.

(a) Sectional drawing of the extreme value position from the THDR, (b) Plane figure of the THDR of gravity

由(30)不难看出,  $VDR\_THDR(-x,0) = VDR\_THDR(x,0)$ , 即重力异常垂向导数总水平导数是一个非负偶函数. 对(30)沿  $x$  方向求导并令其为 0, 得

$$4x(\zeta_2 - \zeta_1) \frac{(x^2 - \zeta_1 \zeta_2)^2 - \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 + \zeta_2)^2}{[x^2 + \zeta_2^2]^2 \cdot [x^2 + \zeta_1^2]^2} = 0,$$

解得

$$\begin{cases} x_m = 0 \\ x_m = \pm \sqrt{(\zeta_1 + \zeta_2) \sqrt{\zeta_1 \zeta_2} - \zeta_1 \zeta_2} \end{cases} \quad (31)$$

可以看出, 铅垂台阶模型重力异常垂向导数总水平导数有三个极值点, 分别位于铅垂台阶边缘处以及两侧. 在铅垂台阶边缘处的极大值幅值较大, 称为“主极大值”; 而在两侧的极大值幅值较小, 称为“次极大值”, 与重力异常总水平导数峰值比较更加尖锐, 其横向分辨能力更强. 图 6 是铅垂台阶模型重力异常垂向导数总水平导数剖面图和  $z = 0$  上半空

间极大值位置断面图, 由该图看出, 重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置不随铅垂台阶埋深的变化而变化, 一直位于铅垂台阶边缘处, 但“次极大值”位置随铅垂台阶埋深变化而变化.

#### 4.2 线质量模型——无限延伸水平圆柱体

该模型用来研究埋深较大或线质量二度体重力异常垂向导数总水平导数极值位置的空间变化规律. 在直角坐标系中 ( $z$  坐标方向向下为正), 设无限延伸水平圆柱体的半径为  $R$ 、圆柱体中心坐标为  $(0, \zeta)$ , 剩余密度为  $\sigma$ . 则其重力异常垂向导数总水平导数  $VDR\_THDR$  为

$$\begin{aligned} VDR\_THDR(x,0) &= \left| \frac{\partial VDR(x,0)}{\partial x} \right| \\ &= \left| G\sigma \cdot \pi R^2 \cdot \frac{-4x[3\zeta^2 - x^2]}{[\zeta^2 + x^2]^3} \right|, \end{aligned} \quad (32)$$

由(32)可看出,

$VDR\_THDR(-x,0) = VDR\_THDR(x,0)$ , 即重力异常垂向导数总水平导数是一个非负偶函数, 对其沿  $x$  方向求导并令其为 0, 得

$$\pi R^2 \cdot 3 \left\{ \frac{8\zeta^2 x^2 - (\zeta^2 + x^2)^2}{(\zeta^2 + x^2)^4} \right\} = 0.$$

解得

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm (\sqrt{2} - 1)\zeta \approx \pm 0.414\zeta, \\ x_{3,4} &= \pm (\sqrt{2} + 1)\zeta \approx \pm 2.414\zeta. \end{aligned} \quad (33)$$

即无限延伸水平圆柱体重力异常垂向导数总水平导数是一个非负偶函数, 有四个对称的极值点, 分别位于无限延伸水平圆柱体中心两侧. 其中  $x_{1,2} = \pm (\sqrt{2} - 1)\zeta \approx \pm 0.414\zeta$  为“主极大值”位置,  $x_{3,4} = \pm (\sqrt{2} + 1)\zeta \approx \pm 2.414\zeta$  为“次极大值”位置.

#### 4.3 倾斜单边界模型——倾斜台阶

倾斜台阶模型重力异常垂向导数总水平导数  $VDR\_THDR$  为

$$VDR\_THDR(x,0) = \left| G\sigma \frac{\sin 2\alpha \cdot (x - \zeta_1 \cot \alpha) + 2\zeta \cos 2\alpha}{\zeta^2 + [x + (\zeta - \zeta_1) \cot \alpha]^2} \right|_{\zeta_1}^{\zeta_2}. \quad (34)$$

由于难以得到重力异常垂向导数总水平导数极值位置的解析表达式, 故只能通过剖面和断面特征研究其极值位置的空间变化规律. 图 7 给出了在  $z = 0$  剖面上倾斜面和底面夹角分别为  $30^\circ$ 、 $45^\circ$  和  $135^\circ$  的重力异常垂向导数总水平导数图和  $z = 0$  上半空间断面图 (附倾斜面和底面夹角为  $45^\circ$  时的重力异常垂向导数总水平导数等值线图). 从剖面图来看, 重力异常垂向导数总水平导数极大值位置偏向台阶倾斜方向, 且在反倾向一侧的梯度变化较

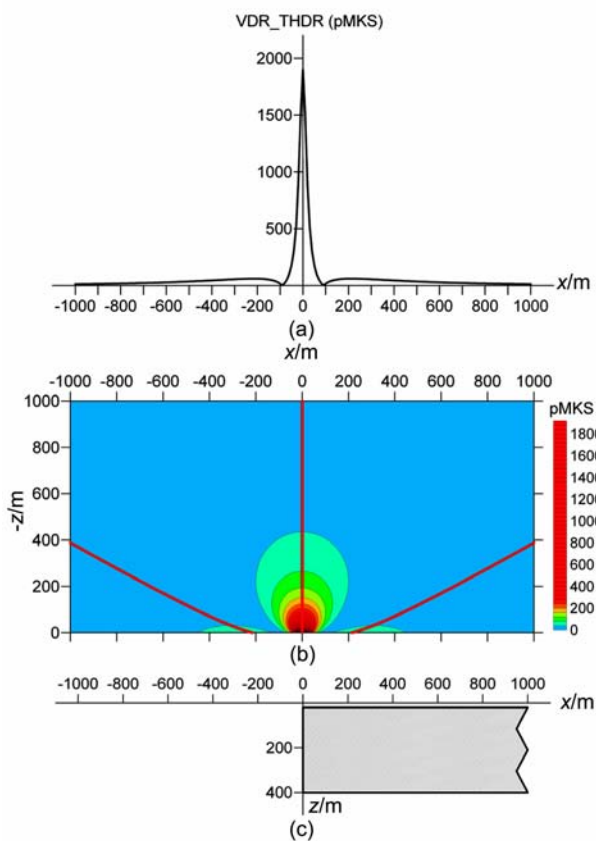


图6 铅垂台阶模型及重力异常垂向导数总水平导数剖面图和极值位置断面图

(a)重力异常垂向导数总水平导数剖面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数极值位置断面图,(c)铅垂台阶模型.

Fig. 6 Vertical step model, profile map of VDR\_THDR for gravity anomaly and the sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR  
(a) Profile map of the VDR\_THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR and (c) Vertical step model.

大,表现出不对称性;台阶倾斜角越小,重力异常垂向导数总水平导数极大值位置偏离台阶上顶面边缘位置的距离越大,且倾角为 $\alpha(45^\circ)$ 的和倾角为 $(\pi-\alpha)(135^\circ)$ 的重力异常垂向导数总水平导数极大值位置以坐标原点(倾斜台阶上顶面边缘点)为对称.从断面图来看,随着倾斜台阶埋深的逐渐增加,重力异常垂向导数总水平导数极大值位置首先快速向倾向一侧偏移,并很快收敛到一个稳定值,比倾斜台阶重力异常总水平导数极值位置的收敛速度快(即与倾斜台阶上顶面边缘位置的偏移量小).

#### 4.4 直立双边界模型——直立平行四边形

直立平行四边形模型重力异常垂向导数总水平导数 VDR\_THDR 为

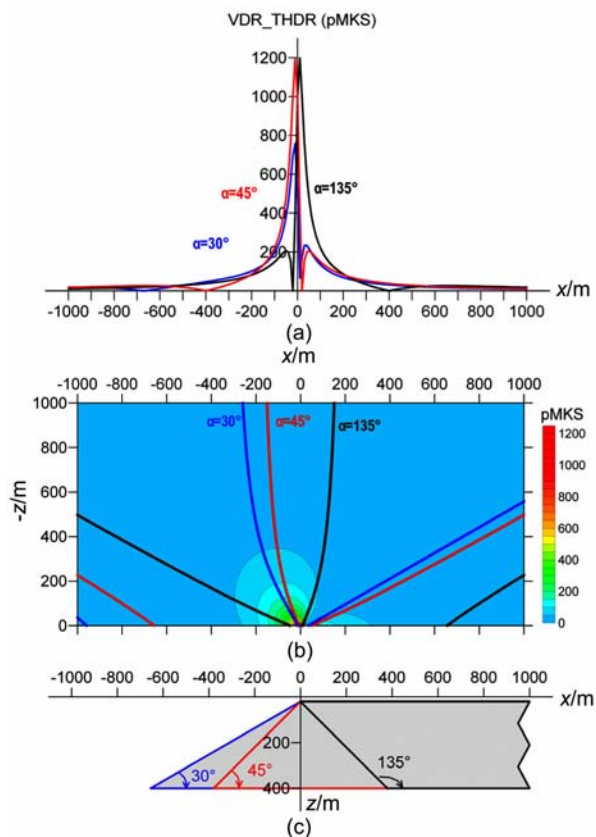


图7 倾斜台阶模型及重力异常垂向导数总水平导数剖面图和极值位置断面图

(a)重力异常垂向导数总水平导数剖面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数极值位置断面图,(c)倾斜台阶模型.

Fig. 7 Inclined step models, profile map of VDR\_THDR for gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR  
(a) Profile map of the VDR\_THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR and (c) Inclined step models.

$$VDR\_THDR(x, 0) = \left| G\sigma \left\{ \frac{2\zeta}{[(\xi-x)^2 + \zeta^2]} - \frac{2\zeta}{[(\xi+x)^2 + \zeta^2]} \right\} \right|_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (35)$$

式中可见,  $VDR\_THDR(-x, 0) = VDR\_THDR(x, 0)$ , 即重力异常垂向导数总水平导数是非负偶函数. 由于难以得到重力异常垂向导数总水平导数极值位置的解析表达式, 故只能通过剖面 and 断面特征研究其极值位置的空间变化规律. 图8为 $z=0$ 剖面上和 $z=0$ 以上半空间断面上重力异常垂向导数总水平导数图. 从剖面图来看, 重力异常垂向导数总水平导数(图8)的峰值比重力异常总水平导数(图2)的峰值尖锐, 但存在“次极大值”. 从断面图来看, 重力异常

垂向导数总水平导数极大值位置与重力异常总水平导数极大值位置的变化规律相似,但比重力异常总水平导数的极大值位置更靠近形体上顶边缘位置.当埋深不大时,“主极大值”的位置基本保持不变,靠近地质体上顶边缘位置;当埋深逐渐增大时,“主极大值”位置逐渐自形体上顶边缘向形体外侧偏移,最后收敛到埋深的 0.414 倍,与无限延伸水平圆柱体重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置的空间变化规律一致.

#### 4.5 倾斜双边界模型——梯形台阶

梯形台阶模型重力异常垂向导数总水平导数可以由倾斜台阶重力异常垂向导数总水平导数表达式导出.但由于难以得到梯形台阶重力异常垂向导数总水平导数极值位置的解析表达式,故用断面图来研究其极值位置的空间变化规律.

图 9 为  $z = 0$  剖面上的重力异常垂向导数总水

平导数图和  $z = 0$  上半空间重力异常垂向导数总水平导数极值位置图.从剖面特征图来看,重力异常垂向导数总水平导数的峰值比总水平导数的峰值尖锐,但存在“次极大值”.从断面图来看,重力异常垂向导数总水平导数与重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律相似,但比重力异常总水平导数极大值位置更靠近形体上顶边缘位置.当形体埋深较浅时,重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置向倾向一侧偏移;到达一定深度时开始向整个形体上顶边缘外侧偏移,最后收敛到形体埋深的 0.414 倍,与无限延伸水平圆柱体垂向导数总水平导数的极大值位置变化规律一致.

#### 4.6 多边界模型——直立平行四边形组合模型

这里设计的边界模型与图 4 相同.根据(35)计算得到重力异常垂向导数总水平导数在  $z = 0$  上的剖面图和在  $z = 0$  上半空间的断面图见图 10 所

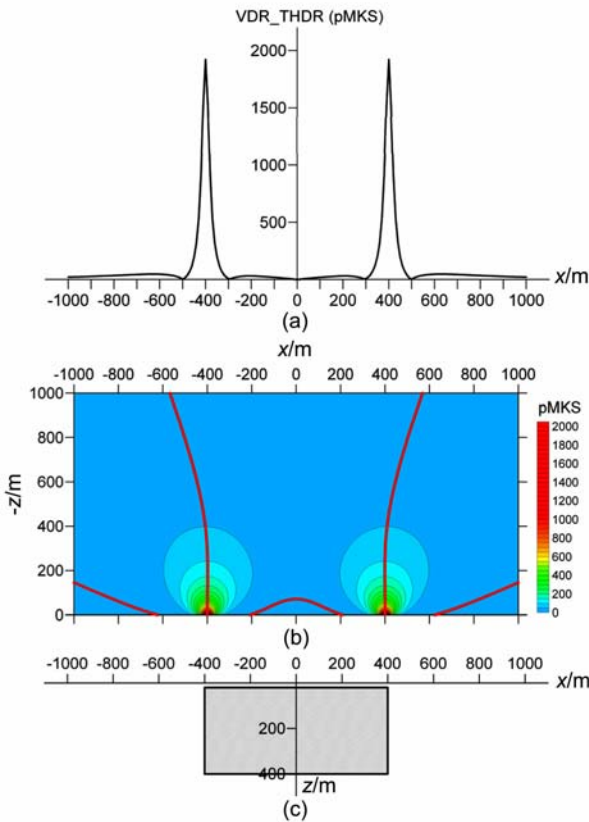


图 8 直立平行四边形模型及重力异常垂向导数总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常垂向导数总水平导数剖面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数极大值位置断面图,(c)直立平行四边形模型.

Fig. 8 Vertical parallelogram model, profile map of VDR\_THDR for gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR (a) Profile map of the VDR\_THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR and (c) Vertical parallelogram model.

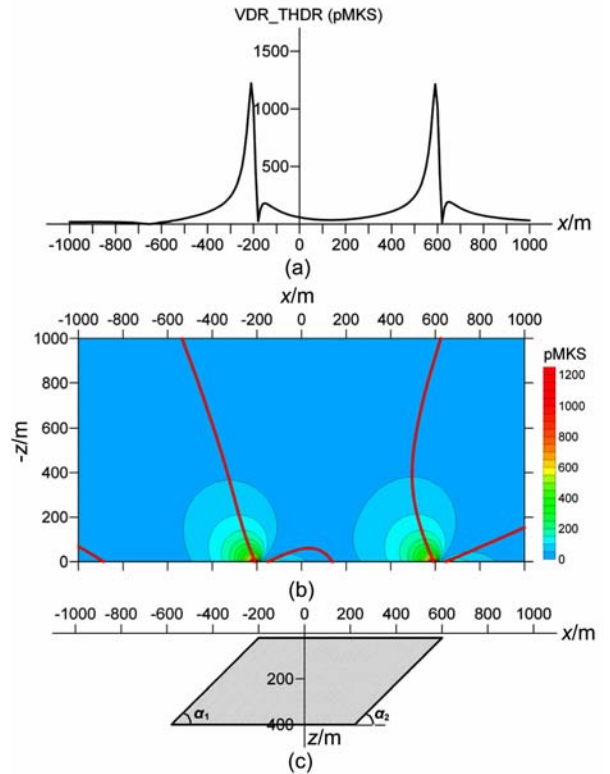


图 9 梯形台阶模型及重力异常垂向导数总水平导数剖面图和极大值位置断面图

(a)重力异常垂向导数总水平导数剖面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数极大值位置断面图,(c)梯形台阶模型.

Fig. 9 Trapezoidal step model, profile map of VDR\_THDR for gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR (a) Profile map of the VDR\_THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR and (c) Trapezoidal step model.

示. 由该图可以看出: 在两个互相靠近的直立平行四边形之间, 埋深较浅时, 垂向导数总水平导数极大值位置位于直立平行四边形的上顶边缘位置; 随着埋深的增加, 垂向导数总水平导数极大值位置首先向形体内侧偏移, 之后向形体外侧偏移, 直到埋深达到 660m 时, 两个极大值位置重合、并消失, 这就是垂向导数总水平导数所能分辨的最大深度. 另外, 随着埋深的增加, 各形体外侧边缘的垂向导数总水平导

数极大值位置向形体外侧方向偏移, 与单一直立平行四边形垂向导数总水平导数极大值位置变化规律一致. 对比图 10 和图 4 可以看出, 重力异常垂向导数总水平导数比总水平导数极大值位置更靠近形体的边缘位置, 且其分辨能力更强.

#### 4.7 点质量模型——球体

球体重力异常垂向导数总水平导数  $VDR\_THDR$  的表达式为

$$\begin{aligned} VDR\_THDR(x, y, 0) &= \left| \frac{4\pi R^3 G\sigma}{3} \right| \cdot \sqrt{\left[ \frac{-3x[5\zeta^2 - \rho^2]}{\rho^7} \right]^2 + \left[ \frac{-3y[5\zeta^2 - \rho^2]}{\rho^7} \right]^2} \\ &= |G\sigma| \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \sqrt{\left( \frac{3r[4\zeta^2 - r^2]}{\rho^7} \right)^2}, \end{aligned} \quad (36)$$

这里  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (\zeta - z)^2}$ . 令上式对  $r$  的导数为 0, 可得重力异常垂向导数总水平导数极大值位置满足的条件为

$$r(4\zeta^2 - r^2)[(4\zeta^2 - 3r^2)(\zeta^2 + r^2) - 7r^2(4\zeta^2 - r^2)] = 0.$$

由此解得

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = 2\zeta, \\ r_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{27 \pm \sqrt{665}} \zeta = \sqrt{3.375 \pm 3.22345} \zeta = \begin{cases} 0.389\zeta, \\ 2.5687\zeta, \end{cases} \end{cases} \quad (37)$$

此式中,  $r_1 = 0$  和  $r_2 = 2\zeta$  为极小值位置,  $r_3 = 0.389\zeta$  为“主极大值”位置,  $r_4 = 2.5687\zeta$  为“次极大值”位置. 与重力异常总水平导数极大值位置 ( $0.5\zeta$ ) 比较, 球体重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置更靠近球体的中心位置.

#### 4.8 直立边界三度体模型——直立六面体

直立六面体重力异常垂向导数总水平导数  $VDR\_THDR$  的表达式为

$$VDR\_THDR(x, y, 0) = |G\sigma| \sqrt{\left[ \frac{(\zeta - z)}{\rho[\rho + (\eta - y)]} \left| \begin{smallmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \eta_2 \\ \eta_1 \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{smallmatrix} \right]^2 + \left[ \frac{(\zeta - z)}{\rho[\rho + (\xi - x)]} \left| \begin{smallmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \eta_2 \\ \eta_1 \end{smallmatrix} \right| \begin{smallmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \end{smallmatrix} \right]^2}, \quad (38)$$

其中,  $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ .

由于直立六面体重力异常垂向导数总水平导数极大值位置的解析式难以得到, 故通过平面图和断面图来研究其空间变化规律. 图 11 为重力异常垂向导数总水平导数平面等值线图 and  $z = 0$  以上半空间  $y = 0$  的断面等值线图. 从其平面变化特征来看, 重力异常垂向导数总水平导数 (图 11) 极大值位置比重力异常总水平导数 (图 5) 极大值位置更靠近形体的上顶边缘位置, 并且其峰值更加尖锐. 从其断面图来看, 随着埋深的增大, 重力异常垂向导数总水平导数极大值位置自形体外侧偏离形体的上顶边缘位置, 最后逐渐收敛到中心埋深的 0.389 倍, 与球体重力异常垂向导数总水平导数的极大值位置空间变化规律相同.

## 5 结论与建议

通过对位场总水平导数的函数性质以及对重力异常总水平导数和重力异常垂向导数总水平导数极大值位置的空间变化规律研究, 得出以下结论与建议:

(1) 位场总水平导数不是位函数, 不能用位场总水平导数来构造新的边缘识别方法, 否则会在位场总水平导数为 0 的点上出现“奇点”.

(2) 磁力异常总水平导数受磁场分量方向和磁化方向的影响, 故在利用磁力异常进行边缘识别时必须将其转换成磁源重力异常 (假重力异常) 或化极



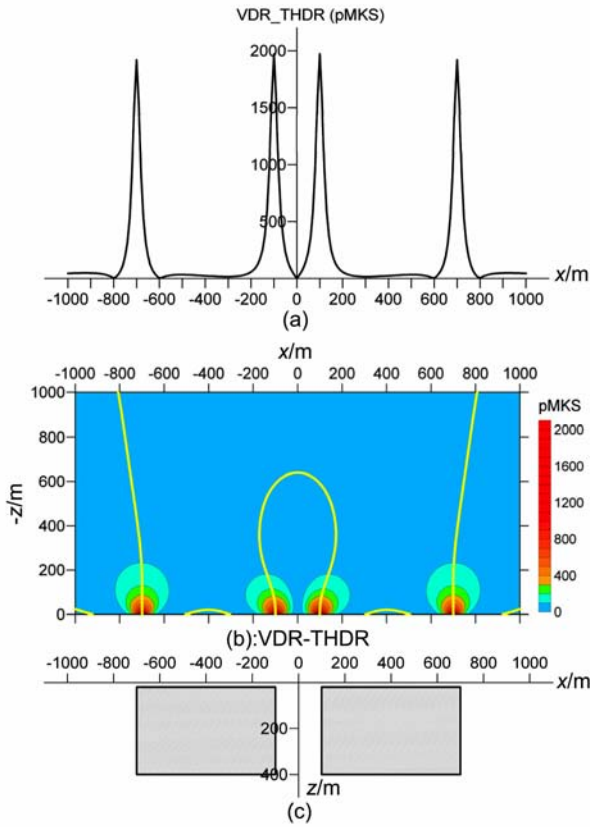


图 10 直立平行四边形组合模型及重力异常垂向导数总水平导数剖面图和极大值位置断面图  
 (a)重力异常垂向导数总水平导数剖面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数极大值位置断面图,(c)直立平行四边形组合模型。  
 Fig. 10 Profile map of VDR\_THDR of gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR for Compound models  
 (a) Profile map of the VDR\_THDR of gravity anomaly, (b) Sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR and (c) Compound model of the vertical parallelograms.

磁力异常才可以使用。

(3)在单一直立边界上,利用重力异常总水平导数极大值位置能够准确识别直立边界位置,而在其他任何模型上利用重力异常总水平导数极大值位置均不能准确识别其边缘位置,其偏移量随埋深、水平尺寸、倾斜角等因素发生变化。在单一倾斜边界上,重力异常总水平导数极大值位置偏向倾向一侧,并且随埋深的增大而增加,但偏移量不超过倾斜面水平宽度的一半;在双边界上,重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律与单一边界的空间变化规律差别很大,随埋深的增大,重力异常总水平导数极大值位置自形体上顶边缘位置向倾向一侧偏移,之后向形体外侧偏移,最终收敛于平均埋深的  $1/\sqrt{3}$  ( $\approx 0.577$ ) 倍;在多边界上,重力异常总水平导数极

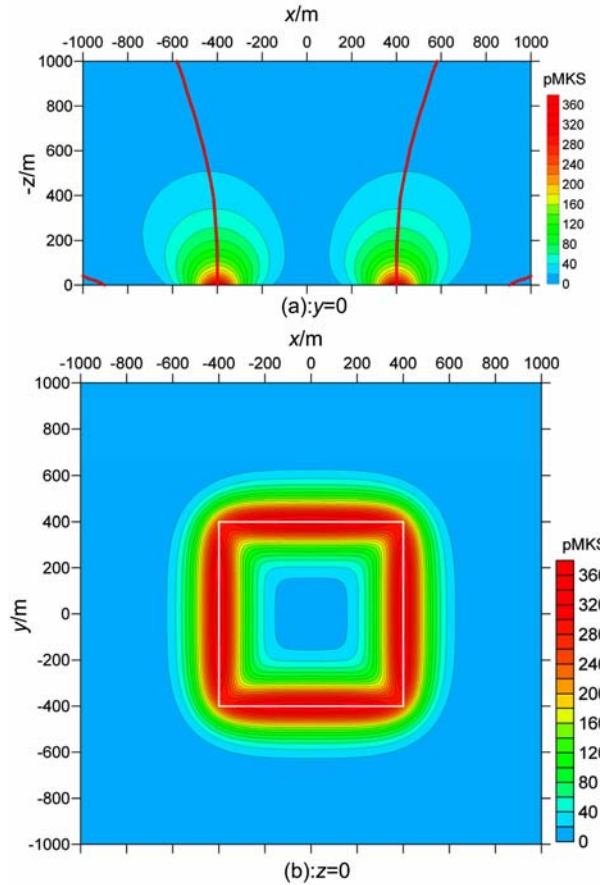


图 11 直立六面体模型及重力异常垂向导数总水平导数平面图和极大值位置断面图  
 (a)重力异常垂向导数总水平导数极大值位置断面图,(b)重力异常垂向导数总水平导数平面图。  
 Fig. 11 Vertical hexahedron model, plane map of VDR\_THDR for gravity anomaly and sectional drawing of the extreme value position from the VDR\_THDR  
 (a) Sectional drawing of the extreme value position of the VDR\_THDR, (b) Plane figure of the VDR\_THDR of gravity anomaly

大值位置的空间变化规律与双边界的空间变化规律基本一致,但部分极大值位置会重合并消失。三度体中心剖面上重力异常总水平导数极大值位置的空间变化规律与二度体的基本相似,随着埋深的增大其极大值收敛于平均埋深的一半,比二度体的偏移量小。

(4)在单一直立边界上,利用重力异常垂向导数总水平导数极大值位置能够准确识别直立边界的位置,而在其他任何模型上的重力异常垂向导数总水平导数极大值位置与其边缘位置均有偏移,其偏移量大小随形体埋深、水平尺寸、倾斜角等因素发生变化,且小于重力异常总水平导数极大值位置的偏移量。重力异常垂向导数总水平导数比重力异常总水平导数的峰值更加尖锐、横向分辨能力更强,且出现

了“次极大值”的影响. 对于二度体, 重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置收敛于平均埋深的 0.414 倍; 对于三度体, 重力异常垂向导数总水平导数“主极大值”位置收敛于平均埋深的 0.389 倍.

(5) 通过掌握重力异常总水平导数和重力异常垂向导数总水平导数极值位置的空间变化规律可以进一步提高位场总水平导数边缘识别结果的精度, 并有可能通过不同高度极值位置的变化规律来研究边缘深度的参数反演.

致 谢 感谢潘作枢教授、朱光明教授以及审稿专家对本文提出的修改意见.

### 参考文献(References)

- [1] 王万银, 邱之云, 杨永, 史维皎. 位场边缘识别方法研究进展. 地球物理学进展, 2009, **25**(1):196~210  
Wang W Y, Qiu Z Y, Yang Y, Shi W J. Some advances in the edge recognition of the potential field. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 2009, **25**(1):196~210
- [2] Hood P, McClure D J. Gradient measurements in ground magnetic prospecting. *Geophysics*, 1965, **30**(3):403~410
- [3] Bhattacharyya B K. Two-dimensional harmonic analysis as a tool for magnetic interpretation. *Geophysics*, 1965, **30**(5):829~857
- [4] Hood P J, Teskey D J. Aeromagnetic gradiometer program of the Geological Survey of Canada. *Geophysics*, 1989, **54**(8):1012~1022
- [5] 钟 清, 孟小红, 刘士毅. 重力资料定位地质体边界问题的探讨. 物探化探计算技术, 2007, **29**(增刊):35~38  
Zhong Q, Meng X H, Liu S Y. Study on the Geological body's edge detection of using gravity data. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 2007, **29**(Suppl):35~38
- [6] Cordell L. Gravimetric expression of graven faulting in Santa Fe Country and the Espanola Basin, New Mexico: New Mexico Geol. Soc. Guidebook, 30th Field Conf., 1979. 59~64
- [7] Cordell L, Grauch V J S. Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the San Juan Basin, New Mexico, in Hinze, W. J., Ed., The utility of regional gravity and magnetic anomaly maps: Soc. Explor. *Geophys.*, 1985. 181~197
- [8] Grauch V J S, Cordell L. Limitations of determining density or magnetic boundaries from the horizontal gradient of gravity or pseudo-gravity data. *Geophysics*, 1987, **52**(1):118~121
- [9] 余钦范, 楼 海. 水平梯度法提取重磁源边界位置. 物探化探计算技术, 1994, **16**(4):363~367  
Yu Q F, Lou H. Locating the boundaries of magnetic or gravity sources using horizontal gradient anomalies. *Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration* (in Chinese), 1994, **16**(4):363~367
- [10] Nabighian M N. The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: its properties and use for automated anomaly interpretation. *Geophysics*, 1972, **37**(3):507~517
- [11] Nabighian M N. Toward a three dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms: Fundamental relations. *Geophysics*, 1984, **49**(6):780~786
- [12] Nelson J. B. Comparison of gradient analysis techniques for linear two-dimensional magnetic sources. *Geophysics*, 1988, **53**(8):1088~1095
- [13] Roest W R, Verhoef J, Pilkington M. Magnetic interpretation using the 3-D analytic signal. *Geophysics*, 1992, **57**(1):116~125
- [14] Qin S. An analytic signal approach to the interpretation of total field magnetic anomalies. *Geophysical Prospecting*, 1994, **42**(6):665~675
- [15] Miller H G, Singh V. Potential field tilt—a new concept for location of potential field sources. *Journal of Applied Geophysics*, 1994, **32**:213~217
- [16] Wijns C, Perez C, Kowalczyk P. Theta map: Edge detection in magnetic data. *Geophysics*, 2005, **70**(4):L39~L43

(本文编辑 刘少华)