

DOI:10.3969/j.issn.1000-1298.2010.10.041

3-PRR 柔性并联机构动力学分析*

贾晓辉 田延岭 张大卫

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

【摘要】 提出一种可应用于微/纳操作领域的 3-PRR 柔性并联机构, 基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 采用假设模态法, 分析支链上从动杆的柔性, 结合实例说明了将从动杆视为刚性杆处理的依据。为进一步分析各构件惯量参数和柔性构件刚度对系统固有频率的影响, 采用拉格朗日方程建立了修正的机构动力学振动微分方程, 并结合实例进行分析, 利用仿真计算验证了所建模型的有效性。

关键词: 柔性并联机构 自由振动 动力学分析 拉格朗日方程

中图分类号: TH113 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)10-0199-05

Dynamics Analysis of 3-PRR Compliant Parallel Mechanism

Jia Xiaohui Tian Yanling Zhang Dawei

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract

A 3-PRR compliant parallel mechanism utilizing flexure joints was proposed for 3-D nanomanipulation. Based on the assumed mode method, the passive link was modeled as Euler-Bernoulli beams with pinned-pinned boundary conditions to show the reason of the rigid equivalent. In order to analyze the effects of the inertia parameters of mobile platform and passive link, and the stiffness of flexure parts on the natural frequency of 3-PRR compliant parallel mechanism, the modified dynamics model of the 3-PRR flexure-based parallel mechanism was obtained by the Lagrange's formulation. The numerical simulations were carried out to validate the established model.

Key words Compliant parallel mechanism, Free vibration, Dynamics analysis, Lagrange's formulation

引言

压电陶瓷驱动的柔性并联机构克服了传统并联机构固有的缺点, 如反向间隙、迟滞、铰链加工误差等, 具有承载能力高、无反向间隙、无非线性摩擦、分辨率高、运动灵活、动态特性良好等特点, 因此被广泛应用于超精密加工和微/纳米操作等研究领域^[1-2]。

目前, 柔性并联机构的理论和实验研究还很不成熟^[3], 关于机构惯性参数及柔性环节刚度对动力学特性影响的研究更为少见。另外, 在利用伪刚体

模型理论对柔性体进行分析时, 常常直接将部分中间连杆视为刚性体处理, 而相应的等效依据却少有研究。拉格朗日方程法从系统的动势能角度建立机构动力学方程, 不需要复杂的运动学加速度、角加速度分析, 推导过程简便, 且能得到形式简洁的动力学方程, 便于进一步动力学分析及研究。

本文基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 采用假设模态法, 分析各支链上连杆的柔性, 并基于拉格朗日方程建立修正后的机构振动微分方程。通过仿真算例, 说明动平台和从动杆的惯量参数(质量、转动惯量)及柔性构件刚度在此柔性并联机构中的作用。

收稿日期: 2009-09-15 修回日期: 2009-10-12

* 国家自然科学基金资助项目(50705064)和天津市自然科学基金资助项目(08JCYBJC01400)

作者简介: 贾晓辉, 博士生, 主要从事微纳米操作机器人技术及机械动力学研究, E-mail: jia_dragon@163.com

通讯作者: 田延岭, 副教授, 主要从事微纳米技术、精密测试系统研究, E-mail: meytian@tju.edu.cn

1 3-PRR 柔性并联机构

如图1所示,3-PRR 柔性并联机构包括动平台、基座和3个沿圆周均匀分布的运动支链。每个支链上的移动铰链与基座固连且由压电陶瓷驱动器驱动,驱动点设计为左右对称的平行板簧形式,以保证驱动器伸长(压缩)过程中的定位。在多种截面形式的柔性铰链中,圆形凹槽柔性铰链的变形精度最高^[4],因此各支链从动杆两端的柔性铰链均采用此种形式。

为了保证工作过程中的运动精度,该柔性机构采用线切割技术整体加工工艺,不需要装配、调整等手段,从而可以有效提高加工制造精度和定位精度。另外整体加工方式以及对称的结构形式,可以有效消除工作过程中热变形的影响。

在基座中心 O 建立基坐标系 Oxy , x 轴平行于动平台边 C_1C_3 的初始位置。动坐标系 $O'x'y'$ 位于动平台中心 O' , 机构的基座和动平台半径分别为 r_a 、 r_b , 主动臂 A_iB_i 长度为 q_i , 从动杆 B_iC_i 长度为 l , e_i 为主动臂单位方向矢量, w_i 为从动臂单位方向矢量, 位置角为 θ_i 。点 A_i 在基坐标系 Oxy 中的位置角为 α_i , 且有 $\alpha_i = \alpha_1 + 2(i-1)\pi/3$ 。点 C_i 在动坐标系 $O'x'y'$ 中的位置角为 β_i , 且有 $\beta_i = \beta_1 + 2(i-1)\pi/3$, 动平台在 xOy 面内的转角为 γ , 其中 $i=1, 2, 3$ 。

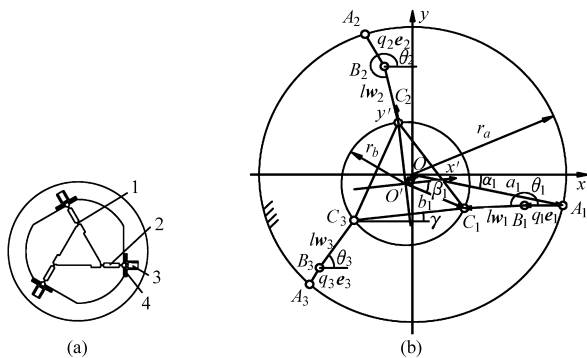


图1 3-PRR 柔性并联机构及其坐标系示意图

Fig.1 Architecture and coordinate system of 3-PRR compliant parallel mechanism

1. 单自由度柔性铰链 2. 从动杆 3. 压电陶瓷驱动器 4. 板簧

2 从动杆柔性分析

基于 Euler-Bernoulli 梁假设,采用假设模态法,第 i 个从动杆中线上任意一点的柔性变形可表示为^[5]

$$W_i(s, t) = \sum_{j=1}^r \eta_{ij}(t) \Phi_{ij}(s) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

式中 $\Phi_{ij}(s)$ —— 振型函数

$\eta_{ij}(t)$ —— 模态坐标

由于动平台具有沿 x 、 y 方向的 2 个平动自由度以及 1 个在 xOy 面内的转动自由度,因此其具有的动能表示为

$$K_p = \frac{1}{2} m_p v_x^2 + \frac{1}{2} m_p v_y^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (2)$$

其中 $I_p = m_p r_b^2 / 4$

式中 m_p —— 动平台质量

v_x 、 v_y —— 动平台沿 x 、 y 方向的平动速度

ω —— 动平台在 xOy 面内的角速度

I_p —— 动平台转动惯量

从动杆动能为

$$K_l = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \int_0^l \rho_i [\dot{q}_i^2 + (s \dot{\theta}_i + \dot{W}_i)^2 + 2 \dot{q}_i (s \dot{\theta}_i + \dot{W}_i) \sin(\alpha_i - \theta_i)] ds \quad (3)$$

式中 ρ_i —— 第 i 个从动杆的线密度

机械系统中的势能主要包括:重力势能、机构中柔性环节发生柔性变形而产生的应变能。3-PRR 柔性并联机构中,动平台及其他各部分构件均未发生沿垂直 xOy 面方向的位置变化,因此在此系统中,势能主要是指各柔性环节中储存的应变能。

在构建机构伪刚体模型时将柔性铰链等效为理想化的线性扭簧,驱动处的平行板簧等效为线性弹簧,因此可将 B_i 和 C_i 处柔性铰链势能以及驱动处柔性环节势能表示为

$$V_k = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k (\theta_i - \theta_i^0)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k (\Delta\gamma + \Delta\theta_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} k_1 \Delta q_i^2 \quad (4)$$

式中 k —— 从动杆上柔性铰链转动刚度

k_1 —— 驱动处柔性环节等效刚度

θ_i^0 —— 位置角初始值

$\Delta\gamma$ —— 动平台 xOy 面内转角变化量

柔性杆变形势能为

$$V_l = \sum_{i=1}^r \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 W_i(s)}{\partial s^2} \right)^2 ds \quad (5)$$

式中 E —— 从动杆弹性模量

I —— 从动杆惯性矩

将式(1)~(5)代入拉格朗日方程,得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(K-V)}{\partial \dot{\eta}_{ij}} \right) - \frac{\partial(K-V)}{\partial \eta_{ij}} = Q_i \quad (6)$$

式中 Q_i —— 广义非保守力

采用线切割整体加工工艺,机构中各部分保持为一个整体,因此工作过程中,各构件之间摩擦力作用可忽略不计,即认为机构不存在阻尼,阻尼比为零^[6]。因此将式(6)化简后可得

$$m_g \int_0^1 \Phi_{ij}^2(\xi) d\xi \ddot{\eta}_{ij}(t) + \frac{EI}{l^3} \int_0^1 (\Phi_{ij}'(\xi))^2 d\xi \eta_{ij}(t) = -m_g \sin(\alpha_i - \theta_i) \ddot{q}_i \int_0^1 \Phi_{ij}(\xi) d\xi - m_g l \ddot{\theta}_i \int_0^1 \xi \Phi_{ij}(\xi) d\xi + m_g \cos(\alpha_i - \theta_i) \dot{\theta}_i \dot{q}_i \int_0^1 \Phi_{ij}(\xi) d\xi \quad (i=1,2,3; j=1,2,\dots,r) \quad (7)$$

式中 m_g ——从动杆质量
将式(7)表示为矩阵形式

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\eta} = \mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_\theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{F}_{fg} \quad (8)$$

为便于考察从动杆柔性,令动平台的运动规律为

$$\begin{cases} x = 50\cos(10\pi t) - 50 \\ y = 50\sin(10\pi t) \\ z = -300 \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),利用 Matlab 中的 ODEs 求

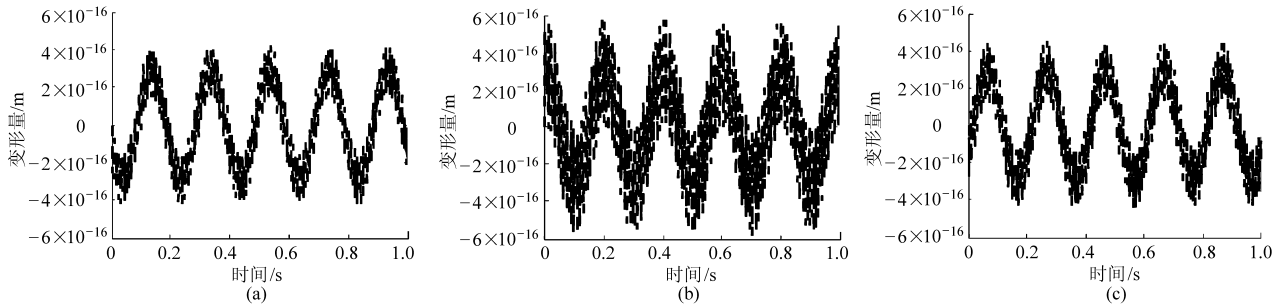


图 2 从动杆中点处的变形量曲线

Fig. 2 Deformation at the midpoint of passive links

(a) 支链 1 (b) 支链 2 (c) 支链 3

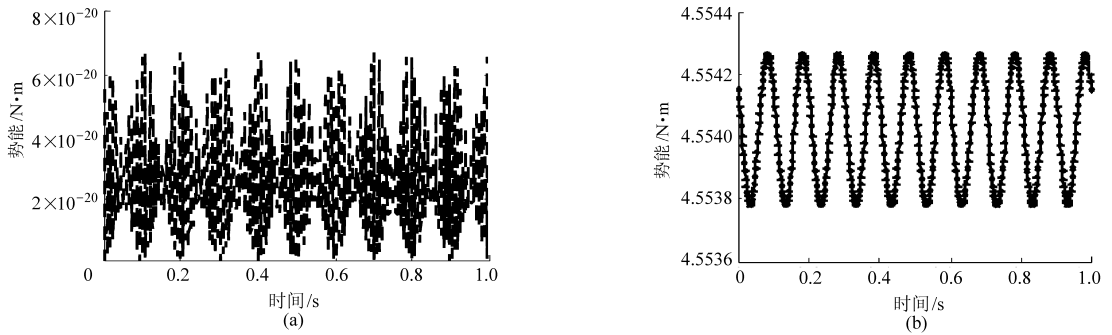


图 3 从动杆及柔性铰链内的势能曲线

Fig. 3 Potential energy of passive link and flexure hinge

(a) 从动杆 (b) 柔性铰链

3 机构的简化动力学分析

根据以上结论,在此类型的 3-PRR 柔性并联机构的动力学分析中,连杆的柔性可以忽略不计,相对于柔性铰链来说,连杆可以视为刚形体。

因此,将连杆动能修正为

$$K_l = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} m_g \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2} I_g \dot{\theta}_i^2 \right) \quad (10)$$

解工具求解 $\eta_{ij}(t)$,然后再将其重新代入式(5),可得到在机构工作过程中各连杆中点处的弹性变形量及其所储存的势能,如图 2、3 所示。其中所用参数分别为:从动杆长度 $l = 20 \text{ mm}$,动平台半径 $r_b = 30 \text{ mm}$,基座半径 $r_a = 57.96 \text{ mm}$,动平台质量 $m_p = 60 \text{ g}$,从动杆质量 $m_g = 4 \text{ g}$,柔性铰链刚度 $k = 34.53 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$,驱动刚度 $k_1 = 2.02 \times 10^6 \text{ N}/\text{m}$, $\theta_1^0 = \pi$, $\beta_1 = -\pi/6$, $\alpha_1 = -\pi/12$ 。材料为铝合金 T7075,其密度为 $\rho = 2.85 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$,弹性模量为 $2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。

由两图可知:在机构运动过程中,3 个柔性连杆中点处的变形量均在 $\pm 6 \times 10^{-16} \text{ m}$ 之间,其中第 2 个连杆的变形量由于其运动规律而稍大些,但三者的变形量相比较于杆长及机构整体变形来说是可以忽略的;连杆内储存的应变能为 $0 \sim 7 \times 10^{-20} \text{ N}\cdot\text{m}$,而柔性铰链内储存的应变能为 $4.55378 \sim 4.55427 \text{ N}\cdot\text{m}$,两者的差距是很明显的。

其中 $I_g = m_g l^2 / 3$

式中 I_g ——从动杆转动惯量

同时,将从动杆势能忽略,设 $\mathbf{s} = (x, y, \gamma)^T$ 为系统广义坐标,重新推导式(6)可得修正的机构动力学方程为

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } \quad \mathbf{M} &= \mathbf{M}_p + m_g (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) + I_g (\mathbf{J}_\theta^T \mathbf{J}_\theta) \\
 \mathbf{M}_p &= \text{diag}(m_p, m_p, I_p) \\
 \mathbf{K} &= k (\mathbf{J}_\theta^T \mathbf{J}_\theta) + k_1 (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) + k (\mathbf{J}_c^T \mathbf{J}_c) \\
 \mathbf{J}_c &= \mathbf{J}_\theta + \mathbf{N}_2 \\
 \mathbf{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

式中 \mathbf{M} ——系统质量矩阵

\mathbf{K} ——系统刚度矩阵

\mathbf{J}_θ ——位置角 θ_i 的雅克比矩阵

\mathbf{J}_c ——输入量 q_i 的雅克比矩阵

由式(11)可得,3-PRR 柔性并联机构无阻尼弹性振动固有频率 p 满足

$$|\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (12)$$

显然,3-PRR 柔性并联机构的无阻尼弹性振

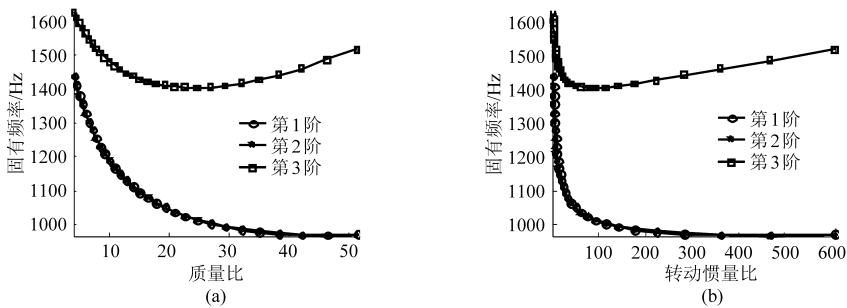


图4 惯量参数与系统固有频率的关系曲线

Fig. 4 Relationship between inertia parameters and natural frequency

(a) 质量比与固有频率关系 (b) 转动惯量比与固有频率关系

由图4可知,对于此类柔性并联机构:随着动平台质量增加(或从动杆质量减小),即系统质量集中于动平台情况下,系统第1、2阶固有频率也相应逐渐减小并趋于恒定,第3阶固有频率则随之逐渐减小到一定值后又反向逐渐增加,转折点发生在质量比为25附近;随着动平台转动惯量增加(或从动杆转动惯量减小),系统第1、2阶固有频率随之而逐渐减小并趋于恒定;而第3阶固有频率则随转动惯量比的增加逐渐减小到一定值后转而逐渐增加,转折点发生在转动惯量比为100附近。

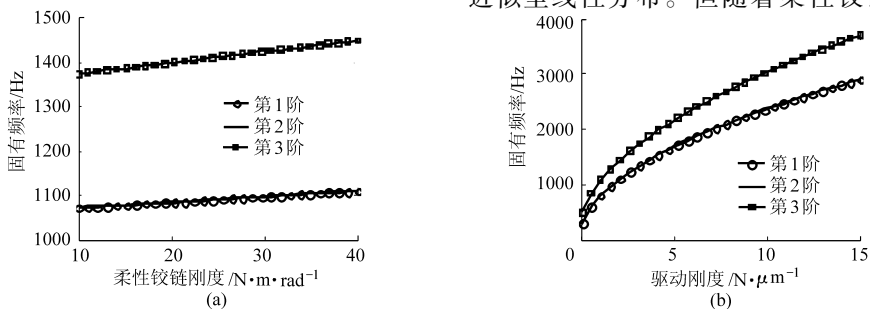


图5 柔性构件刚度与系统固有频率的关系曲线

Fig. 5 Relationship between stiffness of flexure parts and natural frequency

(a) 柔性铰链刚度与固有频率关系 (b) 驱动刚度与固有频率关系

动固有频率与动平台、从动杆惯量参数(质量、转动惯量)、柔性铰链刚度以及驱动刚度有关。

4 实例分析与仿真

由于系统的质量矩阵和刚度矩阵的维数较高,数学推导过程复杂,显式形式不易求解且无法直观的反映各构件惯量参数以及柔性构件刚度对系统固有频率的影响,这里通过数值算例的方法利用 Matlab 仿真软件进行分析并加以说明。

4.1 构件惯量参数对固有频率的影响

构件惯量参数包括:质量(动平台、从动杆)和转动惯量(动平台、从动杆)。为便于分析,将上述两参考量分别求比值,保持基座尺寸不变,改变动平台半径和从动杆长度,从而使其产生相应的质量和转动惯量变化。代入式(12)求解,结果如图4所示。

因此,可以通过合理的分配动平台、从动杆质量或转动惯量来调整系统固有频率。

4.2 柔性环节刚度对固有频率的影响

柔性环节包括从动杆两端 B_i 、 C_i 位置上单自由度圆形凹槽柔性铰链和驱动处平行板簧,将两者对应的转动刚度和驱动刚度代入式(12)求解,结果如图5所示。

由图5可知,在此类柔性并联机构中,系统固有频率随着单自由度柔性铰链刚度的增加而增加,且近似呈线性分布。但随着柔性铰链刚度的增加,其

变形灵活性也必然会随之降低。在实际应用中,要求柔性机构在实现高效的运动(变形)传递能力的同时应尽可能避免其产生低阶谐振现象或共振现象^[3,7],显然上述两者在基于铰链柔性变形为基础的柔性微动并联机构中是相互矛盾的。

系统固有频率随着驱动刚度的增加而逐渐增大,但并未呈现为线性。

4.3 仿真计算

利用 Matlab 仿真软件进行理论分析计算,将上述所列机构几何参数和材料参数代入式(12)求解,得到此类柔性机构的前 3 阶固有频率分别为: 1 201.6、1 201.7、1 520.6 Hz。

为了验证所建动力学模型的有效性,运用有限元仿真软件 ANSYS 建立 3-PRR 柔性并联机构的有限元模型,并进行模态仿真分析,得到如图 6 所示的前 3 阶模态形式及相应的固有频率。

5 结束语

基于两端铰支 Euler-Bernoulli 梁理论,采用假设模态法,分析各支链上从动杆的柔性,考察了其在

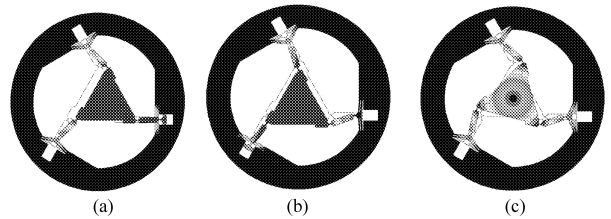


图 6 3-PRR 柔性并联机构 3 种模态形式

Fig. 6 Mode shapes of 3-PRR compliant mechanism

(a) 1 106.4 Hz (b) 1 106.7 Hz (c) 1 446.3 Hz

工作过程中的变形量和势能,通过与柔性铰链内所储存的势能进行比较,确定了在进行机构动力学分析过程中,将其作为刚性杆处理的依据。利用拉格朗日方程建立了此类柔性并联机构的动力学弹性振动微分方程,并借助数值算例,说明动平台、从动杆惯量参数(质量、转动惯量)、柔性环节刚度对系统固有频率的影响规律。利用 ANSYS 有限元分析软件进行仿真计算,仿真结果与理论计算结果相对误差在 10% 以内,说明建立修正动力学模型时所作的一系列简化及假设是合理的,所建动力学模型有效可用,为进一步的动力学优化设计奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 Tian Y, Shirinzadeh B, Zhang D. A flexure-based mechanism and control methodology for ultra-precision turning operation[J]. Precision Engineering, 2009, 33(2): 160 ~ 166.
- 2 Tian Y, Shirinzadeh B, Zhang D, et al. Development and dynamic modeling of a flexure-based Scott-Russell mechanism for nanomanipulation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 23(3): 957 ~ 978.
- 3 杜兆才,余跃庆,苏丽颖. 动平台惯性参数对柔性并联机构动力学特性的影响及优化设计[J]. 光学精密工程, 2006, 6(14): 1 009 ~ 1 016.
Du Zhaocai, Yu Yueqing, Su Liying. Effects of inertia parameters of moving platform on the dynamic characteristic of flexible parallel mechanism and optimal design[J]. Optics and Precision Engineering, 2006, 6(14): 1 009 ~ 1 016. (in Chinese)
- 4 Li Y M, Xu Q S. A novel design and analysis of a 2-DOF compliant parallel micromanipulator for nanomanipulation[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2006, 3(3): 247 ~ 254.
- 5 Zhang X P, James K M, William L C. Dynamic modeling and experimental validation of a 3-PRR parallel manipulator with flexible intermediate links[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2007, 50: 323 ~ 340.
- 6 Dong J Y, Yao Q, Placid M F. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning[J]. Precision Engineering, 2008, 32(1): 20 ~ 33.
- 7 鲁开讲,师俊平,高秀兰,等. 平面柔性并联机构弹性动力学研究[J]. 农业机械学报, 2010, 41(6): 208 ~ 215.
Lu Kaijiang, Shi Junping, Gao Xiulan, et al. Elastic-dynamics of planar flexile parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(6): 208 ~ 215. (in Chinese)

(上接第 189 页)

- 16 刘鹏,屠康,潘磊庆. 基于计算机视觉与敲击振动融合技术检测鸭蛋壳强度[J]. 农业机械学报, 2009, 40(8): 175 ~ 180.
Liu Peng, Tu Kang, Pan Leiqing. Duck egg's shell intensity model based on fusion of computer vision and impact excitation [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(8): 175 ~ 180. (in Chinese)
- 17 王巧华,邓小炎,文友先. 鸡蛋敲击响应的奇异性特征与蛋壳裂纹多层检测[J]. 农业机械学报, 2008, 39(12): 127 ~ 131.
Wang Qiaohua, Deng Xiaoyan, Wen Youxian. Egg-shell crack multi-level detection based on the singularity feature of dynamic resonance[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(12): 127 ~ 131. (in Chinese)
- 18 周平,刘俭英,文友先. 基于支持向量机的鸭蛋破损检测技术[J]. 农业机械学报, 2008, 39(1): 195 ~ 197, 204.